

---

# Récepteurs SIMO MLSE Widely Linear

## Structures et performances en présence d'interférences non circulaires

Jean Pierre Delmas<sup>1</sup>, Pascal Chevalier<sup>2</sup>, Soumaya Sallem<sup>3</sup>,  
Sadok Mustapha<sup>1,4</sup>

1. Telecom SudParis, UMR 5157 Samovar  
91011 Evry, France  
jean-pierre.delmas@it-sudparis.eu
2. CNAM, CEDRIC, 75141 Paris Cedex 3, France  
Thales-Communications and Security, SNE/SPM, 92622 Gennevilliers Cedex  
pascal.chevalier@thalesgroup.com,pascal.chevalier@cnam.fr
3. Laboratoire LFSE/CEA, Saclay Nano-Innov, 91191 Gif sur Yvettes  
sallem.soumaya@yahoo.fr
4. Institut National des Télécommunications d'Oran, Laboratoire de Recherche  
Appliquée en TIC (LaRATIC), Algerie  
msadok@ito.dz

---

**RÉSUMÉ.** Cet article présente le récepteur mono entrée multiples sorties (SIMO) optimal au sens du maximum de vraisemblance de séquence pour la détection de modulation d'amplitude en quadrature en présence à la fois d'interférences inter symboles (ISI) et d'un bruit total composé d'interférences co-canal (CCI) et d'un bruit de fond. Ce récepteur est développé sous l'hypothèse d'un bruit total centré gaussien, potentiellement non circulaire, stationnaire et coloré. Il est démontré que ce récepteur est composé d'un filtre widely linear (WL) suivi d'un échantillonnage au rythme symbole et d'une version modifiée de l'algorithme de Viterbi. Ce filtre WL est interprété comme un filtre spatio-temporel adapté (WL STMF) qui maximise le rapport signal à interférence plus bruit (SINR) sur le symbole courant. Le cas des modulations linéaires quasi rectilignes est aussi considéré dans ce cadre, où nous démontrons que le récepteur SIMO MLSE a la même structure moyennant un post-traitement de rotation. En dépit du fait qu'en pratique l'interférence co-canal soit cyclostationnaire et non gaussienne, il est démontré et illustré que le récepteur proposé a de meilleures performances que le récepteur conventionnel en présence d'interférence co-canal circulaire aussi bien stationnaire que cyclostationnaire.

*ABSTRACT.* This paper derives the maximum likelihood sequence estimation (MLSE) single input multiple output (SIMO) receiver for the demodulation of a quadrature amplitude modulated (QAM) signal of interest (SOI) corrupted by inter-symbol interference (ISI) and total noise composed of co-channel (CCI) interference and background noise. The receiver is derived under the assumption of a zero-mean, potentially noncircular, stationary, temporally and spatially colored Gaussian total noise. It is proved that this receiver is composed of a widely linear filter followed by a sampling operation at the symbol rate and a ML decision box implementing a modified version of the Viterbi algorithm. This WL filter is interpreted as a spatio-temporal matched filter (STMF) which maximizes the signal to interference plus noise ratio (SINR) on the current symbol. The case of quasi rectilinear modulation is also considered, where the MLSE receiver is proved to have a similar structure provided post rotation processing. Despite the fact that in practice, CCI are cyclostationary and non Gaussian, it is shown that the proposed receiver outperforms the conventional ones for cyclostationary and noncircular CCI.

*MOTS-CLÉS :* SIMO, MLSE, modulation rectiligne, modulation quasi rectiligne, GMSK, interférences non circulaires.

*KEYWORDS:* Single Input Multiple Output (SIMO), Maximum Likelihood Sequence Estimation (MLSE), rectilinear modulation, quasi rectilinear modulation, Gaussian Minimum Shift Keying (GMSK), noncircular interference.

---

DOI:10.3166/TS.32.7-37 © 2015 Lavoisier

### Extended Abstract

This paper derives the maximum likelihood sequence estimation (MLSE) single input multiple output (SIMO) receiver for the demodulation of a either rectilinear (ASK), quasi rectilinear (MSK, GMSK, OQAM) or quadrature amplitude modulated (QAM) signal of interest (SOI) corrupted by inter-symbol interference (ISI) and total noise composed of co-channel (CCI) interference and background noise. This SIMO MLSE receiver is derived under the assumption of a zero-mean, potentially noncircular, stationary, temporally and spatially colored Gaussian total noise. This receiver is obtained from the general framework of the detection of a deterministic multidimensional continuous-time signal corrupted by an additive zero-mean Gaussian noncircular stationary noise using a whitening approach that we have extended to noncircular stationary temporally and spatially noise. It is proved that this receiver is composed of a widely linear filter followed by a sampling operation at the symbol rate and a ML decision box implementing a modified version of the Viterbi algorithm. The WL filter is interpreted as a spatio-temporal matched filter (STMF) which maximizes the signal to interference plus noise ratio (SINR) on the current symbol. In the particular case of quasi rectilinear SOI, the MLSE receiver is proved to have a similar structure provided post rotation processing. Based on the direct relation between probability of error and SINR on the current symbol at the output of the matched filter, proved for the LMSE receiver for the demodulation of pulse amplitude modulations with white Gaussian

noise, we conjecture that this relation is also valid for our MLSE receiver. This allows us to characterize the performance of the derived MLSE receiver by the SINR on the current symbol at the output of the STMF. General closed-form expressions of this SINR are given for QAM, PAM and quasi rectilinear modulations SOI with possible noncircular general stationary or cyclostationary interferences. These expressions are compared to those obtained for the conventional MLSE receiver. Furthermore different particular cases of specular channels are presented to obtain interpretable closed-form expressions of the SINR that can illustrate the behavior of these MLSE receivers. Despite the fact that in practice, CCI are cyclostationary and non Gaussian, it is proved that the proposed receiver outperforms the conventional ones for cyclostationary and noncircular CCI. In particular, it is shown that the proposed receiver allows the single antenna interference cancellation (SAIC) effect for arbitrary QAM, PAM and quasi rectilinear SOI modulations in the presence of inter-symbol interference and of a single rectilinear interference through a single or two path channel. But this receiver does not allow this SAIC effect for a quasi rectilinear interference. Practical implementation of the presented MLSE receiver and extensions of this MLSE receiver to cyclostationary noncircular Gaussian noise able to cancel a single quasi rectilinear interference with a single antenna are under way.

## 1. Introduction

Le récepteur optimal pour la démodulation d'une séquence finie de symboles, modulés linéairement, en présence d'interférence entre symboles est le récepteur MLSE lorsque les séquences sont équiprobables. Ce récepteur a été introduit par Forney (Forney, 1972) pour une liaison monovoie sous l'hypothèse d'un bruit réel gaussien, centré et stationnaire blanc. Une structure alternative a été proposée deux ans plus tard par (Ungerboeck, 1974) et s'est montrée équivalente à celle de Forney (Bottomley, Chennakeshu, 1998). Des extensions du récepteur MLSE à des liaisons SIMO en présence de bruit gaussien, centré, stationnaire, circulaire, temporellement et spatialement coloré sont présentées dans (Modestino, Eyuboglu, 1986 ; Vila *et al.*, 1994 ; Lindskog, 1997 ; Bottomley, Chennakeshu, 1998). Cependant, dans les réseaux de communications pour les mobiles, le bruit total est principalement constitué d'interférences co-canal qui possèdent la même forme d'onde que le signal d'intérêt. En conséquence, le bruit total est généralement cyclostationnaire et potentiellement non circulaire au second ordre (Picinbono, 1994). C'est en particulier le cas pour les réseaux utilisant des modulations soit rectilignes (i.e., PAM, BPSK, ASK), soit quasi rectilignes (MSK, GMSK, OQAM) comme le réseau GSM. Pour cette raison, plusieurs récepteurs prenant en considération le caractère potentiellement non circulaire au second ordre des interférences co-canal ont été développés durant les 15 dernières années (Forster *et al.*, 1998 ; Trigui, Slock, 1998 ; 2000 ; Chevalier, Pipon, 2006 ; Meyer *et al.*, 2006 ; Olivier, Kleynhans, 2007). Toutefois, alors que (Chevalier, Pipon, 2006 ; Meyer *et al.*, 2006) supposent une absence d'interférence entre symboles, (Forster *et al.*, 1998), et (Olivier, Kleynhans, 2007), ne proposent que des récepteurs sous-optimaux pour des canaux sélectifs en fréquence. Seul (Trigui, Slock, 1998 ; 2000) considère le récepteur

MLSE en présence d'interférence entre symboles et d'interférences co-canal potentiellement non circulaires au second ordre. Néanmoins, (Trigui, Slock, 1998 ; 2000) se focalise sur les réseaux GSM et ne présente qu'une analyse de performances en sortie via le calcul des bornes du filtre adapté. Notons qu'il existe quelques travaux (par exemple (Chavali, 2012 ; Kassam, Thomas, 1988)) dans la littérature portant sur la détection d'une forme d'onde observée en présence de bruit additif non gaussien, mais à notre connaissance aucune portant sur la détection de symboles dans le cadre d'interférences intersymbole et d'interférences co-canal non gaussienne.

Dans cet article, on considère des signaux d'intérêt à modulations QAM (Proakis, 2001) et on présente et analyse les propriétés et performances du récepteur MLSE pour la démodulation d'un tel signal d'intérêt en présence d'interférence entre symboles et d'interférences co-canal potentiellement non circulaire au second ordre. De manière à maîtriser les calculs, le récepteur MLSE est développé sous l'hypothèse (fausse en pratique) d'un bruit total centré, gaussien, stationnaire, non circulaire, coloré temporellement et spatialement. En d'autres termes, le récepteur proposé exploite l'information contenue dans la non-circularité à l'ordre 2 potentielle des interférences mais n'exploite pas celle contenue dans la cyclostationnarité à l'ordre 2 potentielle de celles-ci. Il est montré que le récepteur MLSE proposé est composé d'un filtre widely linear (Picinbono, Chevalier, 1995) invariant dans le temps, suivi d'un échantillonneur au rythme symbole et d'un organe de décision au sens du maximum de vraisemblance implémentant une version modifiée de l'algorithme de Viterbi. Ce filtre WL est interprété comme un filtre adapté spatio-temporel maximisant le rapport SINR en sortie sur le symbole courant. Le cas des modulations linéaires quasi rectilignes est aussi considéré dans ce cadre où il est montré que le récepteur optimal a une structure comparable mais fonction du temps symbole et intégrant un post-traitement de dérotation. En dépit du fait qu'en pratique, les interférences co-canal sont cyclostationnaires (Gardner *et al.*, 2006) et souvent non gaussiennes, on démontre que le récepteur MLSE proposé présente de meilleures performances que les récepteurs conventionnels pour des interférences potentiellement non circulaires au second ordre aussi bien stationnaires que cyclostationnaires. En présence d'un SOI rectiligne, le récepteur proposé permet en particulier l'annulation d'une interférence rectiligne à partir d'une seule antenne et étend ainsi aux canaux sélectifs en fréquence le concept SAIC (*Single Antenna Interference Cancellation*) présenté dans (Chevalier, Papon, 2006) pour des canaux sans interférence entre symboles. Signalons que quelques éléments de cet article ont fait l'objet d'une communication en conférence (Sallem *et al.*, 2012).

Le plan de cet article est le suivant. Dans la section 2, le récepteur SIMO MLSE d'une modulation linéaire quelconque en présence de bruit total centré, gaussien, stationnaire, coloré et potentiellement non circulaire au second ordre est présenté comme cas particulier d'un problème général de détection d'une forme d'onde. Une interprétation de la structure développée en fonction du type de modulations (complexe, rectiligne ou quasi rectiligne) est décrite dans la section 3. Conjecturant que le taux d'erreurs symbole en sortie du récepteur est directement lié au SINR sur le symbole courant en sortie, comme cela est démontré dans (Proakis, 2001) pour des modulations PAM et pour un récepteur MLSE conventionnel sans interférence, des expressions gé-

nérales du SINR sur le symbole courant en sortie du récepteur MLSE proposé sont calculées dans la section 4 pour les différentes modulations traitées et pour des interférences aussi bien stationnaires que cyclostationnaires. Ces expressions sont alors comparées à celles obtenues en sortie du récepteur MLSE conventionnel calculé sous l'hypothèse d'un bruit total circulaire au second ordre. Des cas particuliers sont alors considérés et illustrés dans la section 5 de manière à mettre en évidence concrètement certaines propriétés et performances du récepteur MLSE proposé. Enfin une conclusion résume les principaux résultats de l'article.

