
Une méthode MUSIC adaptée aux grands réseaux de capteurs

Pascal Vallet¹, Philippe Loubaton², Xavier Mestre³

1. Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (CNRS, Univ. Bordeaux, Bordeaux INP), 351 Cours de la Libération 33405 Talence (France)

pascal.vallet@bordeaux-inp.fr

2. Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge (CNRS, Université Paris-Est/MLV), 5 Bd. Descartes 77454 Marne-la-Vallée (France)

loubaton@univ-mlv.fr

3. Centre Tecnològic de Telecomunicacions de Catalunya (CTTC), Av. Carl Friedrich Gauss 08860 Castelldefels, Barcelona (Spain)

xavier.mestre@cttc.cat

RÉSUMÉ. Dans le cadre de l'estimation d'angles d'arrivée en traitement d'antenne, nous synthétisons quelques travaux récents portant sur un estimateur MUSIC amélioré (appelé G-MUSIC), développé dans un contexte où le nombre d'observations collectées N est grand, et du même ordre de grandeur que le nombre de capteurs M composant l'antenne. Tirant profit de résultats en théorie des matrices aléatoires, nous donnons une analyse des performances statistiques de l'estimateur G-MUSIC, en termes de consistance, d'erreur quadratique moyenne, et de normalité asymptotique, dans le contexte de signaux sources déterministes inconnus. Une comparaison avec l'estimateur MUSIC traditionnel est obtenue dans un premier scénario à « angles sources éloignés », puis dans un second scénario à « angles sources proches ».

ABSTRACT. In the field of DoA estimation in array processing, we summarize recent results on an improved MUSIC method (referred to as G-MUSIC), developed in the context where the number of samples N of the observed signal is large, and of the same order of magnitude than the number of sensors. Using results from random matrix theory, we provide a statistical performance analysis of the G-MUSIC method, in terms of consistency, mean square error, and asymptotic normality, in the context of unknown deterministic source signals. A comparison with the classical MUSIC method is provided in a first scenario with widedspace DoA, and in a second scenario with closely spaced DoA.

MOTS-CLÉS : traitement d'antennes, MUSIC, théorie des matrices aléatoires.

KEYWORDS : Array processing, MUSIC, Random matrix theory

DOI:10.3166/TS.33.249-272 © 2016 Lavoisier

Extended abstract

The estimation of Direction of Arrival (DoA) of source signals impinging on a multi-sensor array is a fundamental problem in statistical signal processing, and several methods have been developed and characterized since the past forty years. Among the usual high resolution algorithms, the subspace methods, such as MUSIC, are frequently used due to their high resolution capability and reasonable computational cost.

The statistical performance of MUSIC, in terms of consistency, Mean Square Error (MSE) or asymptotic normality, has been extensively studied (see e.g. (Stoica, Nehorai, 1989)), mostly in the asymptotic regime where the number M of sensors in the array is fixed while the number of samples N goes to infinity. The corresponding results are thus relevant in practical scenarios where $M \ll N$. However, in practice, the sample size may be limited (e.g. for short time stationary signals) and/or the number of sensors may be large, so that M and N are of the same order of magnitude.

To model this new scenario from an asymptotic point of view, (Mestre, Lagunas, 2008) proposed to consider the non standard regime in which M, N both converge to infinity at the same rate, that is $M, N \rightarrow \infty$ such that $\frac{M}{N} \rightarrow c > 0$. An improved MUSIC method (termed as G-MUSIC), and based on a new estimator of the MUSIC cost function consistent in the doubly asymptotic regime mentioned above, was derived in the context of temporally white Gaussian source signals (usually referred to as *unconditional model*), and later extended to the case of unknown deterministic source signals (usually referred to as *conditional model*). In practice, it was numerically observed that G-MUSIC outperforms MUSIC in closely spaced DoA situations.

The performance of G-MUSIC, in terms of consistency and asymptotic normality, was first studied in (Hachem *et al.*, 2012a) and (Hachem *et al.*, 2012b), in the aforementioned doubly asymptotic regime and in the context of DoA fixed with respect to M, N , which models practical situations where the DoA are widely spaced. In particular, it is proved in this context that G-MUSIC provides consistent DoA estimates, with an estimation error vanishing at a rate $o\left(\frac{1}{M}\right)$ (referred to as (M, N) -consistency). In the recent paper (Vallet *et al.*, 2015), the MUSIC method is also studied in this widely spaced DoA scenario and proved to share the same asymptotic performance as G-MUSIC, in terms of MSE. The more stringent scenario of closely spaced DoA, having an angular spacing of the order $\mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right)$ is also studied, for which it is proved that G-MUSIC remains (M, N) -consistent whereas it is no more the case for MUSIC.

The purpose of this paper is to provide a synthesis of the different results mentioned above, concerning the G-MUSIC and MUSIC methods performance analysis. In section 2, we describe the signal model considered throughout the paper, and recall some basic facts concerning the MUSIC method. In section 3, we summarize some well-known results in Random Matric Theory describing the asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenvectors of large sample correlation matrices. Finally, section 4 is dedicated to the study of the (M, N) -consistency of G-MUSIC and MUSIC, whereas section 5 provides an analysis of the asymptotic normality of both methods. Numerical simulations illustrate the exposed results.

1. Introduction

L'estimation d'angles d'arrivée de signaux sources à l'aide d'un ensemble de capteurs est un problème fondamental en traitement statistique du signal, et un nombre conséquent de méthodes ont été développées et leurs performances caractérisées depuis les quarante dernières années. Parmi les algorithmes à haute résolution les plus utilisés, on trouve notamment les méthodes sous-espace, telles que MUSIC (Schmidt, 1986), ainsi que les méthodes basées sur le maximum de vraisemblance (MV). Il est bien connu (Thomas *et al.*, 1995) que les méthodes sous-espace souffrent d'un phénomène de « décrochage », qui consiste en une dégradation importante des performances quand le rapport signal sur bruit (RSB) et/ou le volume d'échantillons ne sont pas suffisants. En revanche, pour les méthodes basées sur le maximum de vraisemblance, le phénomène de décrochage est moins significatif et se produit pour des RSB bien plus faibles en général. Néanmoins, leur mise en œuvre impliquant un coût calculatoire élevé dû à la minimisation d'une fonction de coût sur un ensemble multidimensionnel, ces méthodes sont en général moins usitées que les méthodes sous-espace, qui induisent pour leur part une minimisation sur un ensemble monodimensionnel.

L'étude des performances statistiques de l'algorithme MUSIC a fait l'objet de nombreux travaux, par exemple (Stoica, Nehorai, 1989), et ses performances statistiques ont été caractérisées dans le contexte standard où le nombre d'observations N du signal est bien plus grand que le nombre de capteurs M composant l'antenne. Néanmoins, dans certaines situations, il n'est pas toujours possible d'obtenir un tel volume d'échantillons, par exemple lorsque le nombre de capteurs est grand et/ou lorsque les signaux ne sont stationnaires que sur de courtes périodes de temps. Dans ce contexte, M et N peuvent être du même ordre de grandeur, et les analyses standards de performances ne sont plus pertinentes.

Pour modéliser ce nouveau contexte d'un point de vue asymptotique, (Mestre, Lagunas, 2008) ont proposé de considérer le régime asymptotique non standard où M, N convergent vers l'infini au même rythme, c'est-à-dire

$$M, N \rightarrow \infty \text{ tel que } \frac{M}{N} \rightarrow c > 0.$$

En s'appuyant sur des résultats issus de la théorie des matrices aléatoires, donnant des caractérisations fines du comportement des valeurs propres et vecteurs propres des grandes matrices de corrélation empiriques, une méthode MUSIC améliorée a été développée dans le cas de signaux sources gaussiens et temporellement blancs. Cette méthode est notamment basée sur un nouvel estimateur du pseudo-spectre, consistant dans le régime doublement asymptotique décrit ci-dessus. D'autres travaux dans le même contexte sont également à noter, tels que (Jonhson *et al.*, 2008) ou (Krichtman, Nadler, 2009), qui incluent notamment le problème d'estimation du nombre de sources. Dans (Vallet *et al.*, 2012), le contexte plus général où les signaux sources sont considérés comme déterministes inconnus a été étudié, et un estimateur MUSIC amélioré (G-MUSIC) a été développé par une approche similaire à (Mestre, Lagunas, 2008), mais reposant sur des modèles et résultats de théorie des matrices aléatoires différents.

Plus récemment, les travaux de (Vinogradova *et al.*, 2013) ont étendu ces résultats au contexte de bruit temporellement corrélé. Nous mentionnons également la série de travaux récents (Couillet, Kammoun, 2014), (Couillet, 2015), (Couillet *et al.*, 2015) sur l'estimation sous-espace robuste, dans le contexte de bruit impulsif ou en présence de données aberrantes.

Les premières études concernant les performances statistiques de la méthode G-MUSIC, en termes de consistance et de normalité asymptotique dans le régime doublement asymptotique décrit ci-dessus, ont été publiées dans (Hachem *et al.*, 2012a) et (Hachem *et al.*, 2012b). Ainsi, dans (Hachem *et al.*, 2012a), il est montré, dans le contexte d'angles sources fixes par rapport à M, N , que la méthode G-MUSIC fournit des estimées angulaires consistantes, avec une erreur d'estimation décroissant vers 0 au rythme $o\left(\frac{1}{M}\right)$ (on parlera alors plus spécifiquement de (M, N) -consistance). Dans (Hachem *et al.*, 2012b), la normalité asymptotique des estimées angulaires G-MUSIC est étudiée dans ce même contexte, et sous l'hypothèse supplémentaire de signaux sources spatialement décorrelés au sens déterministe (i.e. dont l'intercorrélacion empirique tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$).

Dans la pratique, le gain de performances de la méthode G-MUSIC sur la méthode MUSIC peut être observé dans des scénarios où les angles sources sont proches, en particulier avec un espacement angulaire limite de l'ordre de $\mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right)$, tandis que dans le cas d'angles sources éloignés, les performances sont relativement similaires et l'intérêt de la méthode G-MUSIC discutable. Les hypothèses considérées dans (Hachem *et al.*, 2012a) et (Hachem *et al.*, 2012b), où les angles sources sont supposés indépendants de M, N , ne permettent néanmoins pas de conclure sur les performances des estimées G-MUSIC dans le scénario modélisant des angles proches espacés de l'ordre de $\mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right)$.

Ce nouveau scénario fait en partie l'objet du récent article (Vallet *et al.*, 2015), où la (M, N) -consistance et la normalité asymptotique de la méthode G-MUSIC sont étudiées. Ainsi, il est notamment montré que les estimées G-MUSIC demeurent (M, N) -consistantes dans ce scénario, tandis que la méthode MUSIC ne vérifie pas quant à elle cette propriété, et n'est donc pas capable de séparer les angles sources. Néanmoins, dans le scénario moins contraint où les angles sources sont supposés fixes par rapport à M, N , (Vallet *et al.*, 2015) montre également que les méthodes G-MUSIC et MUSIC sont toutes deux (M, N) -consistantes et présentent exactement les mêmes performances asymptotiques, notamment en termes d'erreur quadratique moyenne (EQM), confirmant ainsi les phénomènes observés dans la pratique.

Dans cet article, notre objectif est d'effectuer une synthèse des différents résultats évoqués ci-dessus concernant les méthodes G-MUSIC et MUSIC, et d'analyser leurs performances statistiques dans le régime doublement asymptotique précédemment décrit. Ainsi, en section 2, nous détaillons le modèle de signaux considérés, et rappelons quelques résultats basiques concernant la méthode MUSIC. En section 3, nous présentons quelques résultats utiles de théorie des matrices aléatoires décrivant le comportement asymptotique des valeurs propres et vecteurs propres de matrices de corrélation empiriques. En section 4, nous analysons les propriétés de (M, N) -

consistance des estimateurs G-MUSIC et MUSIC. Finalement, la section 5 est dédiée à l'analyse de la normalité asymptotique de G-MUSIC et MUSIC. Des simulations numériques viennent illustrer les résultats présentés.

Notations : pour une matrice \mathbf{A} , nous notons \mathbf{A}^T et \mathbf{A}^* ses transposée et transposée hermitienne, et par $\text{tr}(\mathbf{A})$ et $\|\mathbf{A}\|$ ses trace et norme spectrale. La matrice identité est notée \mathbf{I} , et \mathbf{e}_n désigne le n -ième vecteur de la base canonique. La loi gaussienne réelle de moyenne m et de variance σ^2 est notée $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\alpha, \sigma^2)$. D'une manière similaire, une variable aléatoire complexe $Z = X + iY$ suit une loi $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\alpha + i\beta, \sigma^2)$ si X, Y sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\alpha, \frac{\sigma^2}{2})$ et $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\beta, \frac{\sigma^2}{2})$. Les espérance et variance d'une variable aléatoire Z sont notées respectivement $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathbb{V}[Z]$. Pour une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une variable aléatoire X , nous notons

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} X \text{ et } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X$$

quand X_n converge respectivement presque sûrement et en loi vers X . Finalement, $X_n = o_{\mathbb{P}}(1)$ signifiera que X_n converge vers 0 en probabilité, et $X_n = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ que la suite (X_n) est bornée en probabilité.

2. Modèle de signaux et méthode MUSIC

Considérons la situation où les signaux émis par K sources à bande étroite et en champs lointain sont reçus par une antenne linéaire uniforme composée de M capteurs, où $K < M$. Le signal (en bande de base) collecté par l'antenne puis échantillonné est généralement modélisé par la série temporelle complexe $(\mathbf{y}_n)_{n \geq 1}$ de dimension M définie par

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{A}\mathbf{s}_n + \mathbf{v}_n,$$

où

– $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ est la matrice $M \times K$ des vecteurs directionnels $\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)$, avec $\theta_1, \dots, \theta_K$ les angles sources, et¹

$$\mathbf{a}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{M}}[1, \dots, e^{i(M-1)\theta}]^T;$$

– $\mathbf{s}_n \in \mathbb{C}^K$ contient les K signaux sources reçus à l'instant n , supposés déterministes inconnus

– $(\mathbf{v}_n)_{n \geq 1}$ est un bruit gaussien complexe circulaire, spatialement et temporellement blanc de matrice de corrélation spatiale $\mathbb{E}[\mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^*] = \sigma^2 \mathbf{I}$.

1. Notons que les vecteurs directionnels sont renormalisés par $M^{-1/2}$, de telle sorte qu'ils soient unitaires et restent donc bornés quand M converge vers l'infini, régime qui sera considéré par la suite. Ceci revient à garantir que le RSB ne tende pas vers l'infini.

En supposant que N échantillons $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$ sont collectés par l'antenne et rangés dans la matrice $\mathbf{Y}_N = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N]$ de taille $M \times N$, on a alors le modèle

$$\mathbf{Y}_N = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N] = \mathbf{A}\mathbf{S}_N + \mathbf{V}_N, \quad (1)$$

où $\mathbf{S}_N = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N]$ et $\mathbf{V}_N = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N]$. Le problème d'estimation des angles d'arrivée consiste ainsi à estimer $\theta_1, \dots, \theta_K$ disposant de \mathbf{Y}_N .

En général, les méthodes sous-espace reposent sur l'observation que la contribution des sources $\mathbf{A}\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{s}_N$ est confinée dans le sous-espace vectoriel dit signal, de dimension K , défini par $\text{span}\{\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)\}$. En supposant que la matrice de corrélation empirique des signaux sources, donnée par

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^* = \frac{1}{N} \mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^*$$

soit de rang plein égal à K , les angles $\theta_1, \dots, \theta_K$ sont alors les uniques zéros du pseudo-spectre

$$\eta(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{\Pi} \mathbf{a}(\theta),$$

où $\mathbf{\Pi}$ est la matrice de projection orthogonale sur le sous-espace bruit, défini comme le supplémentaire orthogonal du sous-espace signal, et qui coïncide donc avec le noyau de la matrice $\frac{1}{N} \mathbf{A}\mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^* \mathbf{A}^*$, de dimension $M - K$.

Comme le projecteur $\mathbf{\Pi}$ n'est pas observable directement, il est traditionnellement estimé à partir de la matrice de corrélation empirique des observations

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^* = \frac{1}{N} \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*,$$

et directement remplacé par son estimée empirique $\hat{\mathbf{\Pi}}_N$ définie comme la matrice de projection orthogonale sur le sous-espace propre associé aux $M - K$ plus petites valeurs propres de $\frac{1}{N} \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*$. La méthode MUSIC consiste alors à estimer les angles $\theta_1, \dots, \theta_K$ comme les K plus petits minima du pseudo-spectre estimé

$$\hat{\eta}_N^{(t)}(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^* \hat{\mathbf{\Pi}}_N \mathbf{a}(\theta),$$

où l'exposant (t) est employé pour signifier « estimateur traditionnel ».