## 2. Récepteurs SIMO MLSE

### 2.1. Problème général de détection

Considérons le cadre général de la détection d'une forme d'onde déterministe multidimensionnelle à temps continu  $\mathbf{s}^{(m)}(t) \in \mathbb{C}^N$ ,  $m = 1, \dots, M$  qui est observée à travers un bruit  $\mathbf{n}(t)$  additif centré de distribution gaussienne et stationnaire. Le signal observé est alors :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}^{(m)}(t) + \mathbf{n}(t), \quad m = 1, \dots, M. \quad (1)$$

Dans le cas où  $\{\mathbf{s}^{(m)}(t)\}_{m=1, \dots, M}$  sont équiprobables, les critères de minimisation de la probabilité d'erreur et de maximisation de vraisemblance (ML) sont équivalents. Pour définir rigoureusement le détecteur ML à partir du signal à temps continu (1), nous allons d'abord considérer le cas particulier où  $\mathbf{n}(t)$  est circulaire, spatialement et temporellement blanc.

En utilisant une base orthonormée complexe scalaire  $\mathcal{S} = \{\phi_\ell(t)\}_{\ell=1, \dots, L}$  de l'espace vectoriel engendré par les  $N$  composantes de  $\{\mathbf{s}^{(m)}(t)\}_{m=1, \dots, M}$  (donc de dimension finie  $L \leq NM$ ), (VanTrees, 1968, Chap. 4) (dont il est inutile de préciser ici les expressions de  $\phi_\ell(t)$ ), chaque signal  $\mathbf{s}^{(m)}(t)$  est complètement déterminé par un vecteur  $\mathbf{s}^{(m)}$  à  $LN$  composantes. Donc le vecteur  $\mathbf{x}$  associé au signal  $\mathbf{x}(t)$  est donné par

$$\mathbf{x} = \mathbf{s}^{(m)} + \mathbf{n} \in \mathbb{C}^{LN}.$$

Le problème de détection de formes d'onde à temps continu (1) est alors équivalent à un problème de détection vectorielle à dimension finie car  $\mathbf{x}$  par lui-même contient toute l'information de l'observation  $\mathbf{x}(t)$  qui est utile pour la détection au sens ML de  $m$  (Wozencraft, Jacobs, 1965, Chap. 4). Quand la densité spectrale de puissance de  $\mathbf{n}(t)$  est  $\sigma^2 \mathbf{I}_N$ , il est aisé de démontrer que le vecteur à composantes complexes  $\mathbf{n}$  est de distribution gaussienne centrée circulaire de matrice de covariance  $\sigma^2 \mathbf{I}_{LN}$ .

En conséquence, le détecteur ML de  $m$  est donné par  $\hat{m} = \text{Arg min}_m \|\mathbf{x} - \mathbf{s}^{(m)}\|^2$ .  
Comme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}^{(m)}\|^2 &= \sum_{n=1}^N \left( \sum_{\ell=1}^L \sum_{\ell'=1}^L (x_{n,\ell} - s_{n,\ell}^{(m)})(x_{n,\ell'} - s_{n,\ell'}^{(m)})^* \delta_{\ell,\ell'} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{\ell=1}^L (x_{n,\ell} - s_{n,\ell}^{(m)}) \phi_{\ell}(t) \right|^2 dt \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n^S(t) - s_n^{(m)}(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n(t) - s_n^{(m)}(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

où  $(x_{n,\ell}, s_{n,\ell}^{(m)})_{n=1,\dots,N,\ell=1,\dots,L}$  désignent les composantes de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{s}^{(m)}$ ,  $\delta_{\ell,\ell'}$  est l'opérateur de Kronecker et où  $x_n(t) = x_n^S(t) + x_n^{S^\perp}(t)$  représente la décomposition orthogonale de la composante  $n$  de  $\mathbf{x}(t)$ . Par suite, nous obtenons de façon équivalente :

$$\hat{m} = \text{Arg min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{s}^{(m)}(t)\|^2 dt. \quad (2)$$

Puis quand  $\mathbf{n}(t)$  est potentiellement non circulaire, spatialement et temporellement coloré, nous pouvons étendre l'opération classique de blanchiment utilisé dans le cas de bruit scalaire réel coloré dans (Ungerboeck, 1974) et (VanTrees, 1968, Chap. 4). Ici les propriétés statistiques de  $\mathbf{n}(t)$  sont caractérisées par la matrice de covariance

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\tau) = \text{E}[\tilde{\mathbf{n}}(t)\tilde{\mathbf{n}}^H(t-\tau)] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n(\tau) & \mathbf{C}_n(\tau) \\ \mathbf{C}_n^*(\tau) & \mathbf{R}_n^*(\tau) \end{bmatrix}$$

du vecteur étendu  $\tilde{\mathbf{n}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{n}^T(t), \mathbf{n}^H(t)]^T$  où  $\mathbf{R}_n(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \text{E}[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t-\tau)]$  et  $\mathbf{C}_n(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \text{E}[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(t-\tau)]$  sont respectivement les matrices de covariance et de covariance complémentaire de  $\mathbf{n}(t)$ . Pour calculer le détecteur ML, nous avons besoin du résultat suivant démontré en appendice :

**Résultat** : si la transformée de Fourier<sup>1</sup>  $\mathbf{R}_n(f)$  de  $\mathbf{R}_n(\tau)$  est inversible pour toutes les valeurs de  $f$  (c'est le cas lorsque  $\mathbf{n}(t)$  est une somme d'interférences et d'un bruit de fond circulaire spatialement et temporellement blanc indépendants), il existe un filtre WL  $[\mathbf{W}_1(t), \mathbf{W}_2(t)]$  blanchisseur causal et causalement inversible de taille  $N \times 2N$  tel que :

$$\mathbf{n}_w(t) = \mathbf{W}_1(t) \star \mathbf{n}(t) + \mathbf{W}_2(t) \star \mathbf{n}^*(t)$$

est à la fois circulaire, spatialement et temporellement blanc, c'est-à-dire :

$$\text{E}[\mathbf{n}_w(t)\mathbf{n}_w^H(t-\tau)] = \delta(\tau)\mathbf{I}_N \quad \text{et} \quad \text{E}[\mathbf{n}_w(t)\mathbf{n}_w^T(t-\tau)] = \mathbf{0}_N$$

1. Toutes les transformées de Fourier de scalaires  $x$ , vecteurs  $\mathbf{x}$  et matrices  $\mathbf{X}$  seront représentées avec la même notation, où la variable temporelle  $t$  ou  $\tau$  est simplement remplacée par  $f$ .

où  $\star$  est le produit de convolution et  $\delta(\cdot)$  est le symbole de Kronecker.

Utilisant le modèle blanchi  $\mathbf{x}_w(t) = \mathbf{s}_w^{(m)}(t) + \mathbf{n}_w(t)$  où  $\mathbf{x}_w(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}_1(t) \star \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_2(t) \star \mathbf{x}^*(t)$  et  $\mathbf{s}_w^{(m)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}_1(t) \star \mathbf{s}^{(m)}(t) + \mathbf{W}_2(t) \star \mathbf{s}^{*(m)}(t)$  qui est équivalent à (1) puisque le filtre WL blanchisseur est causal et causalement inversible, le détecteur ML de  $m$  est alors donné à partir de (2) par

$$\hat{m} = \text{Arg} \min_m \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{x}_w(t) - \mathbf{s}_w^{(m)}(t)\|^2 dt, \quad (3)$$

qui grâce au théorème de Parseval et à l'appendice est équivalent à :

$$\hat{m} = \text{Arg} \min_m \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\mathbf{x}}(f) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f)]^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) [\tilde{\mathbf{x}}(f) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f)] df \quad (4)$$

où  $\tilde{\mathbf{x}}(f) = [\mathbf{x}^T(f), \mathbf{x}^H(-f)]^T$  et  $\tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f) = [\mathbf{s}^{(m)T}(f), \mathbf{s}^{(m)H}(-f)]^T$  sont les transformées de Fourier respectives de  $\tilde{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{x}^H(t)]^T$  et  $\tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{s}^{(m)T}(t), \mathbf{s}^{(m)H}(t)]^T$  parce que  $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) = \mathbf{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}^H(f) \mathbf{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f)$  où  $\mathbf{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f)$  est défini par (74). Utilisant à nouveau le théorème de Parseval, (4) est équivalent à

$$\hat{m} = \text{Arg} \min_m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(t)]^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{Inv}}(t - \tau) [\tilde{\mathbf{x}}(\tau) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(\tau)] dt d\tau, \quad (5)$$

où  $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{Inv}}(\tau)$  désigne la transformée de Fourier inverse de  $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f)$ .

## 2.2. Calcul du récepteur SIMO MLSE

Appliquons maintenant le résultat général précédent à la détection de la séquence  $\{a_k\}_{k=0, \dots, K-1}$  de  $K$  symboles consécutifs de l'amplitude complexe d'une modulation linéaire en quadrature transmise sur un canal linéaire sélectif en fréquence

$$\mathbf{s}^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \mathbf{g}(t - kT), \quad \text{avec } \mathbf{g}(t) = v(t) \star \mathbf{h}(t) \quad (6)$$

où  $v(t)$  et  $\mathbf{h}(t)$  dénotent respectivement l'impulsion transmise et la réponse impulsionnelle équivalente bande de base d'un canal multivoie et où  $m = 1, \dots, M$  avec  $M = (\text{card } \mathcal{A})^K$  où  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des symboles complexes  $\{a_k\}$  de la modulation. En considérant uniquement les termes qui ne dépendent que des symboles  $a_k$  dans (4), la séquence  $\{a_k\}_{k=0, \dots, K-1}$  qui minimise le critère (4) est de façon équivalente donnée par la minimisation de la métrique suivante :

$$\Lambda(a_0, \dots, a_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \text{Re}(a_k^* a_{k'} r_{k-k'} + a_k a_{k'} r'_{k-k'}) - 2 \sum_{k=0}^{K-1} \text{Re}(a_k^* y_k), \quad (7)$$

où  $y_k$ ,  $r_k$  et  $r'_k$  sont donnés fréquemment par :

$$y_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi k f T} df \quad (8)$$

et

$$r_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) e^{i2\pi k f T} df, \quad (9)$$

$$r'_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_2(f) e^{i2\pi k f T} df, \quad (10)$$

avec  $\mathbf{g}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{g}_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix}$  où  $\mathbf{g}(f) = v(f)\mathbf{h}(f)$ .

La séquence  $\{y_k\}_{k=0, \dots, K-1}$  est donc un résumé exhaustif du problème de détection dans laquelle  $y_k$  peut être interprété comme la sortie à l'instant  $kT$  du filtre WL multidimensionnel de fonction de transfert

$$\mathbf{w}_1^H(f) = \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f), \quad (11)$$

dont l'entrée est  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ .

En supposant que l'interférence intersymbole (ISI) à la sortie de ce filtre soit limitée<sup>2</sup> aux  $L_i$  symboles précédents et  $L_i$  symboles suivants,  $r_k = r'_k = 0$  pour  $|k| > L_i$ , la métrique (7) satisfait la relation

$$\begin{aligned} \Lambda(a_0, \dots, a_{k-L_i}, \dots, a_k, \dots, a_{k+L_i}) &= \Lambda(a_0, \dots, a_{k-L_i}, \dots, a_k, \dots, a_{k+L_i-1}) \\ &+ \lambda(y_k; \boldsymbol{\sigma}_k; a_{k+L_i}). \end{aligned}$$

En conséquence la minimisation de cette métrique récursive revient à résoudre un problème de programmation dynamique qui peut être résolu efficacement par l'algorithme de Viterbi où  $\boldsymbol{\sigma}_k = (a_{k-L_i}, \dots, a_k, \dots, a_{k+L_i-1})$  représente les  $2^{2L}$  états et  $\lambda(y_k; \boldsymbol{\sigma}_k; a_{k+L_i})$  les différentes métriques de branche. Par suite le récepteur MLSE sous hypothèse de bruit gaussien stationnaire potentiellement non circulaire a, dans le cas général de symboles complexes, la structure suivante :

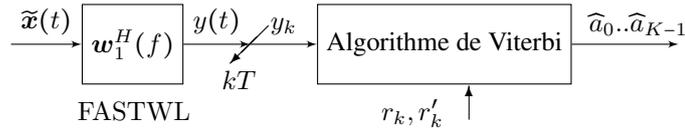


Figure 1. Structure du récepteur MLSE non circulaire pour symboles complexes

Sous l'hypothèse de bruit circulaire,  $\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^{-1}(f) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_n^{-1*}(-f) \end{bmatrix}$  et (8), (9), et (10) se réduisent respectivement à :

$$y_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{x}(f) e^{i2\pi k f T} df, \quad (12)$$

2. Cette limitation provient de la troncature du filtre de mise en forme  $v(t)$  qui est supposé non-causal pour des raisons de commodité.

$$r_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) e^{i2\pi k f T} df \text{ et } r'_k = 0.$$