En général, la matrice de corrélation empirique des observations est un estimateur relativement fiable de la vraie matrice de corrélation, dans le contexte où le nombre d'échantillons N est bien plus grand que la dimension des observations M . En effet, dans le régime asymptotique où M est fixe et N tend vers l'infini, et sous certaines hypothèses concernant les signaux sources, la loi des grands nombre implique que

$$\left\| \frac{\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*}{N} - \left(\mathbf{A} \frac{\mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^*}{N} \mathbf{A}^* + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \right\| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 0, \quad (2)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme spectrale. En particulier, on a consistance de l'estimateur $\hat{\mathbf{\Pi}}_N$, c'est-à-dire

$$\left\| \hat{\mathbf{\Pi}}_N - \mathbf{\Pi} \right\| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \quad (3)$$

De plus, (3) implique directement la consistance uniforme du pseudo-spectre empirique, c'est-à-dire

$$\sup_{\theta \in [-\pi, \pi]} \left| \hat{\eta}_N^{(t)}(\theta) - \eta(\theta) \right| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \quad (4)$$

Les estimées angulaires MUSIC, définies pour $k = 1, \dots, K$ par

$$\hat{\theta}_{k,N}^{(t)} = \underset{\theta \in \mathcal{I}_k}{\operatorname{argmin}} \hat{\eta}_N^{(t)}(\theta),$$

où \mathcal{I}_k est un intervalle compact contenant θ_k et tel que $\mathcal{I}_k \cap \mathcal{I}_l = \emptyset$ pour $k \neq l$, sont en conséquence des estimateurs consistants des vrais angles sources :

$$\hat{\theta}_{k,N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \theta_k.$$

En tirant partie de résultats concernant la distribution asymptotique de la matrice de corrélation empirique $\frac{1}{N} \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*$ et l'estimée empirique du projecteur $\hat{\mathbf{\Pi}}_N$ (Anderson, 1958), plusieurs approximations fines de l'EQM sur les estimées angulaires ont été développées (voir par exemple (Stoica, Nehorai, 1989) et les références incluses).

Néanmoins, dans le contexte où M et N sont du même ordre de grandeur, le régime asymptotique traditionnel où M est fixe et $N \rightarrow \infty$ n'apparaît alors plus pertinent. Pour analyser une telle situation, (Mestre, Lagunas, 2008) ont alors proposé de considérer le régime asymptotique non standard où

$$M, N \rightarrow \infty \text{ tel que } \frac{M}{N} \rightarrow c > 0. \quad (5)$$

Dans ce nouveau régime asymptotique, les convergences (2) et (3), ainsi que (4), ne sont alors plus valides. Notamment, les valeurs propres de la corrélation empirique $\frac{1}{N} \mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*$ s'étalent, entraînant un mélange des sous-espace bruit et signal. Dans ce nouveau régime asymptotique, les études standards sur la consistance et la normalité asymptotique de MUSIC ne sont donc en principe plus valides.

3. Valeurs propres et vecteurs propres des grandes matrices de corrélation empiriques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats issus de la théorie des matrices aléatoires, décrivant le comportement des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de corrélation empirique $\frac{\mathbf{Y}_N \mathbf{Y}_N^*}{N}$, dans le régime asymptotique où M, N convergent vers l'infini tel que $\frac{M}{N} \rightarrow c > 0$. Ces résultats sont notamment utiles pour

appréhender l'impact du régime asymptotique non standard sur les méthodes sous-espace, et nécessaires pour présenter en toute rigueur l'estimation MUSIC améliorée développée dans (Vallet *et al.*, 2012).

Nous travaillerons alors avec le modèle général suivant. Considérons $M, N, K \in \mathbb{N}^*$ tel que $K < M < N$ et $M = M(N)$ soit une fonction de M vérifiant

$$c_N = \frac{M}{N} = c + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

quand $N \rightarrow \infty$. On supposera également K indépendant de M . Afin d'éviter toute confusion avec le régime classique (où M fixe et $N \rightarrow \infty$), nous utiliserons la notation $M, N \rightarrow \infty$ en lieu et place de $N \rightarrow \infty$, pour référer au nouveau régime asymptotique défini ci-dessus.

Considérons alors la suite de matrices aléatoires $(\Sigma_N)_{N \geq 1}$, où Σ_N est la matrice de taille $M \times N$ définie par²

$$\Sigma_N = \mathbf{B}_N + \mathbf{W}_N, \quad (6)$$

avec

- \mathbf{B}_N est une matrice déterministe de rang K telle que $\sup_N \|\mathbf{B}_N\| < \infty$,
- \mathbf{W}_N est à entrées i.i.d. de loi $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}\left(0, \frac{\sigma^2}{N}\right)$.

On notera $\lambda_{1,N} \geq \dots \geq \lambda_{K,N}$ les valeurs propres non nulles de $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$ ainsi que $\mathbf{u}_{1,N}, \dots, \mathbf{u}_{K,N}$ les vecteurs propres associés de norme 1. De manière similaire, $\hat{\lambda}_{1,N} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{M,N}$ désigneront les valeurs propres de la matrice $\Sigma_N \Sigma_N^*$ tandis que $\hat{\mathbf{u}}_{1,N}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{M,N}$ les vecteurs propres associés de norme 1.

On définira également par $\hat{\mu}_N$ la distribution empirique des valeurs propres de la matrice $\Sigma_N \Sigma_N^*$, définie comme la mesure de probabilité aléatoire

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \delta_{\hat{\lambda}_{k,N}},$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x . L'objet des deux sections suivantes est l'étude du comportement asymptotique de $\hat{\mu}_N$.

3.1. Comportement asymptotique du spectre « pur bruit »

Supposons dans un premier temps un modèle « pur bruit », c'est-à-dire $\Sigma_N = \mathbf{W}_N$.

2. Naturellement, nous retrouvons le modèle usuel (1) en posant $\Sigma_M = N^{-1/2} \mathbf{Y}_N$, $\mathbf{B}_N = N^{-1/2} \mathbf{A} \mathbf{S}_N$ et $\mathbf{W}_N = N^{-1/2} \mathbf{V}_N$.

Dans ce contexte, le comportement asymptotique de la distribution empirique $\hat{\mu}_N$ est bien connu depuis les travaux de (Marchenko, Pastur, 1967). En effet, avec probabilité un, on a la convergence en loi

$$\hat{\mu}_N \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mu \tag{7}$$

où μ est une mesure de probabilité déterministe appelée « loi de Marchenko-Pastur », dont le support coïncide avec l'intervalle compact $[\sigma^2(1 - \sqrt{c})^2, \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2]$ et définie par

$$d\mu(x) = \left(1 - \frac{1}{c}\right)^+ \delta_0(dx) + \frac{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)}}{2\sigma^2 c \pi x} \mathbb{1}_{[x^-, x^+]}(x) dx.$$

avec $x^- = \sigma^2(1 - \sqrt{c})^2$ et $x^+ = \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2$.

Autrement dit, la distribution empirique des valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ se comporte asymptotiquement comme la distribution de Marchenko-Pastur. En pratique, l'histogramme des valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ coïncide avec la densité de la loi de Marchenko-Pastur, pour M, N grands, comme illustré en figure 1, où nous avons fixé $M = 100, N = 200, \sigma^2 = 1$.

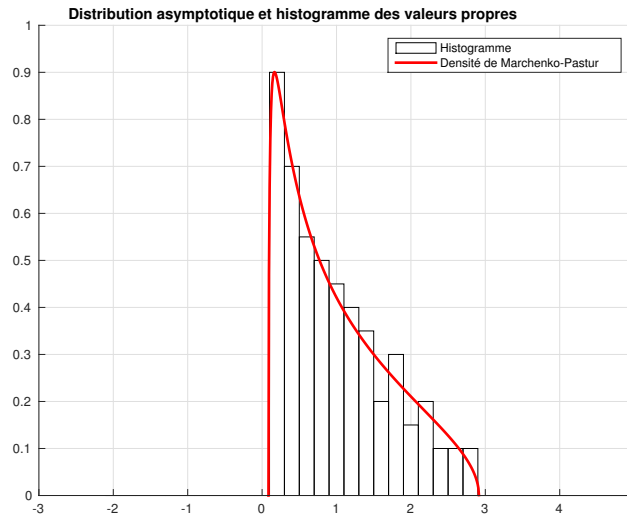


Figure 1. Loi de Marchenko-Pastur et histogramme des valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ (pur bruit)

Le support de la distribution étant dépendant de σ^2 et c , ces deux paramètres contrôlent en particulier l'étalement des valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ en pratique. Cet étalement est illustré en figure 2, où la densité de Marchenko-Pastur est représentée pour plusieurs valeurs de c .

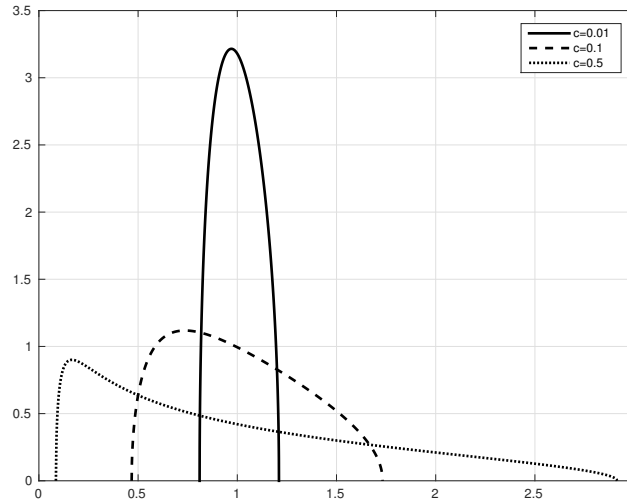


Figure 2. Etalement de la loi de Marcenko-Pastur suivant c

Le résultat précédent décrit le comportement asymptotique des valeurs propres, dans leur globalité. Concernant le comportement individuel des valeurs propres, on a en particulier que (Bai, Silverstein, 1998)

$$\hat{\lambda}_{1,N} \xrightarrow[M,N \rightarrow \infty]{p.s.} \sigma^2 (1 + \sqrt{c})^2 \text{ et } \hat{\lambda}_{M,N} \xrightarrow[M,N \rightarrow \infty]{p.s.} \sigma^2 (1 - \sqrt{c})^2,$$

montrant en outre qu’avec probabilité un, toutes les valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ se concentrent au voisinage du support de la distribution de Marchenko-Pastur, pour M, N suffisamment grand. Ce résultat est illustré en figure 3 ($M = 100, N = 200, \sigma^2 = 1$), où l’on constate qu’aucune valeur propre de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ ne s’échappent du support de la distribution limite de Marchenko-Pastur, pour M, N finis.