Nous retrouvons alors naturellement le récepteur MLSE sous hypothèse de bruit gaussien stationnaire circulaire constitué du filtre linéaire adapté de fonction de transfert

$$\mathbf{w}^H(f) = \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f), \quad (13)$$

d'une prise d'échantillon au rythme symbole  $kT$  à sa sortie suivi par la minimisation par l'algorithme de Viterbi de la métrique classique

$$\Lambda(a_0, \dots, a_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \text{Re}(a_k^* a_{k'} r_{k-k'}) - 2 \sum_{k=0}^{K-1} \text{Re}(a_k^* y_k).$$

### 2.3. Cas particulier de symboles réels

Quand les symboles  $a_k$  sont réels,  $2\text{Re}(a_k^* y_k) = a_k z_k$  dans (7), où maintenant

$$z_k = 2\text{Re}(y_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi k f T} df, \quad (14)$$

avec  $\tilde{\mathbf{g}}(f) = [\mathbf{g}^T(f), \mathbf{g}^H(-f)]^T$ . Le résumé exhaustif se réduit maintenant à la séquence  $\{z_k\}_{k=0, \dots, K-1}$  où  $z_k$  peut aussi être interprété comme la sortie à l'instant  $kT$  du filtre WL multidimensionnel de fonction de transfert

$$\tilde{\mathbf{w}}^H(f) = \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f). \quad (15)$$

La structure du récepteur MLSE devient alors :

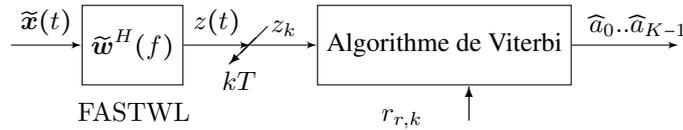


Figure 2. Structures du récepteur MLSE non circulaire avec des symboles réels

Sous l'hypothèse de bruit circulaire, nous retrouvons :

$$z_k = 2\text{Re} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{x}(f) e^{i2\pi k f T} df \right), \quad (16)$$

qui est aussi la sortie d'un filtre WL.

#### 2.4. Cas particulier d'une modulation linéaire quasi rectiligne

Concentrons nous ici sur le cas particulier des modulations linéaires quasi rectilignes<sup>3</sup> pour lesquelles  $a_k = i^k b_k$  et où  $b_k$  et l'impulsion  $v(t)$  de (6) sont réels. Appartiennent à cette famille de modulations les modulations MSK et OQAM ainsi que, de manière approchée, la modulation GMSK.

En remplaçant  $a_k$  par  $i^k b_k$  dans l'expression de la métrique (7), on obtient :

$$\Lambda(b_0, \dots, b_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \operatorname{Re} \left( r_{d, k-k'} + (-1)^k r'_{d, k-k'} \right) - \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d, k} \quad (17)$$

avec

$$r_{d, k} \stackrel{\text{def}}{=} (-i)^k r_k \quad \text{et} \quad r'_{d, k} \stackrel{\text{def}}{=} i^k r'_k$$

et

$$\begin{aligned} z_{d, k} &= 2\operatorname{Re}[(-i)^k y_k] = (-i)^k y_k + i^k y_k^* \\ &= (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi k f T} df + (i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_2^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi k f T} df, \end{aligned} \quad (18)$$

avec  $\mathbf{w}_2^H(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_2^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f)$ .

Sous les mêmes hypothèses que pour les modulations QAM de la section 2.2, le récepteur MLSE se compose donc de deux filtres WL, d'une prise d'échantillons aux instants  $kT$ , de deux post-rotations<sup>4</sup> de  $\pm k\pi/2$  et d'une minimisation de la métrique (17) qui peut être réalisée par l'algorithme de Viterbi dont la métrique de branche dépend ici de la parité de  $k$ , avec la structure suivante :

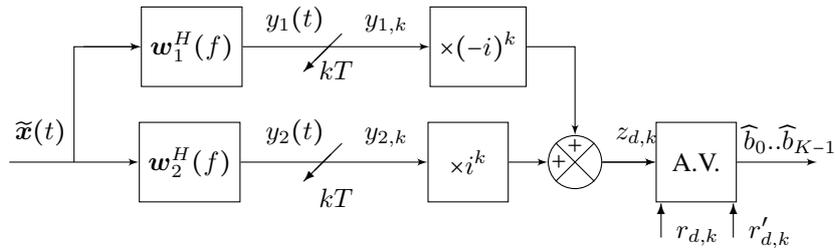


Figure 3. Structure 1 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi rectilignes

3. Ces modulations d'enveloppe complexe

$$\left[ \left( \sum_k (-1)^k b_{2k} v(t - 2kT) \right) + i \left( \sum_k (-1)^k b_{2k+1} v(t - (2k+1)T) \right) \right]$$

sont aussi appelées modulations linéaires décalées.

4. Notons que cette rotation de  $\pi/2$  avait été introduite sous forme d'une prérotation dans (Trigui, Slock, 1998).

Remarquons que l'opération classique de prérotation aboutirait après un long développement à la structure équivalente suivante :

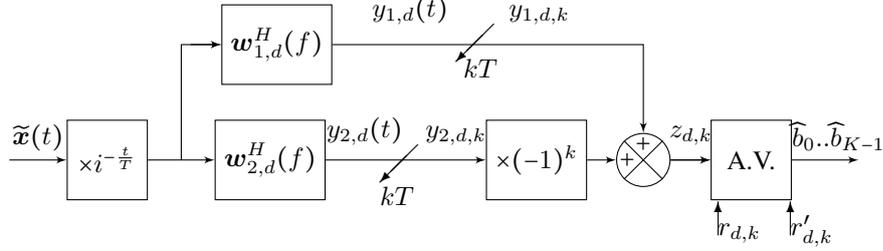


Figure 4. Structure 2 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi rectilignes

où  $\mathbf{w}_{1,d}(f) = \mathbf{R}_n^{-1}(f + \frac{1}{4T})\mathbf{g}_1(f + \frac{1}{4T})$  et  $\mathbf{w}_{2,d}(f) = \mathbf{R}_n^{-1}(f + \frac{1}{4T})\mathbf{g}_2(f + \frac{1}{4T})$ .

Notons que le résumé exhaustif  $z_{d,k}$  (18) s'écrit sous la forme :

$$z_{d,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi k f T} df$$

avec

$$\mathbf{w}_{(k)}^H(f) = [i^k \mathbf{g}_1^H(f) + (-i)^k \mathbf{g}_2^H(f)] \mathbf{R}_n^{-1}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f), \quad (19)$$

qui peut s'interpréter comme une famille de quatre filtres associés aux instants  $kT$  avec  $k$  modulo 4.

Sous l'hypothèse de bruit circulaire,  $\mathbf{R}_n^{-1}(f)$  est bloc diagonale. Par suite

$$z_{d,k} = 2\text{Re} \left( (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{x}(f) e^{i2\pi k f T} df \right), \quad (20)$$

et  $r_{d,k} = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) e^{i2\pi k f T} df$  et  $r'_{d,k} = 0$ . La métrique (17) se réduit alors à

$$\Lambda(b_0, \dots, b_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \text{Re}[r_{d,k-k'}] - \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k}, \quad (21)$$

ce qui donne un récepteur MLSE identique au cas de symboles réels (voir (16)) en y incluant un terme de post-rotation.

### 3. Interprétation des filtres WL

Dans le cas particulier d'une modulation QAM et de bruit circulaire, le filtre linéaire  $\mathbf{w}^H(f) = \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f)$  (13) maximise parmi les filtres linéaires de  $y_k$ , le rapport SINR de la puissance du symbole courant sur la puissance du bruit total. D'où son interprétation de filtre linéaire adapté spatio-temporel (STMF) pour *spatio-temporal multidimensional filter* (appelé aussi (MMF) pour *multidimensional matched*

*filter* dans (Vila *et al.*, 1994)). Cette interprétation s'étend dans le cas non circulaire. En effet puisque dans le cas de symboles complexes ou réels, nous avons respectivement :

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \mathbf{g}_1(t - kT) + \sum_{k=0}^{K-1} a_k^* \mathbf{g}_2(t - kT) + \tilde{\mathbf{n}}(t), \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \tilde{\mathbf{g}}(t - kT) + \tilde{\mathbf{n}}(t), \quad (23)$$

les filtres  $\mathbf{w}_1^H(f) = \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f)$  (11) et  $\tilde{\mathbf{w}}^H(f) = \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f)$  (15) sont aussi clairement des filtres adaptés spatio-temporels WL. Notons que nous avons respectivement en sortie de ces filtres :

$$y_k = a_k r_0 + a_k^* r'_0 + \sum_{l \neq k} (a_l r_{k-l} + a_l^* r'_{k-l}) + n_k, \quad (24)$$

$$z_k = a_k r_{r,0} + \sum_{l \neq k} a_l r_{r,k-l} + n_{r,k}, \quad (25)$$

avec  $n_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{n}}(f) e^{i2\pi k f T} df$  et  $n_{r,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{n}}(f) e^{i2\pi k f T} df$  et où  $r_{r,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{g}}(f) e^{i2\pi k f T} df$ .

Dans le cas de symboles complexes, (24) montre qu'à l'interférence intersymbole (ISI), s'ajoute une interférence autosymbole  $a_k^*$  dite CSI (conjugate symbol interference). De plus nous avons démontré les relations suivantes à partir de la formule des interférences

$$E(n_l n_{l-k}^*) = r_k, \quad E(n_l n_{l-k}) = r'_k \quad \text{et} \quad E(n_{r,l} n_{r,l-k}) = r_{r,k},$$

qui généralisent les relations classiques obtenues dans le cas bruit circulaire.

Pour les modulations linéaires quasi rectilignes où

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} b_k \mathbf{g}_{(k)}(t - kT) + \tilde{\mathbf{n}}(t),$$

avec  $\mathbf{g}_{(k)}(t) = [i^k \mathbf{g}_1(t) + (-i)^k \mathbf{g}_2(t)]$ , le filtre WL  $\mathbf{w}_{(k)}^H(f) = \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f)$  donné par (19) peut donc aussi s'interpréter comme un filtre adapté spatio-temporel WL à l'instant  $kT$ . Notons que la sortie  $z_{d,k}$  de ce filtre adapté s'écrit sous la forme suivante

$$z_{d,k} = 2[b_k (r_0 + (-1)^k \text{Re}(r_0^*)) + \sum_{l \neq k} b_l \text{Re}((-i)^{k-l} r_{k-l} + i^{k+l} r'_{k-l})] + n_{d,k},$$

avec  $n_{d,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f) \tilde{\mathbf{n}}(f) e^{i2\pi k f T} df$ .

Notons enfin que tous les filtres WL adaptés obtenus sont structurés comme sous l'hypothèse de bruit circulaire. Ils se composent ici d'un filtrage WL de blanchiment spatio-temporel qui blanchit temporellement et spatialement et qui circularise le bruit total au second ordre, d'un filtre adapté au canal global étendu sur chaque capteur lui-même composé de la cascade d'un filtre adapté au canal de propagation et d'un filtre adapté au filtre de mise en forme.

## 4. Performances en termes de SINR

### 4.1. Objectifs

Les performances des récepteurs MLSE en termes de probabilité d'erreur par symbole n'ont été analysées à notre connaissance que dans le cas de modulations d'amplitude bande de base dans le contexte monovoie sous bruit additif gaussien blanc par (Proakis, 2001, Sec.10.1.4). Dans ce cas particulier, une approximation de la probabilité d'erreur par symbole a été donnée sous la forme

$$P(\text{erreur}) \approx c_1 Q\left(c_2 \sqrt{\text{SNR}}\right) \text{ avec } Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

où le terme SNR représente le rapport de la puissance du symbole courant sur la puissance du bruit en sortie du filtre adapté et où  $c_1$  et  $c_2$  qui représente une perte de SNR due à l'interférence intersymbole ( $c_2 = 1$  pour  $L_i = 1$ ), ne dépendent que du nombre d'états de la modulation et de la mémoire  $L_i$  du canal global.

Nous conjecturons ici que les performances en termes de probabilité d'erreur par symbole des récepteurs MLSE que nous avons introduits sont toujours guidées par le SINR du symbole courant en sortie de filtre adapté aux instants  $kT$ .

Nous allons donc donner des expressions analytiques des différents rapports de la puissance du symbole courant sur la puissance du bruit total avant décision (noté SINR car le bruit total contient les interférences co canal et le bruit de fond) des différents récepteurs MLSE que nous avons développés dans la section 2. Bien que les récepteurs soient calculés sous l'hypothèse de bruit gaussien stationnaire circulaire ou non circulaire, les SINRs de ces différents récepteurs seront d'abord calculés en présence de bruit potentiellement non circulaire stationnaire, puis pour traiter le cas d'interférences co-canal de même nature que le SOI, nous considérons le cas de bruit potentiellement non-circulaire cyclostationnaire de même période que celle du SOI.