3.2. La distribution spectrale asymptotique de $\Sigma_N \Sigma_N^*$

Le modèle (6), intégrant la présence de la contribution « signal » \mathbf{B}_N , peut être vu comme une perturbation de petit rang³ de la matrice de bruit \mathbf{W}_N . En effet, comme la paramètre K reste fixe quand $M, N \rightarrow \infty$, on peut montrer sans difficulté que la convergence (7) reste vraie. Autrement dit, la perturbation de rang fixe \mathbf{B}_N ne modifie pas le comportement asymptotique global des valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$, qui suit toujours la distribution de Marchenko-Pastur. Ce phénomène est illustré en figure 4, où les paramètres choisis sont $M = 100, N = 200, \sigma^2 = 1$ et $K = 2$ avec $\lambda_{1,N} = 10$ et $\lambda_{2,N} = 5$.

3. Ces modèles à perturbation de rang fixe sont couramment appelés « spiked models » dans la littérature des matrices aléatoires.

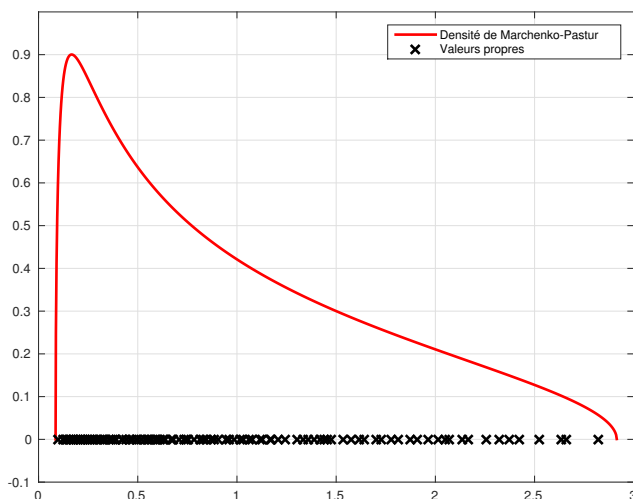


Figure 3. Loi de Marchenko-Pastur et valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ (pur bruit)

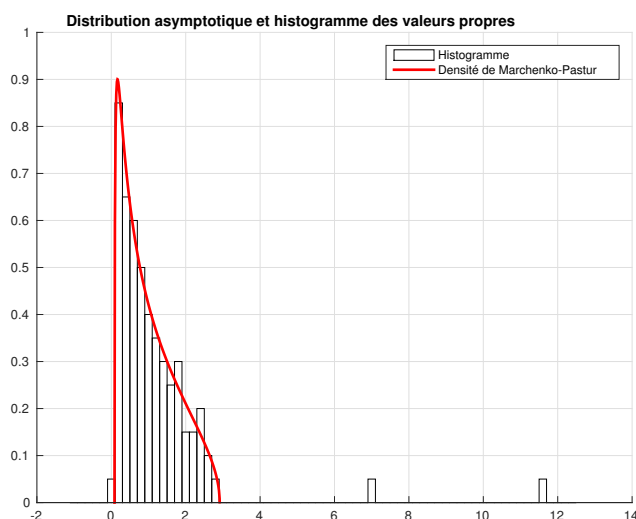


Figure 4. Loi de Marchenko-Pastur et histogramme des valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ (signal plus bruit)

En revanche, concernant le comportement individuel des valeurs propres de la matrice $\Sigma_N \Sigma_N^*$, les résultats diffèrent significativement du cas pur bruit. En effet, on peut également constater en figure 4 que les deux plus grandes valeurs propres $\hat{\lambda}_{1,N}$ et $\hat{\lambda}_{2,N}$ du spectre de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ « s'échappent » du support de la distribution de Marcenko-Pastur, tandis que les valeurs propres $\hat{\lambda}_{3,N}, \dots, \hat{\lambda}_{100,N}$ sont quant à elles concentrées dans le support. Ce phénomène d'échappement des plus grandes valeurs propres est

en fait lié à la perturbation déterministe \mathbf{B}_N par l'intermédiaire des valeurs propres de $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$. En effet, sous une hypothèse supplémentaire portant sur le niveau des valeurs propres non nulles $\lambda_{1,N}, \dots, \lambda_{K,N}$ de $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$, il est possible de caractériser le comportement des K plus grandes valeurs propres $\hat{\lambda}_{1,N}, \dots, \hat{\lambda}_{K,N}$. L'hypothèse formulée ci-dessous, couramment appelée « hypothèse de séparation », garantit que les K valeurs propres non nulles de $\mathbf{B}_N \mathbf{B}_N^*$ sont suffisamment séparées de la valeur 0.

HYPOTHÈSE 1. — Pour $k = 1, \dots, K$, $\lambda_{k,N} \rightarrow \lambda_k$ quand $M, N \rightarrow \infty$, où⁴

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_K > \sigma^2 \sqrt{c}.$$

Notons que cette hypothèse sera reformulée en section 4 dans le cadre du modèle paramétrique (1) Sous l'hypothèse 1, une description fine du comportement asymptotique des valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ peut être obtenue.

THÉORÈME 2. — Sous l'hypothèse 1, pour $k = 1, \dots, K$,

$$\hat{\lambda}_{k,N} \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{p.s.} \phi(\lambda_k) = \frac{(\lambda_k + \sigma^2)(\lambda_k + \sigma^2 c)}{\lambda_k},$$

où $\phi(\lambda_k) > x^+$. De plus, pour tout $\epsilon > 0$, avec probabilité un,

$$\hat{\lambda}_{K+1,N}, \dots, \hat{\lambda}_{M,N} \in (x^- - \epsilon, x^+ + \epsilon),$$

pour M suffisamment grand.

Le théorème 2 est une conséquence de résultats obtenus par (Benaych-Georges, Nadakuditi, 2012) dans un contexte plus général, non nécessairement gaussien (voir aussi (Loubaton, Vallet, 2011) pour une preuve différente dans le cas particulier gaussien). Formulé autrement, le théorème 2 garantit que les K plus grandes valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ s'échappent du support de la distribution de Marcenko-Pastur tandis que les $M - K$ plus petites restent concentrées dans un voisinage de $[x^-, x^+]$, pour M, N grands. Ce comportement est illustré en figure 5, où les paramètres sont similaires à ceux de la figure 4. On peut alors constater que les valeurs propres $\hat{\lambda}_{1,N}$ et $\hat{\lambda}_{2,N}$ sont proches de leurs limites.

REMARQUE 3. — Le théorème 2 peut être également interprété, sous l'angle de la détection de signal noyé dans un bruit gaussien (voir par exemple (Nadakuditi, Edelman, 2008) (Bianchi *et al.*, 2011)). En effet, nous remarquons que la condition de séparation dans l'hypothèse 1 peut être vue comme un seuil de détectabilité sur le RSB, si nous définissons le RSB comme étant le ratio $\frac{\lambda_K}{\sigma^2}$. En conséquence, le théorème 2 garantit que les K valeurs propres « signal » $\hat{\lambda}_{1,N}, \dots, \hat{\lambda}_{K,N}$ seront détectables au sens où elles se détacheront des $M - K$ valeurs propres « bruit » quand $M, N \rightarrow \infty$, tant que le RSB est au-dessus du seuil \sqrt{c} . \square

4. Notons que les résultats à venir restent valides si certaines valeurs propres parmi $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ sont égales. Nous supposons néanmoins des multiplicités de un pour chaque valeur propre, afin de simplifier la présentation des résultats.

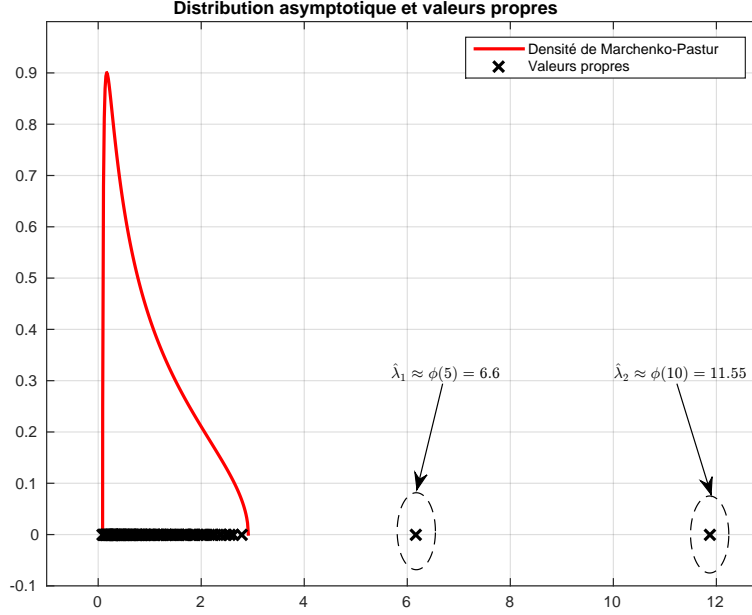


Figure 5. Densité de Marchenko-Pastur et valeurs propres (signal plus bruit)

3.3. Vecteurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$ et estimation du sous-espace bruit

Dans cette section, nous donnons une caractérisation du comportement des vecteurs propres associés aux K plus grandes valeurs propres de $\Sigma_N \Sigma_N^*$, et exploitons ces résultats pour mettre en lumière un estimateur consistant de toute forme sesquilinéaire de la matrice de projection orthogonale sur le sous-espace bruit (cet estimateur a été développé dans ((Hachem *et al.*, 2012b), voir aussi (Vallet *et al.*, 2012))⁵.

Le résultat suivant est montré dans (Benaych-Georges, Nadakuditi, 2012) (voir aussi (Hachem *et al.*, 2012b)).

THÉORÈME 4. — *Sous l'hypothèse 1, pour toutes suites déterministes de vecteurs unitaires $(\mathbf{d}_{1,N})$, $(\mathbf{d}_{2,N})$,*

$$\mathbf{d}_{1,N}^* \hat{\mathbf{u}}_{k,N} \hat{\mathbf{u}}_{k,N}^* \mathbf{d}_{2,N} = \frac{\lambda_k^2 - \sigma^4 c}{\lambda_k (\lambda_k + \sigma^2 c)} \mathbf{d}_{1,N}^* \mathbf{u}_{k,N} \mathbf{u}_{k,N}^* \mathbf{d}_{2,N} + o(1),$$

avec probabilité un pour $k = 1, \dots, K$.

Définissons la forme sesquilinéaire

$$\eta_N = \mathbf{d}_{1,N}^* \mathbf{\Pi}_N \mathbf{d}_{2,N}, \quad (8)$$

5. Notons que l'estimateur développé dans (Vallet *et al.*, 2012) est plus général que l'estimateur de (Hachem *et al.*, 2012b), car il reste consistant notamment dans la situation où K peut potentiellement tendre vers l'infini avec N .

où $\mathbf{\Pi}_N = \mathbf{I} - \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_{k,N} \mathbf{u}_{k,N}^*$ est la matrice de projection orthogonale sur le sous-espace bruit, ainsi que son estimée classique

$$\hat{\eta}_N^{(t)} = \mathbf{d}_{1,N}^* \hat{\mathbf{\Pi}}_N \mathbf{d}_{2,N}, \quad (9)$$

où $\mathbf{\Pi}_N$ est remplacée par son estimée empirique $\hat{\mathbf{\Pi}}_N = \mathbf{I} - \sum_{k=1}^K \hat{\mathbf{u}}_{k,N} \hat{\mathbf{u}}_{k,N}^*$. Alors le théorème 4 montre en particulier qu'avec probabilité un,

$$\hat{\eta}_N^{(t)} = \mathbf{d}_{1,N}^* \left(\mathbf{I} - \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^2 - \sigma^4 c}{\lambda_k (\lambda_k + \sigma^2 c)} \mathbf{u}_{k,N} \mathbf{u}_{k,N}^* \right) \mathbf{d}_{2,N} + o(1), \quad (10)$$

ce qui implique que l'estimateur classique $\hat{\eta}_N^{(t)}$ n'est pas consistant lorsque $M, N \rightarrow \infty$. Qui plus est, le théorème 2, en conjonction avec le théorème 4, permet d'obtenir un estimateur consistant de (8). En effet, la fonction $\lambda \mapsto \phi(\lambda)$ réalisant une bijection continue de $]\sigma^2 \sqrt{c}, +\infty[$ dans $]\sigma^2(1 + \sqrt{c})^2, +\infty[$, et en notant ϕ^{-1} la réciproque sur cet intervalle, on a alors que $\phi^{-1}(\hat{\lambda}_{k,N}) \rightarrow \lambda_k$ p.s. quand $M, N \rightarrow \infty$ sous l'hypothèse 1. En conséquence, on déduit que

$$\hat{\eta}_N - \eta_N \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{p.s.} 0, \quad (11)$$

où

$$\hat{\eta}_N = \mathbf{d}_{1,N}^* \left(\mathbf{I} - \sum_{k=1}^K h(\hat{\lambda}_{k,N}) \hat{\mathbf{u}}_{k,N} \hat{\mathbf{u}}_{k,N}^* \right) \mathbf{d}_{2,N}, \quad (12)$$

et

$$h(\hat{\lambda}_{k,N}) = \frac{\phi^{-1}(\hat{\lambda}_{k,N}) (\phi^{-1}(\hat{\lambda}_{k,N}) + \sigma^2 c)}{\phi^{-1}(\hat{\lambda}_{k,N})^2 - \sigma^4 c}.$$

REMARQUE 5. — Remarquons que (12) fournit en particulier un estimateur consistant d'une entrée (i, j) de $\mathbf{\Pi}_N$, en prenant $\mathbf{d}_{1,N} = \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{d}_{2,N} = \mathbf{e}_j$. Néanmoins, il ne conduit pas à un estimateur consistant en norme spectrale de $\mathbf{\Pi}_N$, au sens où

$$\left\| \mathbf{\Pi}_N - \left(\mathbf{I} - \sum_{k=1}^K \frac{1}{h(\hat{\lambda}_{k,N})} \hat{\mathbf{u}}_{k,N} \hat{\mathbf{u}}_{k,N}^* \right) \right\|$$

ne tend pas nécessairement vers 0 quand $M, N \rightarrow \infty$. \square

4. Consistance de G-MUSIC et MUSIC

Pour la suite, nous utilisons les résultats de la section 3 pour $\mathbf{\Sigma}_N = N^{-1/2} \mathbf{Y}_N$, $\mathbf{B}_N = N^{-1/2} \mathbf{A}(\theta) \mathbf{S}_N$, $\mathbf{W}_N = N^{-1/2} \mathbf{V}_N$, $\mathbf{d}_{1,N} = \mathbf{d}_{2,N} = \mathbf{a}(\theta)$ et supposons que la condition de séparation de l'hypothèse 1 est vérifiée.

En tirant partie de l'estimateur sous-espace (12), (Vallet *et al.*, 2012) (voir aussi (Hachem *et al.*, 2012b)) ont proposé l'estimateur suivant du pseudo-spectre MUSIC :

$$\hat{\eta}_N(\theta) = 1 - \sum_{k=1}^K h(\hat{\lambda}_{k,N}) |\mathbf{a}(\theta)^* \hat{\mathbf{u}}_{k,N}|^2. \quad (13)$$

REMARQUE 6. — L'estimateur du pseudo-spectre (13) peut être vu comme une version pondérée de l'estimateur standard

$$\hat{\eta}_N^{(t)}(\theta) = 1 - \sum_{k=1}^K |\mathbf{a}(\theta)^* \hat{\mathbf{u}}_{k,N}|^2.$$

De plus, dans le régime asymptotique classique où $\frac{M}{N} \rightarrow 0$, on montre que les coefficients $h(\hat{\lambda}_{k,N})$ convergent presque sûrement vers 1, et l'estimateur amélioré (13) se réduit à l'estimateur standard. \square

De par (11), on obtient directement que $\hat{\eta}_N(\theta) - \eta_N(\theta) \rightarrow 0$ presque sûrement quand $M, N \rightarrow \infty$, pour tout θ fixé. Dans (Hachem *et al.*, 2012a), il est montré que cette convergence est uniforme en θ , c'est-à-dire que

$$\sup_{\theta \in [-\pi, \pi]} |\hat{\eta}_N(\theta) - \eta_N(\theta)| \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \quad (14)$$

La méthode sous-jacente d'estimation des angles d'arrivée, nommée G-MUSIC (pour « Generalized-MUSIC »), consiste alors à estimer $\theta_1, \dots, \theta_K$ comme les K plus petits minima de $\theta \mapsto \hat{\eta}_N(\theta)$.