### 4.2. Cas de bruit total stationnaire

#### 4.2.1. Récepteurs MLSE sous hypothèse circulaire

Dans le cas de symboles complexes, nous avons d'après (12) et (13), une puissance symbole  $P_s = E|a_k|^2 r_0^2 = E|a_k|^2 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df \right]^2$  et une puissance de bruit total  $P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df$ . Par suite le SINR en sortie du filtre linéaire adapté ne dépend que de la matrice de covariance du bruit total et est donné par

$$\text{SINR}_y^c = E|a_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df. \quad (26)$$

Au contraire pour des symboles réels, puisque le filtrage adapté (16) est WL, le SINR dépendra à la fois de la matrice de covariance et de la matrice de covariance complé-

mentaire du bruit total. On obtient  $P_s = 4E(a_k^2)r_0^2$  et une puissance du terme bruit total de  $z_k$  (16) donnée à l'aide de la formule des interférences par

$$P_n = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{R}_n(f) \mathbf{w}(f) df + 2\text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{C}_n(f) \mathbf{w}^*(-f) df \right]$$

avec  $\mathbf{w}^H(f) = \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f)$ . Par suite le SINR en sortie du filtre WL adapté est donné par

$$\text{SINR}_z^c = \frac{2E(a_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df}{1 + \frac{\text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{C}_n(f) \mathbf{R}_n^{-1*}(-f) \mathbf{g}^*(-f) df \right]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df}}. \quad (27)$$

Dans le cas de modulations linéaires quasi rectilignes, nous avons aussi d'après (20),  $P_s = 4E(b_k^2)r_0^2$  et une puissance du terme bruit total de  $z_{d,k}$  qui peut aussi être dérivée de la formule des interférences et qui est donnée ici par

$$P_n = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{R}_n(f) \mathbf{w}(f) df + 2(-1)^k \text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{C}_n(f) \mathbf{w}^*(-f) df \right].$$

On obtient alors ici un SINR en sortie à l'instant  $kT$  du filtre WL adapté donné par

$$\text{SINR}_{z,k}^c = \frac{2E(b_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df}{1 + (-1)^k \frac{\text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{C}_n(f) \mathbf{R}_n^{-1*}(-f) \mathbf{g}^*(-f) df \right]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df}}. \quad (28)$$

#### 4.2.2. Récepteurs MLSE sous hypothèse non-circulaire

Dans le cas des récepteurs MLSE que nous avons calculés sous hypothèse de bruit total stationnaire potentiellement non-circulaire, le SINR en sortie du filtre WL adapté aux instants  $kT$  s'obtient directement à partir des filtres WL  $\mathbf{w}_1^H(f)$  (11),  $\tilde{\mathbf{w}}^H(f)$  (15) et  $\tilde{\mathbf{w}}_{(k)}^H(f)$  (19). On obtient ainsi pour des modulations QAM, ASK et linéaires quasi rectilignes, les expressions suivantes des SINRs

$$\text{SINR}_y^{nc} = E|a_k^2| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{w}}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) df, \quad (29)$$

$$\text{SINR}_z^{nc} = E(a_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{w}}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{g}}(f) df, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{SINR}_{z,k}^{nc} &= E(b_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{w}}}^{-1}(f) \mathbf{g}_{(k)}(f) df \\ &= E(b_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)]^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{w}}}^{-1}(f) [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)] df. \end{aligned} \quad (31)$$

Comme les filtres adaptés des récepteurs MLSE obtenus sous l'hypothèse de bruit total circulaire sont sous-optimaux (vis-à-vis du SINR) sous l'hypothèse de bruit total non-circulaire, nous avons par le principe d'inclusion

$$\text{SINR}_y^{nc} \geq \text{SINR}_y^c, \quad \text{SINR}_z^{nc} \geq \text{SINR}_z^c \quad \text{et} \quad \text{SINR}_{z_d}^{nc} \geq \text{SINR}_{z_d}^c. \quad (32)$$

Des illustrations numériques seront présentées dans la section 5 pour illustrer le gain en SINR apporté par les récepteurs MLSE construits sous hypothèse non-circulaire par rapport aux récepteurs MLSE classiques construits sous hypothèse circulaire, utilisés en environnement non-circulaire.

### 4.3. Cas de bruit total cyclostationnaire

Nous considérons ici le cas où le bruit total potentiellement non-circulaire est constitué d'une somme d'interférences co-canal sous forme de modulations linéaires MAQ, ASK ou de modulations linéaires quasi rectilignes (de période symbole  $T'$  et d'impulsion non nécessairement égales à celles du SOI) et d'un bruit de fond. Si  $n(t)$  est un tel signal, nous rappelons au lecteur des relations que nous utiliserons

$$E|n^2(kT)| = \sum_{\alpha} e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} r_n^{(\alpha)}(f) df \quad \text{et} \quad E(n^2(kT)) = \sum_{\beta} e^{i2\pi\beta kT} \int_{-\infty}^{+\infty} c_n^{(\beta)}(f) df \quad (33)$$

où  $r_n^{(\alpha)}(f)$  et  $c_n^{(\beta)}(f)$  désignent les densités spectrales cycliques<sup>5</sup> de puissance et les densités spectrales cycliques complémentaires de puissance de  $n(t)$  et où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les fréquences cycliques (pour les modulations MAQ et ASK,  $\alpha$  et  $\beta$  sont multiples de  $1/T'$  mais pour les modulations linéaires quasi rectilignes,  $\alpha$  sont multiples de  $1/T'$  et  $\beta$  multiples impairs de  $1/2T'$ ) de  $r_n^{(\alpha)}(f)$  et  $c_n^{(\beta)}(f)$ . Si  $\mathbf{n}_i(t)$  est un tel signal cyclostationnaire multidimensionnel filtré par un filtre linéaire MISO  $\mathbf{w}^H(f)$ , sa sortie  $n_o(t)$  est aussi cyclostationnaire de densité spectrale cyclique et spectrale cyclique complémentaire de puissance données respectivement par les formules des interférences suivantes

$$r_{n_o}^{(\alpha)}(f) = \mathbf{w}^H\left(f + \frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{R}_{n_i}^{(\alpha)}(f) \mathbf{w}\left(f - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (34)$$

$$c_{n_o}^{(\beta)}(f) = \mathbf{w}^H\left(f + \frac{\beta}{2}\right) \mathbf{C}_{n_i}^{(\beta)}(f) \mathbf{w}^*\left(-f + \frac{\beta}{2}\right). \quad (35)$$

Comme les filtres adaptés linéaires et WL des récepteurs MLSE que nous avons introduits ont été calculés sous hypothèse de stationnarité du bruit total, nous remplaçons les matrices de densité spectrale  $\mathbf{R}_n(f)$  et de densité spectrale complémentaire  $\mathbf{C}_n(f)$  de ces filtres par la densité spectrale cyclique et la densité spectrale cyclique complémentaire de puissance à la fréquence cyclique 0, notées  $\mathbf{R}_n^{(0)}(f)$  et  $\mathbf{C}_n^{(0)}(f)$ , transformées de Fourier des moyennes temporelles des corrélations et corrélations complémentaires.

5.  $r_n^{(\alpha)}(f)$  et  $c_n^{(\beta)}(f)$  sont respectivement définies comme les transformées de Fourier associées aux coefficients de Fourier  $r_n^{(\alpha)}(\tau)$  et  $c_n^{(\beta)}(\tau)$  des corrélations et corrélations complémentaires  $r_n(t, \tau) = E[n(t + \tau/2)n^*(t - \tau/2)]$  et  $c_n(t, \tau) = E[n(t + \tau/2)n(t - \tau/2)]$  périodiques en  $t$  de période  $T'$ , où nous avons choisi ici leurs définitions symétriques.

#### 4.3.1. Récepteurs MLSE sous hypothèse circulaire

Dans le cas de symboles complexes, la puissance du bruit total en sortie du filtre linéaire adapté  $\mathbf{w}^H(f) = \mathbf{g}^H(f)(\mathbf{R}_n^{(0)}(f))^{-1}(f)$  à l'instant  $kT$  est donné par application de (33) et (34) par  $P_n = \sum_{\alpha} e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_n^{(\alpha)}(f) \mathbf{w}(f - \frac{\alpha}{2}) df$ . Par suite le SINR est donné par l'expression

$$\text{SINR}_y^c = \frac{\mathbb{E}|a_k^2| \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)(\mathbf{R}_n^{(0)}(f))^{-1} \mathbf{g}(f) df \right)^2}{\sum_{\alpha} e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) (\mathbf{R}_n^{(0)}(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{R}_n^{(\alpha)}(f) (\mathbf{R}_n^{(0)}(f - \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) df}. \quad (36)$$

Pour des symboles réels, la puissance du bruit total en sortie du filtrage WL adapté (16) à l'instant  $kT$  est donné par application de (33), (34) et (35) par  $P_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_n^{(\alpha)}(f) \mathbf{w}(f - \frac{\alpha}{2}) df + \frac{1}{2} \text{Re}[\sum_{\beta} e^{i2\pi\beta kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f + \frac{\beta}{2}) \mathbf{C}_n^{(\beta)}(f) \mathbf{w}^*(\frac{\beta}{2} - f) df]$ . Par suite le SINR est donné par

$$\text{SINR}_z^c = \frac{2\mathbb{E}(a_k^2) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)(\mathbf{R}_n^{(0)}(f))^{-1} \mathbf{g}(f) df \right)^2}{\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) (\mathbf{R}_n^{(0)}(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{R}_n^{(\alpha)}(f) (\mathbf{R}_n^{(0)}(f - \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) \\ + \text{Re}[\sum_{\beta} e^{i2\pi\beta kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f + \frac{\beta}{2}) (\mathbf{R}_n^{(0)}(f + \frac{\beta}{2}))^{-1} \mathbf{C}_n^{(\beta)}(f) \\ (\mathbf{R}_n^{(0)*}(\frac{\beta}{2} - f))^{-1} \mathbf{g}^*(\frac{\beta}{2} - f)] df \end{array} \right\}}. \quad (37)$$

Pour des modulations linéaires quasi rectilignes, la puissance du bruit total en sortie du filtrage WL adapté (20) à l'instant  $kT$  est de même donné par application de (33), (34) et (35) par  $P_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_n^{(0)}(f) \mathbf{w}(f - \frac{\alpha}{2}) df + \frac{1}{2} (-1)^k \text{Re}[\sum_{\beta} e^{i2\pi\beta kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f + \frac{\beta}{2}) \mathbf{C}_n^{(0)}(f) \mathbf{w}^*(\frac{\beta}{2} - f) df]$ . Par suite le SINR est donné par

$$\text{SINR}_{z,k}^c = \frac{2\mathbb{E}(b_k^2) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)(\mathbf{R}_n^{(0)}(f))^{-1} \mathbf{g}(f) df \right)^2}{\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) (\mathbf{R}_n^{(0)}(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{R}_n^{(\alpha)}(f) (\mathbf{R}_n^{(0)}(f - \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) \\ + (-1)^k \text{Re}[\sum_{\beta} e^{i2\pi\beta kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f + \frac{\beta}{2}) (\mathbf{R}_n^{(0)}(f + \frac{\beta}{2}))^{-1} \mathbf{C}_n^{(\beta)}(f) \\ (\mathbf{R}_n^{(0)*}(\frac{\beta}{2} - f))^{-1} \mathbf{g}^*(\frac{\beta}{2} - f)] df \end{array} \right\}}. \quad (38)$$

#### 4.3.2. Récepteurs MLSE sous hypothèse non-circulaire

Appliquant (33) et (34) où le bruit total d'entrée est le bruit étendu  $\tilde{\mathbf{n}}(t)$  de fréquences cycliques  $\gamma$ , les puissances du bruit total aux instants  $kT$ , en sortie de filtres adaptés (8), (14) et (19) pour les cas de symboles complexes, réels ou de modulations linéaires quasi rectilignes sont donnés respectivement par  $P_n = \sum_{\gamma} e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H$

$(f + \frac{\gamma}{2})\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f)\mathbf{w}_1(f - \frac{\gamma}{2})df$ ,  $P_n = \sum_{\gamma} e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{w}}^H(f + \frac{\gamma}{2})\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f)\tilde{\mathbf{w}}(f - \frac{\gamma}{2})df$  et  $P_n = \sum_{\gamma} e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f + \frac{\gamma}{2})\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f)\mathbf{w}_{(k)}(f - \frac{\gamma}{2})df$ . Par suite les SINRs en sortie aux instants  $kT$  de ces filtres WL respectifs sont donnés respectivement par

$$\text{SINR}_y^{nc} = \frac{\text{E}|a_k^2|(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f))^{-1}\mathbf{g}_1(f)df)^2}{\sum_{\gamma} e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f + \frac{\gamma}{2})(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f + \frac{\gamma}{2}))^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(\gamma)}(f)(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f - \frac{\gamma}{2}))^{-1}\mathbf{g}_1(f - \frac{\gamma}{2})df}. \quad (39)$$

$$\text{SINR}_z^{nc} = \frac{\text{E}(a_k^2)(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f)(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f))^{-1}\tilde{\mathbf{g}}(f)df)^2}{\sum_{\gamma} e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f + \frac{\gamma}{2})(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f + \frac{\gamma}{2}))^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(\gamma)}(f)(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f - \frac{\gamma}{2}))^{-1}\tilde{\mathbf{g}}(f - \frac{\gamma}{2})df}. \quad (40)$$

et

$$\text{SINR}_{z,k}^{nc} = \frac{\text{E}(b_k^2)(\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)]^H (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f))^{-1} [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)] df)^2}{\left\{ \sum_{\gamma} e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{g}_1(f + \frac{\gamma}{2}) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f + \frac{\gamma}{2})]^H (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f + \frac{\gamma}{2}))^{-1} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(\gamma)}(f) (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f - \frac{\gamma}{2}))^{-1} [\mathbf{g}_1(f - \frac{\gamma}{2}) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f - \frac{\gamma}{2})] df \right\}}. \quad (41)$$

Notons que les interférences QAM ou ASK ou sous forme de modulations linéaires quasi rectilignes sont toutes cyclostationnaires du second ordre, exception faite des modulations QAM ou ASK avec impulsion de mise en forme de type « racine carrée » de Nyquist de roll off égal à 0 qui sont stationnaires du second ordre. Pour des modulations linéaires d'impulsion de mise en forme quelconque et de période symbole quelconque  $T'$ , les fréquences cycliques sont en général  $k/T'$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  pour les modulations QAM ou ASK, alors que pour les modulations linéaires quasi rectilignes, elles sont  $k/T'$  et  $(2k + 1)/2T'$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  respectivement pour les densités spectrales cyclique et cyclique complémentaire.

Dans le cas particulier de filtres de mise en forme de type impulsion « racine carrée » de Nyquist, le nombre de fréquences cycliques contenues dans le bruit total est fini et dépend du roll off  $\alpha_{\text{ro}}$  de cette impulsion. Ainsi les interférences QAM ou ASK ne contiennent que les fréquences cycliques  $-\frac{1}{T}$ , 0 et  $\frac{1}{T}$  pour  $\alpha_{\text{ro}} \neq 0$ . Quant aux interférences sous forme de modulations linéaires quasi rectilignes, elle contiennent les fréquences cycliques  $-\frac{1}{2T}$ , 0,  $\frac{1}{2T}$  pour  $\alpha_{\text{ro}} = 0$ ,  $-\frac{1}{T}$ ,  $-\frac{1}{2T}$ , 0,  $\frac{1}{2T}$  et  $\frac{1}{T}$  pour  $\alpha_{\text{ro}} \in ]0, 1/2[$  et  $-\frac{3}{2T}$ ,  $-\frac{1}{T}$ ,  $-\frac{1}{2T}$ , 0,  $\frac{1}{2T}$ ,  $\frac{1}{T}$  et  $\frac{3}{2T}$  pour  $\alpha_{\text{ro}} \in [1/2, 1]$ . Dans le cas particulier des modulations MSK et GMSK, les fréquences cycliques sont aussi essentiellement  $-\frac{3}{2T}$ ,  $-\frac{1}{T}$ ,  $-\frac{1}{2T}$ , 0,  $\frac{1}{2T}$ ,  $\frac{1}{T}$  et  $\frac{3}{2T}$ . Notons enfin que pour des interférences QAM ou ASK de même période symbole que le SOI,  $e^{i2\pi\alpha kT} = e^{i2\pi\beta kT} = e^{i2\pi\gamma kT} = 1$  dans toutes les expressions des SINRs des sections 4.3.1 et 4.3.2.

## 5. Cas particuliers et illustrations

### 5.1. Hypothèses

Le but de cette section est d'analyser plus finement les performances en SINR des différents récepteurs et de montrer quelques propriétés des structures développées, via l'obtention de formules interprétables pour des canaux invariants et spéculaires en temps pour le SOI et les interférences et pour des sources mises en forme par des filtres de type « racine carrée » de Nyquist en cosinusoides surélevées.

Plus précisément  $v(t)$  sera réelle, d'énergie unité et de roll-off  $\alpha_{\text{ro}}$ . Pour des canaux spéculaires, les réponses fréquentielles des canaux SOI et interférences (respectivement d'amplitudes et de retards  $(\mu_{s_m}, \tau_{s_m})_{m=1, \dots, M_s}$  et  $(\mu_{j_m}, \tau_{j_m})_{m=1, \dots, M_j}$ ) seront respectivement :

$$\mathbf{h}_s(f) = \sum_{m=1}^{M_s} \mu_{s_m} e^{-i2\pi f \tau_{s_m}} \mathbf{h}_{s_m} \quad \text{et} \quad \mathbf{h}_j(f) = \sum_{m=1}^{M_j} \mu_{j_m} e^{-i2\pi f \tau_{j_m}} \mathbf{h}_{j_m},$$

dont les premières composantes des vecteurs directionnels de chaque trajet  $\mathbf{h}_{s,m}$  et  $\mathbf{h}_{j,m}$  sont égales à l'unité. Nous considérerons dans la suite trois scénarios correspondant respectivement à l'absence d'interférence et à la présence d'une interférence rectiligne monotrajét, puis bitrajets.

### 5.2. Cas d'une absence d'interférence

En absence d'interférences où le bruit de fond circulaire est temporellement et spatialement blanc  $\mathbf{R}_n(f) = N_0 \mathbf{I}_N$  et  $\mathbf{R}_{\bar{n}}(f) = N_0 \mathbf{I}_{2N}$  pour  $f \in [-\frac{1}{2T}(1 + \alpha_{\text{ro}}), +\frac{1}{2T}(1 + \alpha_{\text{ro}})]$ . Par suite les formules de SINR circulaires et non-circulaires (26) (29), (27) (30), (28) (31) qui sont ici des SNRs, coïncident et sont données par

$$\text{SNR}_y = \frac{\text{E}[a_k^2]}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}(f)\|^2 df, \quad (42)$$

pour des modulations QAM et par

$$\text{SNR}_z = \frac{2\text{E}(a_k^2)}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}(f)\|^2 df, \quad \text{SNR}_{z,k} = \frac{2\text{E}(b_k^2)}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}(f)\|^2 df, \quad (43)$$

respectivement pour des modulations ASK et linéaires quasi rectilignes. Ces deux SNRs (42) et (43) doubles l'un de l'autre (pour des symboles d'énergies identiques) sont des bornes supérieures ultimes qui permettent d'évaluer la perte de SNR en présence d'interférences. Dans le cas particulier de canaux spéculaires, puisque  $\mathbf{g}(f) = v(f)\mathbf{h}_s(f)$ , nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}(f)\|^2 df = \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{m'=1}^{M_s} \mu_{s_m}^* \mu_{s_{m'}} \mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_{s_{m'}} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(f)|^2 e^{i2\pi f(\tau_{s_m} - \tau_{s_{m'}})} df. \quad (44)$$

Par suite, il y a remise en phase temporelle et spatiale de tous les trajets SOI avant décision. De plus, dans le cas où les différences des retards  $\tau_{s_m} - \tau_{s_{m'}}$  sont tous multiples de la période symbole  $T$ , les SNRs (42) et (43) deviennent chacun la somme des SNRs sur chaque trajet, quel que soit le roll off de  $v(t)$  :

$$\text{SNR}_y = \frac{\mathbb{E}|a_k|^2}{N_0} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2, \quad (45)$$

$$\text{SNR}_z = \frac{2\mathbb{E}(a_k^2)}{N_0} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2, \quad \text{SNR}_{z,k} = \frac{2\mathbb{E}(b_k^2)}{N_0} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2. \quad (46)$$

### 5.3. Cas de la présence d'une interférence rectiligne monotrajét

#### 5.3.1. Performances en terme de SINR

Nous considérons ici le cas où le bruit total est constitué d'une interférence rectiligne (de symboles  $c_k$ ) monotrajét ( $M_j = 1$ ,  $\mu_j \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{j_1}$ ) et de bruit de fond. Pour obtenir des formules interprétables, nous supposons aussi que les différences des retards du SOI  $\tau_{s_m} - \tau_{s_{m'}}$  sont tous multiples de la période symbole  $T$ . De plus nous supposons que les roll-off du SOI et de l'interférence sont nuls, auquel cas le bruit total est alors stationnaire. Sous ces conditions, par application du lemme d'inversion matricielle appliqué à  $\mathbf{R}_n(f)$  et  $\mathbf{R}_{\tilde{n}}(f)$ , les SINRs (26) (29), (27) (30) et (28) (31) deviennent respectivement en présence d'un SOI sous forme d'une modulation QAM, ASK et linéaire quasi rectiligne :

$$\text{SINR}_y^c = \frac{\mathbb{E}|a_k|^2}{N_0} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \left( \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2 - \frac{|\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|^2}{\beta_{n,j} + \|\mathbf{h}_j\|^2} \right), \quad (47)$$

$$\text{SINR}_y^{nc} = \frac{\mathbb{E}|a_k|^2}{N_0} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \left( \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2 - \frac{|\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|^2}{\beta_{n,j} + 2\|\mathbf{h}_j\|^2} \right), \quad (48)$$

$$\text{SINR}_z^c = \frac{\frac{2\mathbb{E}(a_k^2)}{N_0} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \left( \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2 - \frac{|\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|^2}{\beta_{n,j} + \|\mathbf{h}_j\|^2} \right)}{1 + \frac{\beta_{n,j}}{(\beta_{n,j} + \|\mathbf{h}_j\|^2)^2} \frac{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 |\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|^2 \cos(2\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \left( \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2 - \frac{|\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|^2}{\beta_{n,j} + \|\mathbf{h}_j\|^2} \right)}}, \quad (49)$$

$$\text{SINR}_z^{nc} = \frac{2\mathbb{E}(a_k^2)}{N_0} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \left( \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2 - \frac{2|\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|^2 \cos^2(\Delta_{s_m,j})}{\beta_{n,j} + 2\|\mathbf{h}_j\|^2} \right), \quad (50)$$

$$\text{SINR}_{z,k}^c = \frac{\frac{2\mathbb{E}(b_k^2)}{N_0} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \left( \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2 - \frac{|\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|^2}{\beta_{n,j} + \|\mathbf{h}_j\|^2} \right)}{1 + (-1)^k \frac{\beta_{n,j}}{(\beta_{n,j} + \|\mathbf{h}_j\|^2)^2} \frac{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 |\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|^2 \cos(2\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \left( \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2 - \frac{|\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|^2}{\beta_{n,j} + \|\mathbf{h}_j\|^2} \right)}}, \quad (51)$$

$$\text{SINR}_{z,k}^{nc} = \frac{2\text{E}(b_k^2)}{N_0} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \left( \|\mathbf{h}_{s_m}\|^2 - \frac{|\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|^2 (1 + (-1)^k \cos(2\Delta_{s_m,j}))}{\beta_{n,j} + 2\|\mathbf{h}_j\|^2} \right), \quad (52)$$

avec  $\beta_{n,j} \stackrel{\text{def}}{=} N_0[\text{E}(c_k^2)|\mu_j|^2]^{-1}$ ,  $\mu_{s_m} = |\mu_{s_m}|e^{i\phi_{s_m}}$ ,  $\mu_j = |\mu_j|e^{i\phi_j}$ ,  $\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j = |\mathbf{h}_{s_m}^H \mathbf{h}_j|e^{i\phi_{s_m,j}}$  et  $\Delta_{s_m,j} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_j - \phi_{s_m} + \phi_{s_m,j}$ .

Notons que les SINRs (48), (50), (52) des récepteurs MLSE non circulaires sont la somme des SINRs de chaque trajet SOI, contrairement aux SINR (49), (51) des récepteurs MLSE circulaires pour modulations ASK et linéaire quasi rectiligne. Cela est dû au fait que les filtres adaptés des récepteurs MLSE circulaires ne sont plus adaptés en présence de bruit non-circulaire. Mais dans le cas de symboles complexes, puisque le SINR obtenu (47) par le récepteur MLSE circulaire en présence de bruit non-circulaire ne dépend pas de la non-circularité du bruit, la désadaptation du filtre adapté conserve l'additivité des SINRs des différents trajets. Nous constatons que tous ces SINRs, qui ne dépendent pas du retard  $\tau_j \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{j,1}$  de l'interférence (ce qui est naturel puisque celle-ci est stationnaire) sont dégradés par rapport aux références (45), (46). Cette dégradation dépend de la différence angulaire entre le vecteur directionnel de l'interférence et ceux des différents trajets du SOI et de plus des différentes phases du SOI et de l'interférence pour les récepteurs MLSE pour modulations ASK et linéaire quasi rectiligne.