Concernant l'estimateur standard du pseudo-spectre $\hat{\eta}_N^{(t)}(\theta)$, le théorème 4 montre quant à lui que

$$\hat{\eta}_N^{(t)}(\theta) - \eta_N^{(t)}(\theta) \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

où

$$\eta_N^{(t)}(\theta) = 1 - \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^2 - \sigma^4 c}{\lambda_k (\lambda_k + \sigma^2 c)} |\mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{u}_{k,N}|^2. \quad (15)$$

4.1. (M, N) -consistance pour des angles éloignés

Dans cette partie, nous considérons l'analyse de la consistance des estimées angulaires MUSIC et G-MUSIC, pour le scénario dit « à angles éloignés ». En pratique, une telle situation se présente par exemple lorsque les angles sources ont des espaces angulaires bien plus grand que $\frac{2\pi}{M}$, correspondant à la limite en résolution d'un périodogramme spatial. D'un point de vue mathématique, nous considérons que les

angles sources $\theta_1, \dots, \theta_K$ sont indépendants de N . Dans ce cas, on a immédiatement que $\mathbf{A}^* \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{I}$, et la condition de séparation de l'hypothèse 1 est vérifiée si et seulement si les valeurs propres de $\frac{\mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^*}{N}$ convergent vers $\lambda_1 > \dots > \lambda_K > \sigma^2 \sqrt{c}$, quand $M, N \rightarrow \infty$. En résumé, nous considérons l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE 7. — *Le nombre de sources K ainsi que les angles sources $\theta_1, \dots, \theta_K$ sont indépendants de M , et les valeurs propres de $N^{-1} \mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^*$ convergent vers*

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_K > \sigma^2 \sqrt{c}.$$

Afin d'éviter des problèmes d'identifiabilité des angles d'arrivée, et de définir sans ambiguïté les estimateurs MUSIC et G-MUSIC, nous considérons, comme il est d'usage de faire en théorie de la M -estimation, des intervalles compacts disjoints $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_K \subset [-\pi, \pi]$ tels que $\theta_k \in \text{Int}(\mathcal{I}_k)$, où $\text{Int}(\mathcal{I}_k)$ désigne l'intérieur de \mathcal{I}_k . On définit formellement les estimateurs angulaires G-MUSIC et MUSIC comme⁶

$$\hat{\theta}_{k,N} = \underset{\theta \in \mathcal{I}_k}{\text{argmin}} |\hat{\eta}_N(\theta)| \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} = \underset{\theta \in \mathcal{I}_k}{\text{argmin}} \hat{\eta}_N^{(t)}(\theta). \quad (16)$$

En étudiant les maxima des fonctions déterministes $\theta \mapsto \eta_N(\theta)$ et $\theta \mapsto \eta_N^{(t)}(\theta)$, limites respectives de $\hat{\eta}_N(\theta)$ et $\hat{\eta}_N^{(t)}(\theta)$, il est possible d'établir la (M, N) -consistance des estimées G-MUSIC et MUSIC.

THÉORÈME 8. — *Sous l'hypothèse 7,*

$$\hat{\theta}_{k,N} = \theta_k + o\left(\frac{1}{M}\right) \quad \text{and} \quad \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} = \theta_k + o\left(\frac{1}{M}\right),$$

avec probabilité un.

La (M, N) -consistance de G-MUSIC est montrée dans (Hachem *et al.*, 2012a), tandis que la (M, N) -consistance de MUSIC est établie dans (Vallet *et al.*, 2015).

Les résultats du théorème 8 montre donc que les méthodes G-MUSIC et MUSIC ont le même comportement au premier ordre, quand les angles sources $\theta_1, \dots, \theta_K$ sont fixes par rapport à N . En section 5, nous montrerons de plus que dans ce scénario, les deux méthodes partagent également la même EQM asymptotique quand $M, N \rightarrow \infty$.

REMARQUE 9. — Dans un scénario à angles éloignés, notons que les méthodes basse résolution, type formation de voies, fournissent en général des performances comparables aux méthodes sous-espaces, pour des coûts calculatoires bien plus faibles. L'étude des méthodes sous-espace dans ce scénario peut donc apparaître d'un intérêt discutable. Néanmoins, dans certains contextes impliquant une corrélation spatiale

6. Notons que la fonction de coût G-MUSIC est définie avec une valeur absolue, car sa positivité n'est pas garantie, dû à la présence des facteurs de pondération $h(\hat{\lambda}_{k,N})$ dans (13). Néanmoins, pour l'étude de la consistance et de la normalité asymptotique des estimées angulaires, cette valeur absolue n'est pas nécessaire puisque $h(\hat{\lambda}_{k,N}) > 0$ avec probabilité un pour N suffisamment grand.

entre sources, la formation de voie peut présenter un biais non négligeable pour des forts RSB (voir (Vallet *et al.*, 2015)), et l'utilisation des méthodes sous-espace demeure alors pertinente. \square

4.2. (M, N) -consistance pour des angles proches

Dans cette partie, nous étudions la consistance des estimées angulaires G-MUSIC et MUSIC dans le scénario dit « à angles proches », où $\theta_{1,N}, \dots, \theta_{K,N}$ dépendent de N et convergent vers la même valeur au rythme $\mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right)$. Pour conserver une présentation simple et claire, on se placera dans le cas particulier de $K = 2$ sources dont les angles d'arrivée $\theta_{1,N}$ et $\theta_{2,N}$ vérifient

$$\theta_{2,N} = \theta_{1,N} + \frac{\alpha}{M},$$

où $\alpha > 0$, et supposons de plus des sources spatialement décorrélées et de puissances égales (asymptotiquement), c'est-à-dire

$$\frac{\mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^*}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbf{I}.$$

Dans ce cas, on constate que les deux valeurs propres non nulles de $\frac{\mathbf{A} \mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^* \mathbf{A}^*}{N}$ ont pour limite

$$\lambda_1 = 1 + \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 - \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|.$$

où $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$ et $\operatorname{sinc}(0) = 1$. En conséquence, la condition de séparation de l'hypothèse 1 est vérifiée si et seulement si

$$\left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| < 1 - \sigma^2 \sqrt{c}.$$

En résumé, nous faisons donc l'hypothèse suivante, pour le scénario en angles proches.

HYPOTHÈSE 10. — *On suppose que $K = 2$,*

$$\frac{\mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^*}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbf{I},$$

et que $\theta_{1,N}, \theta_{2,N}$ dépendent de M de telle manière que

$$\theta_{2,N} = \theta_{1,N} + \frac{\alpha}{M},$$

où $\alpha > 0$ vérifie

$$\left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| < 1 - \sigma^2 \sqrt{c}.$$

Etant donné que les angles sources ne sont pas fixes avec N , nous définissons, d'une manière similaire à (16), les estimées G-MUSIC et MUSIC respectivement par

$$\hat{\theta}_{k,N} = \underset{\theta \in \mathcal{I}_{k,N}}{\operatorname{argmin}} \hat{\eta}_N(\theta) \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_{k,N}^{(t)} = \underset{\theta \in \mathcal{I}_{k,N}}{\operatorname{argmin}} \hat{\eta}_N^{(t)}(\theta) \quad (17)$$

où $\mathcal{I}_{k,N}$ est défini comme l'intervalle

$$\mathcal{I}_{k,N} = \left[\theta_{k,N} - \frac{\alpha - \epsilon}{2M}, \theta_{k,N} + \frac{\alpha - \epsilon}{2M} \right],$$

avec $0 < \epsilon < \alpha$.

Les conclusions sur la (M, N) -consistance de G-MUSIC et MUSIC dans le scénario angles proches peuvent être résumées comme suit.

THÉORÈME 11. — *Sous l'hypothèse 10, avec probabilité un,*

$$\hat{\theta}_{k,N} = \theta_{k,N} + o\left(\frac{1}{M}\right). \quad (18)$$

De plus, il existe des valeurs de α pour lesquelles $M \left(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)} - \theta_{k,N} \right)$ ne converge pas vers 0.

Le théorème 11 est montré dans (Vallet *et al.*, 2015).

Ainsi, le résultat précédent montre que G-MUSIC reste (M, N) -consistant quand les deux angles sources ont un espacement de l'ordre de $\mathcal{O}(M^{-1})$ tandis que MUSIC n'est potentiellement pas capable de séparer les deux sources du fait de la non consistance de l'estimateur standard du pseudo-spectre. Ce résultat confirme ainsi la pertinence de l'utilisation de G-MUSIC dans des situations de sources angulairement proches, et pour des volumes d'échantillons limités.

5. Normalité asymptotique de G-MUSIC et MUSIC

Dans cette partie, nous synthétisons différents résultats concernant la distribution asymptotique des estimées G-MUSIC et MUSIC, obtenus essentiellement dans (Vallet *et al.*, 2015) (voir aussi (Hachem *et al.*, 2012b)).

Notons que les résultats présentés ci-dessous pour G-MUSIC seront valides pour les deux scénarios angles éloignés et angles proches, tandis que les performances asymptotiques de MUSIC ne peuvent être évaluées que dans le cas d'angles éloignés, puisque la méthode ne vérifie pas la (M, N) -consistance dans l'autre cas.

5.1. Performances asymptotiques de G-MUSIC et MUSIC

Le théorème suivant, dont la preuve est donnée dans (Vallet *et al.*, 2015), montre la normalité asymptotique des estimées angulaires G-MUSIC, et est valide sous l'hypothèse 7 ou l'hypothèse 10.

Notons respectivement $\mathbf{a}'(\theta)$ and $\mathbf{a}''(\theta)$ les dérivée et dérivée seconde de la fonction $\theta \mapsto \mathbf{a}(\theta)$, et définissons

$$\gamma_{k,N} = \frac{1}{N^2} \sum_{p,q=1}^M \vartheta_{p,q} \left| \mathbf{u}_{p,N}^* (\mathbf{a}'(\theta_{k,N}) \mathbf{a}(\theta_{k,N})^* + \mathbf{a}(\theta_{k,N}) \mathbf{a}'(\theta_{k,N})^*) \mathbf{u}_{q,N} \right|^2, \quad (19)$$

où $\vartheta_{p,q}$ est défini, pour $1 \leq p, q \leq K$, par

$$\vartheta_{p,q} = \frac{\sigma^4 c (\lambda_p \lambda_q + (\lambda_p + \lambda_q) \sigma^2 + \sigma^4) (\lambda_p \lambda_q + \sigma^4 c)}{4 (\lambda_p^2 - \sigma^4 c) (\lambda_q^2 - \sigma^4 c) (\lambda_p \lambda_q - \sigma^4 c)},$$

pour $1 \leq p \leq K$ et $q \geq K + 1$ par

$$\vartheta_{p,q} = \frac{\sigma^2 (\lambda_p + \sigma^2)}{4 (\lambda_p^2 - \sigma^4 c)}$$

et $\vartheta_{p,q} = \vartheta_{q,p}$, et pour $p, q \geq K + 1$ par $\vartheta_{p,q} = 0$.

THÉORÈME 12. — *Sous l'hypothèse 7 ou l'hypothèse 10, pour $k = 1, \dots, K$,*

$$N^{3/2} \sqrt{\frac{(\mathbf{a}'(\theta_{k,N})^* \mathbf{\Pi}_N \mathbf{a}'(\theta_{k,N}))^2}{N^4 \gamma_{k,N}}} \left(\hat{\theta}_{k,N} - \theta_{k,N} \right) \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1). \quad (20)$$

Le théorème fournit donc un résultat de normalité asymptotique pour les estimées angulaires G-MUSIC, sous les scénarios angles éloignés et proches. Notons que les conditions d'application de ce résultat sont relativement générales, et autorisent entre autre des signaux sources potentiellement corrélés.

Sous l'hypothèse 7 et en imposant une décorrélation spatiale des signaux sources, c'est-à-dire

$$\frac{\mathbf{S}_N \mathbf{S}_N^*}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K), \quad (21)$$

on obtient par des calculs standards que

$$\frac{1}{N^2} \mathbf{a}'(\theta_{k,N})^* \mathbf{\Pi}_N \mathbf{a}'(\theta_{k,N}) \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{} \frac{c^2}{12} \text{ et } \gamma_{k,N} \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{} \frac{c^2}{24} \frac{\sigma^2 (\lambda_k + \sigma^2)}{\lambda_k^2 - \sigma^4 c}.$$

En conséquence, on déduit la convergence en loi

$$N^{3/2} \left(\hat{\theta}_{k,N} - \theta_k \right) \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{R}} \left(0, \frac{6}{c^2} \frac{\sigma^2 (\lambda_k + \sigma^2)}{\lambda_k^2 - \sigma^4 c} \right), \quad (22)$$

Il est également possible de montrer que l'EQM vérifie

$$\mathbb{E} \left[\left(\hat{\theta}_{k,N} - \theta_k \right)^2 \right] \sim \frac{1}{N^3} \frac{6}{c^2} \frac{\sigma^2 (\lambda_k + \sigma^2)}{\lambda_k^2 - \sigma^4 c}.$$

Notons que dans ce cas particulier (hypothèse 7 et décorrélation asymptotique des sources), (22) a été obtenue dans (Hachem *et al.*, 2012b).

Concernant la méthode MUSIC, il est possible d'obtenir le résultat suivant, dans le scénario des angles éloignés.

THÉORÈME 13. — *Sous l'hypothèse 7 et si (21) est vérifiée, on a pour $k = 1, \dots, K$,*

$$N^{3/2} \left(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)} - \theta_k \right) \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{R}} \left(0, \frac{6}{c^2} \frac{\sigma^2(\lambda_k + \sigma^2)}{\lambda_k^2 - \sigma^4 c} \right), \quad (23)$$

Le théorème 13 est montré dans (Vallet *et al.*, 2015), mais sous une forme plus générale ne nécessitant pas l'hypothèse la décorrélation asymptotique des sources (21). On peut également obtenir la convergence de l'EQM

$$\mathbb{E} \left[\left(\hat{\theta}_{k,N}^{(t)} - \theta_k \right)^2 \right] \sim \frac{1}{N^3} \frac{6}{c^2} \frac{\sigma^2(\lambda_k + \sigma^2)}{\lambda_k^2 - \sigma^4 c}.$$

Le théorème 13 montre ainsi que les estimateurs G-MUSIC et MUSIC possède exactement les mêmes performances asymptotiques dans des scénarios à angles éloignés, et pour des sources décorrélées, ce qui renforce les conclusions sur la consistance obtenues dans la section 4.1.

5.2. Illustrations numériques

Dans cette dernière partie, nous donnons quelques résultats numériques illustrant les résultats des sections précédentes.

En figure 6, nous considérons $K = 2$ sources, d'angles $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 5 \times \frac{2\pi}{M}$, $M = 40$ capteurs et $N = 80$ échantillons. Le RSB est défini comme $\text{SNR} = -10 \log(\sigma^2)$ et la matrice des signaux sources \mathbf{S}_N est générée à l'aide d'entrées i.i.d. $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. La condition de séparation $\lambda_K > \sigma^2 \sqrt{c}$ a lieu à partir d'un RSB de 0 dB. Nous comparons les EQM empiriques des estimées G-MUSIC et MUSIC pour θ_1 . On remarque alors que les performances de G-MUSIC et MUSIC sont similaires, illustrant ainsi les conclusions du scénario à angles éloignés.

En figure 7, nous considérons les mêmes paramètres qu'en figure 6, à l'exception des angles sources qui sont maintenant fixés à $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 0, 25 \times \frac{2\pi}{M}$. On observe alors une différence importante entre les performances de G-MUSIC et MUSIC, notamment un gain de l'ordre de 4 dB autour des points de décrochage de la borne de Cramer-Rao, ce qui illustre la pertinence de G-MUSIC dans des scénarios en angles proches, mise en évidence par les résultats du théorème 11.

Finalement, en figure 8, nous considérons les mêmes paramètres qu'en figure 6, excepté l'ajout d'une corrélation significative entre les signaux sources, c'est-à-dire que la matrice signal $\mathbf{S}_N = \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{X}_N$ où $\mathbf{R} = [1, 0, 4; 0, 4, 1]$ et \mathbf{X}_N est à entrées i.i.d. $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Nous comparons l'EQM empirique pour G-MUSIC, ainsi que l'EQM

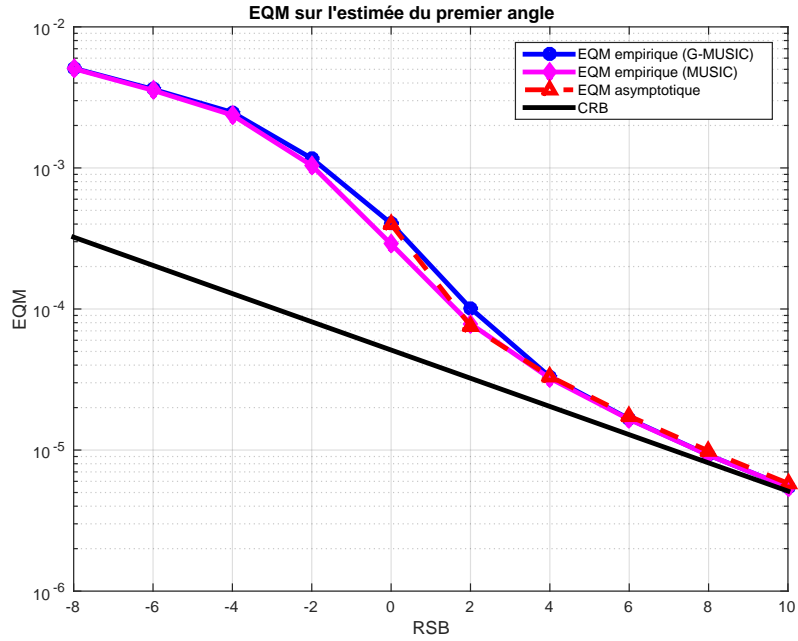


Figure 6. EQM empirique de $\hat{\theta}_{1,N}$ et $\hat{\theta}_{1,N}^{(t)}$ pour des angles éloignés