Pour un seul capteur ( $N = 1$ ) et pour une interférence très puissante par rapport au bruit de fond ( $|\mu_j|^2 \gg N_0$ ), les SINRs (47), (48), (49), (50), (51) et (52) des récepteurs MLSE circulaires et non-circulaires deviennent alors

$$\text{SINR}_y^c \approx \frac{\text{E}|a_k^2|}{\text{E}(c_k^2)|\mu_j|^2} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \ll \text{SNR}_y, \quad (53)$$

$$\text{SINR}_y^{nc} \approx \frac{1}{2} \text{SNR}_y, \quad (54)$$

$$\text{SINR}_z^c \approx \frac{\frac{2\text{E}(a_k^2)}{\text{E}(c_k^2)|\mu_j|^2} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2}{1 + \frac{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \cos(2\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2}} \ll \text{SNR}_z, \quad (55)$$

$$\text{SINR}_z^{nc} \approx \text{SNR}_z \frac{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \sin^2(\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2}, \quad (56)$$

$$\text{SINR}_{z,k}^c \approx \frac{\frac{2\text{E}(a_k^2)}{\text{E}(c_k^2)|\mu_j|^2} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2}{1 + (-1)^k \frac{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \cos 2\Delta_{s_m,j}}{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2}} \ll \text{SNR}_z, \quad (57)$$

$$\text{SINR}_{z,k}^{nc} \approx \text{SNR}_z \frac{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \sin^2(\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2} \text{ pour } k \text{ pair}, \quad (58)$$

$$\approx \text{SNR}_z \frac{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \cos^2(\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2} \text{ pour } k \text{ impair}, \quad (59)$$

où ici  $\Delta_{s_m,j} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_j - \phi_{s_m}$  et où les valeurs de  $\text{SNR}_y$  et  $\text{SNR}_z$  sont données respectivement par (45) et (46). Nous vérifions que le SINR ne converge pas vers zéro lorsque  $|\mu_j|^2/N_0 \rightarrow \infty$  (appelé effet SAIC) pour les récepteurs MLSE non-circulaires pour SOI rectiligne (56) lorsque au moins un des trajets  $m$  SOI vérifie  $\Delta_{s_m,j} \neq 0$ , et pour SOI quasi rectiligne (57) lorsque au moins un des trajets  $m$  SOI vérifie  $\Delta_{s_m,j} \neq 0$  et  $\Delta_{s_m,j} \neq \pi/2$ .

Par contre, nous démontrons ici que l'effet SAIC semble se maintenir pour des constellations SOI complexes (54) avec un SINR limite qui ne dépend pas des valeurs des phases différentielles  $\Delta_{s_m,j}$ . En fait, contrairement aux constellations rectilignes et quasi rectilignes, le SINR sur symbole courant n'est pas un critère de performance pertinent pour les constellations complexes car la composante  $a_k^*$  n'est pas intégrée dans la partie interférence du SINR (24). Nous montrerons dans la section 5.3.2 que les performances en terme de probabilité d'erreur symbole dépendront des déphasages  $\Delta_{s_m,j}$  et deviennent très mauvaises pour  $|\mu_j|^2/N_0 \rightarrow \infty$ .

Bien que nous ne disposions pas de formules interprétables dans le cas général d'impulsions  $v(t)$  et de retards différentiels  $\tau_{s_m} - \tau_{s_{m'}}$  quelconques, cet effet SAIC se maintient dans ces situations. En particulier, lorsque le SOI est une modulation linéaire quasi rectiligne quelconque, nous avons obtenu la relation suivante pour une interférence forte ( $|\mu_j|^2 \gg N_0$ ) en présence de trajets SOI où  $\mu_{s_m}$  sont réels :

$$\frac{\text{SINR}_{z,k}^{nc}}{\text{SINR}_{z,k}^c} \approx 1 + \frac{|\mu_j|^2}{N_0} \sin^2(2\phi_j). \quad (60)$$

Ce rapport ne dépend ni de l'instant  $kT$ , ni du canal SOI, ni de l'impulsion SOI, donc du type de modulation linéaire quasi rectiligne, contrairement aux expressions  $\text{SINR}_{z,k}^{nc}$  et  $\text{SINR}_{z,k}^c$  qui en dépendent fortement. Au vu de la dépendance forte de ces SINR par rapport à la parité de  $k$ , nous conjecturons que les performances en probabilité d'erreur en sortie de l'algorithme de Viterbi seront fonction des valeurs  $\min_k(\text{SINR}_{z,k}^{nc})$  et  $\min_k(\text{SINR}_{z,k}^c)$ .

Pour illustrer la robustesse de l'effet SAIC par rapport aux hypothèses qui nous ont permis d'obtenir les formules interprétables précédentes des différents SINR, nous considérons dans la figure 5 que le SOI est une modulation GMSK et l'interférence une modulation BPSK. Cette figure compare pour  $M_s = 2$ , l'évolution des valeurs minimales de  $\text{SINR}_{z,k}^{nc}$  et de  $\text{SINR}_{z,k}^c$  par rapport à la parité de  $k$ , moyennées par rapport à  $\phi_j$ ,  $\phi_{s_1}$  et à  $\phi_{s_2}$  uniformément réparties dans  $[0, 2\pi]$  comme fonction de  $|\mu_j|^2/N_0$ , pour  $\tau_{s_1} = 0$ ,  $\tau_{s_2} = T/2$ ,  $|\mu_{s_1}|^2/N_0 = 10$  et  $|\mu_{s_2}|^2/|\mu_{s_1}|^2 = 0,5$ .

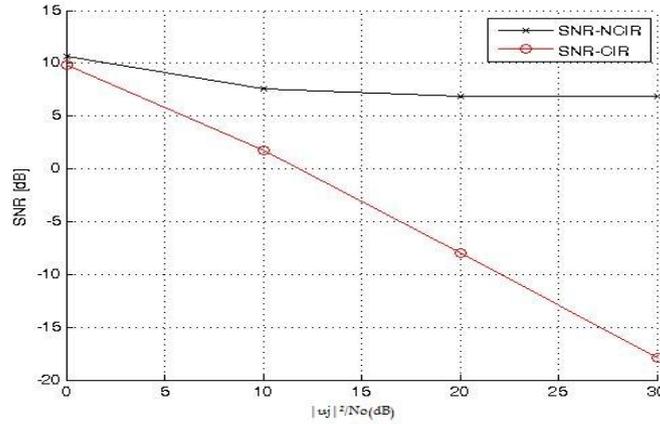


Figure 5. Moyenne de  $\min_k(\text{SNR}_{z,k}^{nc})$  et  $\min_k(\text{SNR}_{z,k}^c)$  par rapport à  $\phi_j$ ,  $\phi_{s_1}$  et à  $\phi_{s_2}$  comme fonction de  $|\mu_j|^2/N_0$

Cette figure montre clairement que les conclusions de la formule interprétable (60) s'étendent à des conditions plus larges que celles que nous avons introduites pour obtenir cette simple relation. Le récepteur MLSE présenté est très peu sensible à l'augmentation de la puissance de l'interférence co-canal contrairement au récepteur MLSE traditionnel, pour lequel le SINR se dégrade fortement.

### 5.3.2. Performances en terme de probabilité d'erreur

Mais le véritable critère de performance est la probabilité d'erreur en sortie du détecteur de Viterbi. Les deux tableaux suivants présentent les taux d'erreur symbole (SER) obtenus (mesurés avec 400 erreurs) pour les récepteurs MLSE non-circulaires dans des conditions de monotrajet SOI et interférence avec les paramètres suivants :  $N = 1$ ,  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_j = T$ ,  $\phi_s = 0$ ,  $\Delta_{s,j} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_j = \phi_s = 0, \pi/4$  ou  $\pi/2$ ,  $|\mu_s|^2/N_0 = 3, 6, 7$  ou  $9\text{dB}$  et roll off  $\alpha_{\text{ro}} = 0,3$  pour différentes valeurs d'INR  $|\mu_j|^2/N_0$  pour des scénarios où le SOI est QPSK ou BPSK avec une interférence BPSK. Ce récepteur de Viterbi a été mise en oeuvre avec une troncature des termes  $r_k$  et  $r'_k$  telles que leurs valeurs relatives par rapport aux termes  $r_0$  et  $r'_0$  sont inférieures à 2 %, soit pour des valeurs de  $L_i$  de 2 à 4 selon les récepteurs et configuration d'interférence.

Tableau 1. Taux d'erreur symbole pour SOI QPSK ( $|\mu_s|^2/N_0 = 9\text{dB}$ ) et interférence BPSK

$ \mu_j ^2/N_0$ (dB)	0	5	10	15	20
SER pour ( $\Delta_{s,j} = 0$ )	0,0012	0,070	0,17	0,20	0,24
SER pour ( $\Delta_{s,j} = \pi/2$ )	0,0012	0,071	0,16	0,22	0,23
SER pour ( $\Delta_{s,j} = \pi/4$ )	0,04	0,25	0,37	0,46	0,48

Nous voyons sur ce tableau que contrairement au comportement du SINR (54) qui semblait prouver l'effet SAIC, le récepteur MLSE non-circulaire ne réalise pas en fait l'effet SAIC. De plus le SER pour interférence puissante dépend du déphasage  $\Delta_{s,j}$  (les déphasages 0 et  $\pi/2$  étant équivalents) et tend vers 1/4 pour  $\Delta_{s,j} = 0$  et 1/2 pour  $\Delta_{s,j} = \pi/4$ .

Tableau 2. Taux d'erreur binaire pour SOI BPSK et interférence BPSK

$ \mu_j ^2/N_0$ (dB)	0	5	10	15	20
BER pour $ \mu_s ^2/N_0 = 7\text{dB}$ et $\Delta_{s,j} = 0$	0,0020	0,12	0,29	0,52	0,51
BER pour $ \mu_s ^2/N_0 = 6\text{dB}$ et $\Delta_{s,j} = \pi/4$	4,8e-06	5,0e-05	6,1e-05	4,3e-05	3,6e-05
BER pour $ \mu_s ^2/N_0 = 3\text{dB}$ et $\Delta_{s,j} = \pi/2$	3,2e-05	3,2e-05	3,2e-05	3,2e-05	3,2e-05

Ce tableau nous montre que l'effet SAIC pressenti par le comportement du SINR pour interférence puissante de déphasage  $\Delta_{s,j} \neq 0$  (56) est confirmé par celui du SER. Par ailleurs pour  $\Delta_{s,j} = 0$ , nous observons que le SER tend vers 1/2 pour interférence puissante. De plus, nous remarquons que pour le déphasage  $\Delta_{s,j} = \pi/2$ , le SER est celui obtenu sans interférence quelle que soit sa puissance. Tous ces résultats sont conformes à l'interprétation géométrique donnée dans (Chevalier, Pipon, 2006).

#### 5.4. Cas de la présence d'une interférence rectiligne bitrajets

On suppose ici que le SOI est monotrajets ( $M_s = 1$ ,  $\mu_s \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{s_1}$ ) et que le bruit total est constitué d'une interférence rectiligne bi-trajets et de bruit de fond. Les roll-off du SOI et de l'interférence sont nuls, auquel cas le bruit total est toujours stationnaire.

##### 5.4.1. Performances en terme de SINR

Pour obtenir des formules interprétables du SINR, nous supposons que la différence des retards des deux trajets de l'interférence vaut  $T$  ( $\tau_{j_2} - \tau_{j_1} = T$ ). De plus nous supposons, que dans le cas de plusieurs capteurs ( $N > 1$ ), les vecteurs directionnels des deux trajets interférence sont orthogonaux ( $\mathbf{h}_{j_2}^H \mathbf{h}_{j_1} = 0$ ) et dans le cas d'un seul capteur ( $N = 1$ ), la phase différentielle des trajets interférents est égale à  $\pi/2$  ( $\phi_{j_2} - \phi_{j_1} = \pi/2$ ). Sous ces conditions, par application du lemme d'inversion matricielle appliqué à  $\mathbf{R}_n(f)$  et  $\mathbf{R}_{\tilde{n}}(f)$ , les SINRs (29), (30) et (31) des récepteurs MLSE non-circulaires deviennent respectivement en présence d'un SOI sous forme d'une modulation QAM, ASK et linéaire quasi rectiligne :

$$\text{SINR}_y^{nc} = \frac{\text{E}[a_k^2]}{N_0} |\mu_s|^2 \left( \|\mathbf{h}_s\|^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + 2(|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|)} \right) \quad (61)$$

$$\text{SINR}_z^{nc} = \frac{2\text{E}(a_k^2)}{N_0} |\mu_s|^2 \left( \|\mathbf{h}_s\|^2 - \frac{2(|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 \cos^2(\Delta\phi_{s,j_1}) + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2 \cos^2(\Delta\phi_{s,j_2}))}{\beta_n + 2(|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|)} \right) \quad (62)$$

$$\text{SINR}_{z,k}^{nc} = \frac{2\text{E}(b_k^2)}{N_0} |\mu_s|^2 \left( \|\mathbf{h}_s\|^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 (1 + (-1)^k \cos(2\Delta\phi_{s,j_1})) + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2 (1 + (-1)^k \cos(2\Delta\phi_{s,j_2}))}{\beta_n + 2(|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|)} \right) \quad (63)$$

avec  $\beta_n \stackrel{\text{def}}{=} N_0[\text{E}(c_k^2)]^{-1}$ . Pour les récepteurs MLSE circulaires, l'orthogonalité des vecteurs directionnels (pour  $N > 1$ ) des deux trajets interférents nous permet d'obtenir les formules interprétables suivantes des SINRs (26), (27) et (28) :

$$\text{SINR}_y^c = \frac{\text{E}|a_k^2|}{N_0} |\mu_s|^2 \left( \|\mathbf{h}_s\|^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + 2(|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|)} \right) \quad (64)$$

$$\text{SINR}_z^c = \frac{2\text{E}(a_k^2)}{N_0} |\mu_s|^2 \left( \|\mathbf{h}_s\|^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + |\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2} \right) \frac{1 + \frac{\beta_n}{(\beta_n + |\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2)^2} \times \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 \cos(2\Delta_{s,j_1}) + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2 \cos(2\Delta_{s,j_2})}{\|\mathbf{h}_s\|^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + (|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|)}}}{\|\mathbf{h}_s\|^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + (|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|)}}}, \quad (65)$$

$$\text{SINR}_{z,k}^c = \frac{2\text{E}(a_k^2)}{N_0} |\mu_s|^2 \left( \|\mathbf{h}_s\|^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + |\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2} \right) \frac{1 + (-1)^k \frac{\beta_n}{(\beta_n + |\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2)^2} \times \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 \cos(2\Delta_{s,j_1}) + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2 \cos(2\Delta_{s,j_2})}{\|\mathbf{h}_s\|^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + (|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|)}}}{\|\mathbf{h}_s\|^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + (|\mu_{j_1}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\mathbf{h}_s^H \mathbf{h}_{j_2}|)}}}. \quad (66)$$

Notons que même sous l'hypothèse de phase différentielle égale à  $\pi/2$  pour les deux trajets interférences, les expressions des SINRs des récepteurs MLSE circulaire contiennent une intégrale dans le cas monocapteur ( $N = 1$ ) y compris pour une interférence très puissance par rapport au bruit de fond ( $|\mu_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 \gg N_0$ ). Cela entraîne des expressions analytiques plus lourdes des SINRs. Par exemple, pour le récepteur MLSE circulaire en présence de SOI sous forme de modulation QAM nous avons

$$\text{SINR}_y^c = \frac{\text{E}|a_k^2|}{\text{E}(c_k^2) |\mu_{j_1}| |\mu_{j_2}|} |\mu_s|^2 g \left( \frac{1}{2} \left( \beta_{n,j} + s + \frac{1}{s} \right) \right)$$

avec  $\beta_{n,j} \stackrel{\text{def}}{=} N_0[\text{E}(c_k^2) |\mu_{j_1}| |\mu_{j_2}|]^{-1}$  et  $g(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi \sqrt{a^2 - 1}} \arctan\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\right)$  où  $s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mu_{j_2}|}{|\mu_{j_1}|}$  est la sélectivité du canal interférent, auquel cas  $\text{SINR}_y^c \ll \text{SNR}_y$  pour

$|\mu_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 \gg N_0$ . Dans ce dernier cas, nous constatons l'effet SAIC pour les trois récepteurs MLSE non-circulaires, puisque les SINRs (61), (62) et (63) deviennent :

$$\text{SINR}_y^{nc} \approx \frac{1}{2} \text{SNR}_y, \quad (67)$$

$$\text{SINR}_z^{nc} \approx \text{SNR}_z \left( \frac{\sin^2(\Delta_{s,j_1}) + s^2 \sin^2(\Delta_{s,j_2})}{1 + s^2} \right), \quad (68)$$

$$\text{SINR}_{z,k}^{nc} \approx \text{SNR}_z \left( \frac{\sin^2(\Delta_{s,j_1}) + s^2 \sin^2(\Delta_{s,j_2})}{1 + s^2} \right) \text{ pour } k \text{ pair}, \quad (69)$$

$$\approx \text{SNR}_z \left( \frac{\cos^2(\Delta_{s,j_1}) + s^2 \cos^2(\Delta_{s,j_2})}{1 + s^2} \right) \text{ pour } k \text{ impair}. \quad (70)$$

Nous constatons donc que l'effet SAIC se maintient pour une interférence rectiligne à deux trajets, mais cet effet dépend non seulement des phases différentielles entre le trajet SOI et les deux trajets interférents, mais aussi de la sélectivité de ce canal interférent. Naturellement, nous retrouvons dans le cas d'un seul trajet la relation

$$\text{SINR}_z^{nc} \approx \text{SNR}_z \sin^2(\Delta\phi_{s,j_1}) = \frac{2\text{E}(a_k^2)|\mu_s|^2}{N_0} \sin^2(\Delta\phi_{s,j_1})$$

dérivée dans (Chevalier, Picon, 2006) pour le cas d'un SOI et d'une interférence co-canal rectilignes de même impulsion en « racine carrée » de Nyquist de roll off quelconque dont les monotrjets sont synchronisés et dont le récepteur MLSE sous hypothèse de bruit non-circulaire se réduit à une simple détection symbole à symbole derrière le filtre adapté.

Cet effet SAIC en présence de deux trajets interférents est illustré dans les quatre figures suivantes pour une modulation BPSK pour le SOI et l'interférence dans lesquelles nous testons la robustesse de cet effet SAIC par rapport aux hypothèses simplificatrices qui nous ont permis d'obtenir la formule interprétable (68). Ainsi les figures 6, 7, 8 et 9 comparent les valeurs numériques des SINRs du récepteur MLSE non-circulaire et récepteur MLSE circulaire dans les conditions nominales suivantes  $N = 1$ ,  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_{j_1} = 0$ ,  $\tau_{j_2} = T$ ,  $\phi_s = 0$ ,  $\phi_{j_1} = \pi/4$ ,  $\phi_{j_2} = 3\pi/4$ ,  $|\mu_s|^2/N_0 = 10$ ,  $|\mu_{j_1}|^2/N_0 = 10$ ,  $s^2 = 0,5$  et roll off  $\alpha_{ro} = 0$  en fonction respectivement du seul paramètre  $\alpha_{ro}$ ,  $\phi_{j_2}$ ,  $\tau_{j_2}/T$  et  $|\mu_{j_1}|^2/N_0$ .

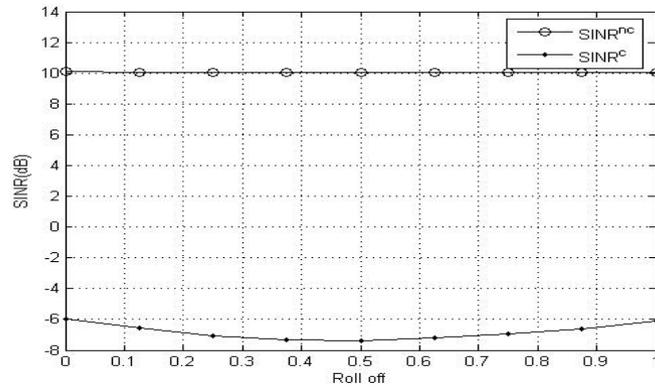


Figure 6.  $SINR_{z,k}^{nc}$  et  $SINR_{z,k}^c$  comme fonction du roll off  $\alpha_{ro}$

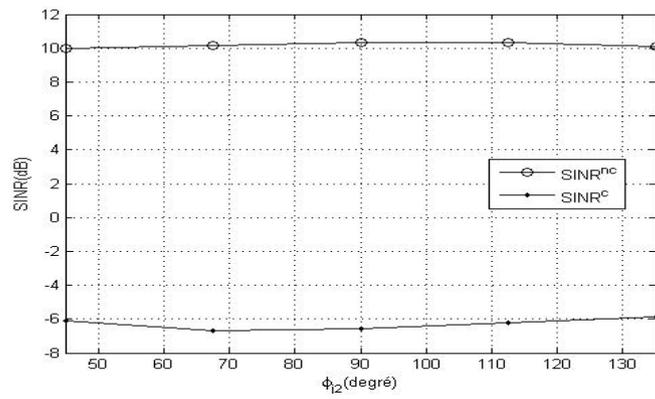


Figure 7.  $SINR_{z,k}^{nc}$  et  $SINR_{z,k}^c$  comme fonction de la phase du deuxième trajet interférence  $\phi_{j_2}$

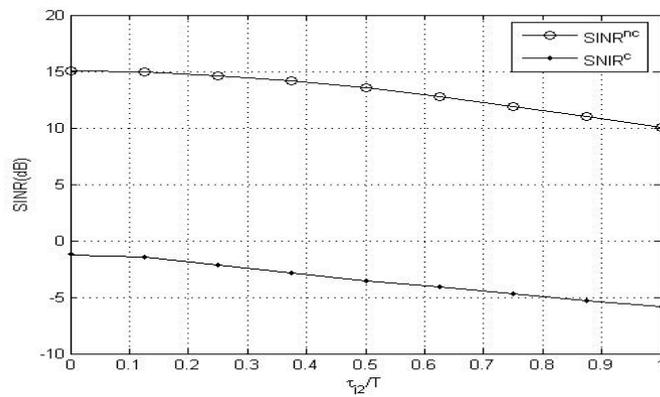


Figure 8.  $SINR_{z,k}^{nc}$  et  $SINR_{z,k}^c$  comme fonction du retard du deuxième trajet interférence  $\tau_{j_2}$

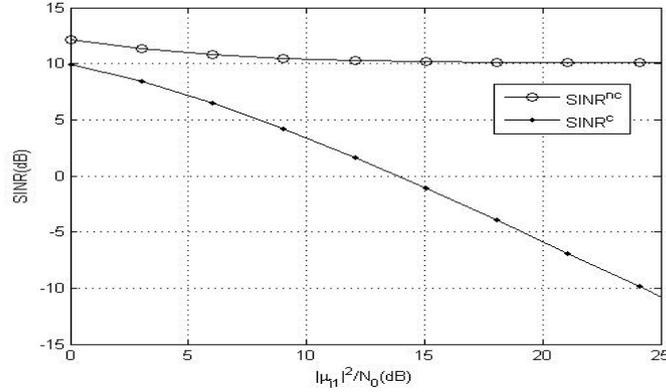


Figure 9.  $\text{SINR}_{z,k}^{nc}$  et  $\text{SINR}_{z,k}^c$  comme fonction du rapport INR  $|\mu_{j_1}|^2/N_0$

Ces figures montrent clairement la robustesse du récepteur MLSE non-circulaire par rapport aux hypothèses simplificatrices, en particulier par rapport à l'hypothèse de stationnarité qui n'est valide que pour un roll off nul. Elles montrent ainsi que l'effet SAIC se maintient dans des configurations très générales en cas d'un bi-trajet interférence.

#### 5.4.2. Performances en terme de probabilité d'erreur

Les tableaux suivants présentent les taux d'erreur symbole (SER) obtenus (mesurés avec 400 erreurs) pour les récepteurs MLSE non-circulaire et MLSE circulaire dans des conditions de monotrajét SOI et bi-trajét interférence avec les paramètres suivants :  $N = 1$ ,  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_{j_1} = 0$ ,  $\tau_{j_2} = T$ ,  $\phi_s = 0$ ,  $\phi_{j_1} = \pi/4$ ,  $\phi_{j_2} = 3\pi/4$ ,  $|\mu_s|^2/N_0 = 9\text{dB}$ ,  $s^2 = 0,5$  et roll off  $\alpha_{\text{TO}} = 0,3$  pour différentes valeurs d'INR  $|\mu_{j_1}|^2/N_0$  pour des scénarios où le SOI est BPSK, QPSK ou GMSK avec une interférence BPSK. Ce récepteur de Viterbi a été mise en oeuvre avec une troncature des termes  $r_k$ ,  $r'_k$  et  $r'_{d,k}$  telles que leurs valeurs relatives par rapport aux termes  $r_0$ ,  $r'_0$  et  $r'_{d,0}$  sont inférieures à 2 %, soit pour des valeurs de  $L_i$  de 2 à 4 selon les récepteurs et configuration d'interférence.