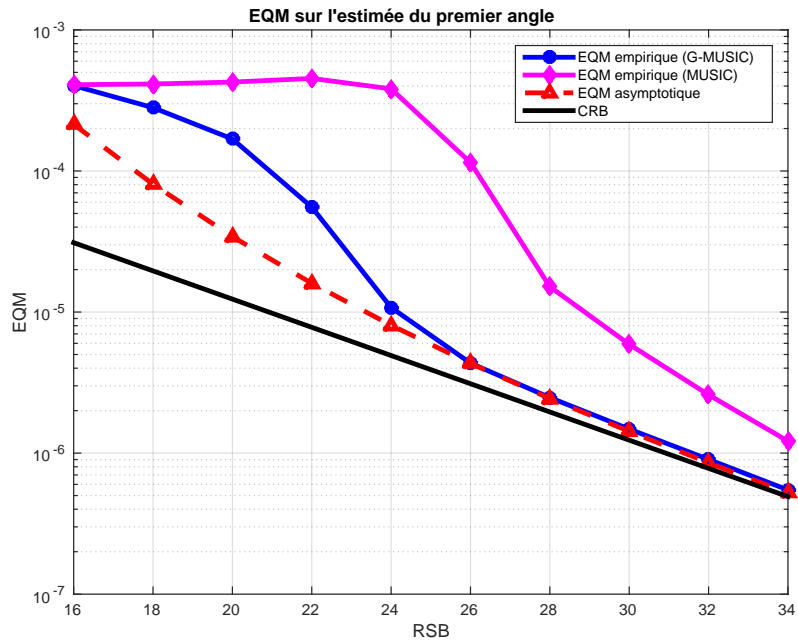


Figure 7. EQM empirique de $\hat{\theta}_{1,N}$ et $\hat{\theta}_{1,N}^{(t)}$ pour des angles sources proches

asymptotique donnée par le théorème 12, ainsi que l'EQM asymptotique de (Hachem *et al.*, 2012b), développée sous l'hypothèse de sources décorréelées. On peut donc constater la relative précision de (20), tandis que (22) n'est évidemment plus pertinente dans ce contexte.

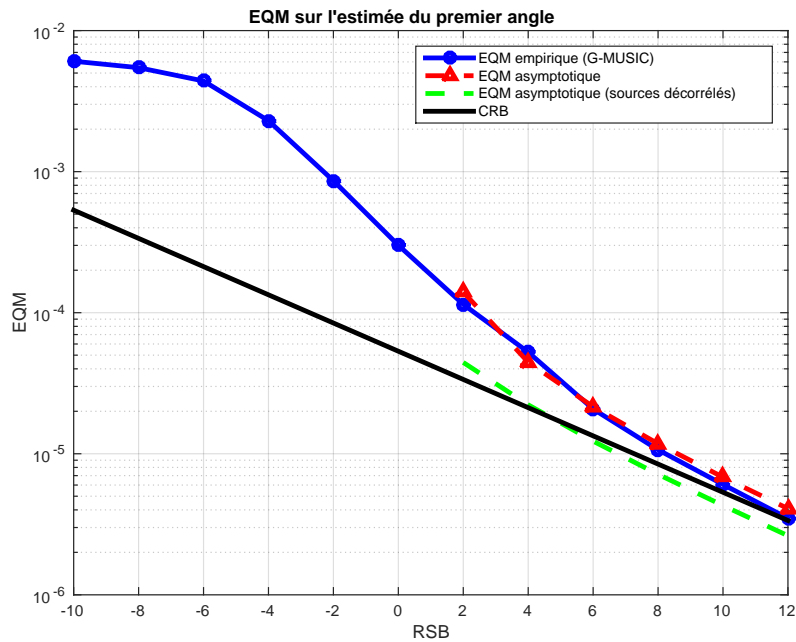


Figure 8. EQM empirique de $\hat{\theta}_{1,N}$ pour des sources corrélées

6. Conclusion

Dans cet article, nous avons synthétisé différents résultats concernant la comparaison des performances statistiques des méthodes G-MUSIC et MUSIC pour l'estimation d'angles d'arrivée, dans un contexte d'antennes à grand nombre M de capteurs, du même ordre de grandeur que le nombre d'échantillons N disponibles, traduit par le régime asymptotique où M, N convergent vers l'infini à la même vitesse. Deux scénarios d'intérêt ont été étudiés. Dans un premier scénario où les angles sources sont éloignés (c'est-à-dire fixes par rapport à M, N), nous avons montré que les méthodes MUSIC et G-MUSIC présentent les mêmes performances en termes de consistance et de normalité asymptotique. Dans un second scénario où les angles sources sont proches (c'est-à-dire avec une séparation angulaire de l'ordre de $\mathcal{O}(M^{-1})$), nous avons montré que G-MUSIC est toujours capable de séparer les angles sources de manière consistante, ce qui n'est plus le cas de la méthode MUSIC. La normalité asymptotique de la méthode G-MUSIC dans ce contexte a également été donnée, sous des conditions relativement générales, intégrant potentiellement une corrélation entre les signaux sources.

Remerciements

Ce travail a été soutenu par le projet ANR-12-MONU-0003 DIONISOS, par le projet « Jeunes Chercheurs » du GDR ISIS ainsi que par les gouvernements espagnol et catalan à travers les projets TEC2014-59255-C3-1-R et 2014SGR1567 respectivement.

Bibliographie

- Anderson T. (1958). *An introduction to multivariate statistical analysis* (vol. 2). Wiley New York.
- Bai Z., Silverstein J. (1998). No eigenvalues outside the support of the limiting spectral distribution of large-dimensional sample covariance matrices. *Annals of probability*, p. 316–345.
- Benaych-Georges F., Nadakuditi R. R. (2012). The singular values and vectors of low rank perturbations of large rectangular random matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 111, p. 120–135.
- Bianchi P., Debbah M., Maïda M., Najim M. (2011). Performance of statistical tests for single source detection using random matrix theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 57, n° 4, p. 2400-2419.
- Couillet R. (2015). Robust spiked random matrices and a robust G-MUSIC estimator. *To appear in Journal of Multivariate Analysis*.
- Couillet R., Kammoun A. (2014). Robust G-MUSIC. In *Signal processing conference (eu-sipco), 2014 proceedings of the 22nd european*, p. 2155–2159.
- Couillet R., Pascal F., Silverstein J. (2015). The random matrix regime of Maronna’s M-estimator with elliptically distributed samples. *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 139, p. 56–78.
- Hachem W., Loubaton P., Mestre X., Najim J., Vallet P. (2012a). Large information plus noise random matrix models and consistent subspace estimation in large sensor networks. *Random Matrices: Theory and Applications*, vol. 1, n° 2.
- Hachem W., Loubaton P., Mestre X., Najim J., Vallet P. (2012b). A subspace estimator for fixed rank perturbations of large random matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 114, p. 427–447. (arXiv:1106.1497)
- Jonhson B., Abramovich Y., Mestre X. (2008). Music, g-music, and maximum-likelihood performance breakdown. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, n° 8, p. 3944-3958.
- Krichtman S., Nadler B. (2009). Non-parametric detection of the number of signals: hypothesis testing and random matrix theory. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, n° 10, p. 3930-3941.
- Loubaton P., Vallet P. (2011). Almost sure localization of the eigenvalues in a gaussian information plus noise model. application to the spiked models. *Electron. J. Probab.*, vol. 16, p. 1934–1959.
- Marchenko V., Pastur L. (1967). Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 1, p. 457.

- Mestre X., Lagunas M. (2008). Modified subspace algorithms for doa estimation with large arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, n° 2, p. 598–614.
- Nadakuditi R., Edelman A. (2008). Sample eigenvalue based detection of high-dimensional signals in white noise using relatively few samples. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, n° 7, p. 2625-2637.
- Schmidt R. (1986). Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, n° 3, p. 276–280.
- Stoica P., Nehorai A. (1989). Music, maximum likelihood, and cramer-rao bound. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, n° 5, p. 720–741.
- Thomas J. K., Scharf L. L., Tufts D. W. (1995). The probability of a subspace swap in the svd. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, n° 3, p. 730–736.
- Vallet P., Loubaton P., Mestre X. (2012, Feb.). Improved Subspace Estimation for Multivariate Observations of High Dimension: The Deterministic Signal Case. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 58, n° 2. (arXiv: 1002.3234)
- Vallet P., Mestre X., Loubaton P. (2015). Performance analysis of an improved music doa estimator. *Submitted*. (arXiv:1502.02501)
- Vinogradova J., Couillet R., Hachem W. (2013). Statistical inference in large antenna arrays under unknown noise pattern. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, n° 22, p. 5633–5645.

Article soumis le 29/03/2015

Accepté le 19/11/2015