Tableau 3. Taux d'erreur symbole pour SOI et interférence BPSK

$ \mu_{j_1} ^2/N_0$ (dB)	3	5	10	15	20
SER réc. MLSE circulaire	0,025	0,073	0,27	0,41	0,50
SER réc. MLSE non-circulaire	6,3e-05	3,0e-04	0,0021	0,0064	0,0082

Tableau 4. Taux d'erreur symbole pour SOI QPSK et interférence BPSK.

$ \mu_{j_1} ^2/N_0$ (dB)	0	3	5	10	15	20
SER réc. MLSE circulaire	0,0030	0,069	0,20	0,50	0,61	0,72
SER réc. MLSE non-circulaire	0,0020	0,018	0,035	0,095	0,11	0,12

Tableau 5. Taux d'erreur symbole pour SOI GMSK et interférence BPSK

$ \mu_{j_1} ^2/N_0$ (dB)	0	3	5	10	15	20
SER réc. MLSE circulaire	0,0071	0,053	0,11	0,24	0,33	0,47
SER réc. MLSE non-circulaire	0,0070	0,046	0,078	0,12	0,16	0,14

Nous voyons d'après ces tableaux que l'effet SAIC se maintient dans notre configuration de bitrajet interférence en présence d'une interférence non stationnaire BPSK pour un SOI BPSK, QPSK et GMSK pour notre récepteur MLSE non-circulaire, contrairement au récepteur MLSE traditionnel circulaire.

En revanche bien qu'améliorant légèrement les performances par rapport au récepteur MLSE traditionnel circulaire, le récepteur MLSE non-circulaire ne parvient pas à réaliser l'effet SAIC dans la configuration où l'interférence est une modulation quasirectiligne comme le montre le tableau suivant avec un SOI et une interférence GMSK.

Tableau 6. Taux d'erreur symbole pour SOI et interférence GMSK

$ \mu_{j_1} ^2/N_0$ (dB)	0	3	5	10	15	20
SER réc. MLSE circulaire	0,097	0,16	0,22	0,27	0,37	0,42
SER réc. MLSE non-circulaire	0,020	0,090	0,14	0,27	0,35	0,41

## 6. Conclusion

Le récepteur SIMO MLSE optimal pour la démodulation d'une séquence finie de symboles, modulés linéairement, en présence d'interférences entre symboles et d'interférences co-canal potentiellement non-circulaires au second ordre a été présenté sous l'hypothèse (simplificatrice) d'un bruit total centré, stationnaire, gaussien et non-circulaire. Pour des symboles aussi bien complexes que réels, le récepteur MLSE développé est constitué d'un filtre adapté ST WL qui maximise le SINR sur le symbole courant, d'un échantillonneur au rythme symbole et d'un organe de décision qui implémente une version étendue de l'algorithme de Viterbi. Cette structure du récepteur MLSE reste valable pour des modulations quasi rectilignes moyennant un traitement de post-rotation. Le SINR sur le symbole courant en sortie de ce récepteur MLSE a été calculé et comparé à celui du récepteur MLSE conventionnel pour des signaux d'intérêts à constellation complexe, réelle et quasi rectiligne en présence d'interférences non-circulaires au second ordre aussi bien stationnaires que cyclostationnaires. Une analyse paramétrique de ce SINR a été présentée pour différents scénarios d'interférences via l'obtention de formules interprétables pour ce SINR. En dépit du fait qu'en pratique, les interférences co-canal sont généralement cyclostationnaires et non gaussiennes, le récepteur MLSE proposé, qui n'exploite aucune de ces deux propriétés

statistiques, présente de meilleures performances que les récepteurs conventionnels pour ce type d'interférences dès qu'elles sont non-circulaires au second ordre. En particulier, en présence d'un SOI de modulation linéaire à symboles complexes, rectiligne ou quasi rectiligne, le récepteur proposé permet l'annulation d'une interférence rectiligne à partir d'une seule antenne et étend ainsi aux canaux sélectifs en fréquence le concept SAIC présenté il y a quelques années pour seulement des canaux sans interférence entre symboles pour un SOI rectiligne ou quasi rectiligne.

Les problèmes de mise en œuvre opérationnelle de ce récepteur feront l'objet d'un prochain article en particulier dans le contexte des réseaux cellulaires de radiocommunications utilisant des modulations complexes, rectilignes ou quasi rectilignes dans une perspective d'applications aux réseaux utilisant les modulations OQAM, aux réseaux GSM et à ses extensions telles que les réseaux MUROS/VAMOS standardisés tout récemment (MUROS, 2009a ; 2009b). Enfin, notons que le récepteur SIMO MLSE que nous avons dérivé sous l'hypothèse de bruit total stationnaire, s'il permet de réaliser l'effet SAIC pour une interférence rectiligne co-canal multitrajet non stationnaire, ne permet pas de le réaliser en présence d'une interférence co-canal quasi rectiligne. Un récepteur SIMO quasi-MLSE sera présenté également dans un prochain article pour traiter plus efficacement de telles interférences permettant de réaliser l'effet SAIC dans un contexte quasirectiligne.

## Bibliographie

- Bottomley G., Chennakeshu S. (1998, April). Unification of MLSE receivers and extension to time-varying channels. *IEEE Trans. on Commu.*, vol. 46, n° 4, p. 464-472.
- Chavali V. G. (2012). *Signal detection and modulation classification in non-gaussian noise environments*. Thèse de doctorat non publiée, Blacksburg, Virginia.
- Chevalier P., Pipon F. (2006, March). New insights into optimal widely linear array receivers for the demodulation of BPSK, MSK and GMSK signals corrupted by noncircular interferences - application to SAIC. *IEEE Trans. Signal Proces.*, vol. 54, n° 3.
- Feinstein J., Shamash Y. (1977, July). Spectral factorization of a rational matrix. *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 23, n° 4, p. 534-538.
- Forney G. (1972, May). Maximum-likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interferences. *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 18, n° 3, p. 363-378.
- Forster P., Asté T., Fety L. (1998). Multisensors receivers using a filtered reference: application to GSM. In *Proc. of IEEE international conference on universal personal communications*. Florence, Italy.
- Gardner W., Napolitano A., Paura L. (2006). Review cyclostationarity: half a century of research. *Signal Processing*, vol. 86, p. 639-697.
- Kassam S. A., Thomas J. B. (1988). *Signal detection in non-gaussian noiseseries*. Springer Texts in Electrical Engineering.
- Lindskog E. (1997). Multi-channel maximum likelihood sequence estimation. In *Proc. of IEEE vehicular technology conference*. Phoenix, Arizona.

- Meyer R., Gerstacker W., Schober R., Huber J. (2006). A single antenna interference cancellation algorithm for increased GSM capacity. *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 5, n° 7, p. 1616-1621.
- Modestino J., Eyuboglu V. (1986, March). Integrated multielement receiver structures for spatially distributed interference channels. *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 32, n° 2, p. 195-219.
- MUROS. (2009a). *3GPP TSG Geran Tdoc GP-090114 MUROS uplink receiver performance*. Valetta, Malta, ST-NXP Wireless France, Com-Research, GERAN no 41.
- MUROS. (2009b). *3GPP TSG Geran Tdoc GP-090115 MUROS downlink receiver performance for interference and sensitivity*. Valetta, Malta, ST-NXP Wireless France, Com-Research, GERAN no 41.
- Olivier J., Kleynhans W. (2007). Single antenna interference cancellation for synchronized GSM networks using widely linear receiver. *IET Communications*, vol. 1, n° 1, p. 131-136.
- Picinbono B. (1994, December). On circularity. *IEEE-SP*, vol. 42, n° 12, p. 3473-3482.
- Picinbono B., Chevalier P. (1995, August). Widely linear estimation with complex data. *IEEE-SP*, vol. 43, n° 8, p. 2030-2033.
- Proakis J. (2001). *Digital communications* (4th Edition éd.). McGraw Hill Series in Electrical and Computer Engineering.
- Sallem S., Delmas J. P., Chevalier P. (2012). Optimal SIMO MLSE receivers for the detection of linear modulation corrupted by noncircular interference. In *Proc. of IEEE workshop on statistical signal processing (SSP)*. Ann Arbor, Michigan.
- Trigui H., Slock D. (1998, October). Cochannel interference cancellation within the current GSM standard. In *Proc. of int. conf. universal personal communications*, p. 511-515. Florence, Italy.
- Trigui H., Slock D. (2000, July). Performance bounds for cochannel interference cancellation within the current GSM standard. *Signal Processing*, vol. 80, n° 7, p. 1335-1346.
- Ungerboeck G. (1974, May). Adaptive maximum likelihood receiver for carrier-modulated data transmission systems. *IEEE Trans. on Commu.*, vol. 22, n° 5, p. 624-636.
- VanTrees H. (1968). *Detection, estimation and modulation theory, part 1*. New York: John Wiley and Sons.
- Vila P., Picon F., Pirez D., Fety L. (1994). MLSE antenna diversity equalization of a jammed frequency selective fading channel. In *European signal processing conference (EUSIPCO)*. Edinburgh, Scotland.
- Wozencraft J., Jacobs I. (1965). *Principles of communications engineering*. New York: Wiley.

Article soumis le 25/2/2013

Accepté le 8/01/2014

## 7. Annexe

Nous allons étendre le célèbre théorème de factorisation spectrale aux processus à temps continu complexes  $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^N$  stationnaires au sens large (WSS)<sup>6</sup> non nécessairement circulaires du second ordre. Pour cela, considérons le processus réel associé  $\bar{\mathbf{n}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\text{Re}(\mathbf{n}^T(t)), \text{Im}(\mathbf{n}^T(t))]^T$  et le processus complexe étendu  $\tilde{\mathbf{n}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{n}^T(t), \mathbf{n}^H(t)]^T$  reliés par

$$\tilde{\mathbf{n}}(t) = \mathbf{T}\bar{\mathbf{n}}(t) \text{ et } \bar{\mathbf{n}}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{T}^H\tilde{\mathbf{n}}(t) \text{ avec } \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & i\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -i\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Sous des hypothèses où le théorème de factorisation spectrale s'applique au processus réel à temps continu<sup>7</sup>  $\bar{\mathbf{n}}(t)$ , il existe une fonction de transfert causale et inversiblement causale  $\mathbf{G}(f) \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$  telle que  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{n}}}(f) = \mathbf{G}(f)\mathbf{G}^H(f)$  avec  $\mathbf{G}^*(f) = \mathbf{G}(-f)$ . En conséquence  $\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{n}}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}^{-1}(f)$  satisfait

$$\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{n}}}(f)\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{n}}}(f)\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{n}}}^H(f) = \mathbf{I}_{2N} \text{ et } \mathbf{W}_{\bar{\mathbf{n}}}^*(f) = \mathbf{W}_{\bar{\mathbf{n}}}(-f). \quad (72)$$

Puis utilisant la relation (71),  $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f) = \frac{1}{4}\mathbf{T}^H\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{n}}}(f)\mathbf{T}$ , nous obtenons

$$\mathbf{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f)\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f)\mathbf{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}^H(f) = \mathbf{I}_{2N}, \quad (73)$$

où  $\mathbf{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{T}\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{n}}}(f)\mathbf{T}^H$  a la structure

$$\mathbf{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(f) & \mathbf{W}_2(f) \\ \mathbf{W}_2^*(-f) & \mathbf{W}_1^*(-f) \end{bmatrix} \quad (74)$$

grâce à (72). Sa transformée de Fourier inverse  $\mathbf{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}(t)$  a la structure

$$\mathbf{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(t) & \mathbf{W}_2(t) \\ \mathbf{W}_2^*(t) & \mathbf{W}_1^*(t) \end{bmatrix}$$

et en conséquence d'après (73)  $\mathbf{n}_w(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}_1(t) \star \mathbf{n}(t) + \mathbf{W}_2(t) \star \mathbf{n}^*(t)$  est à la fois circulaire du second ordre et spatialement et temporellement blanc. ■

6. C'est-à-dire où le processus conjoint associé  $(\text{Re}(\mathbf{n}(t)), \text{Im}(\mathbf{n}(t)))$  est WSS.

7. C'est en particulier le cas quand la matrice de densité spectrale de puissance  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{n}}}(f)$  est une fraction rationnelle en  $e^{i2\pi f}$  pour laquelle  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{n}}}(f)$  est inversible pour toute valeur de  $f$ , voir en particulier (Feinstein, Shamash, 1977).

