



***7ème école d'été de Peyresq
en traitement du signal et des images***

Peyresq, du 24 au 30 juin 2012

**LA CHAÎNE NUMÉRIQUE 3D : DE L'ACQUISITION À LA
COMPRESSION DES DONNÉES**

NOTES DE COURS

**DES COURBES AUX SURFACES
MOHAMED DAUDI**

PROFESSEUR TELECOM LILLE 1, LIFL

Moteurs de Recherche 3D



Résultats de la banque d'images 3D Tri par pertinence Résultats : 1 à 12 sur un grand nombre pour " chair " (0,2 secondes)



Chair - Barcelona Chair
par [Adam](#)
Barcelona Chair 1929 Ludwig...
[Télécharger dans Google SketchUp](#)



LC-2 (Chair)
par [Archi Maniac](#)
One of the most famous modern...
[Télécharger dans Google SketchUp](#)



Barcelona Chair
par [acad whiz](#)
EDITED: Added the support...
[Historique](#)
[Télécharger dans Google SketchUp 6](#)



Eames Lounge Chair
par [Mart](#)
Lounge Chair and Ottoman by...
[Télécharger dans Google SketchUp 6](#)



Egg Chair
par [Mart](#)
Egg Chair by Arne Jacobsen...
[Télécharger dans Google SketchUp 6](#)



Nelson@ Coconut Chair from...
par [SmartFurniture.com](#)
Available at...
[Télécharger dans Google SketchUp 6](#)



Swan chair
par [Leo Arias](#)
Designed by Arne Jacobsen. ...
[Télécharger dans Google SketchUp](#)



chair silla
par [ketchup](#)
silla clasica-----classic...
[Télécharger dans Google SketchUp 6](#)



Eames Lounge Chair & Ottoman...
par [SmartFurniture.com](#)
The Eames Lounge Chair and...
[Historique](#)
[Télécharger dans Google SketchUp 8](#)



Three Minute Custom Aeron@...
par [SmartFurniture.com](#)
You can now design your own...
[Télécharger dans Google SketchUp 7](#)



LEM Chair
par [Mart](#)
LEM Chair LEM LAPALMA
[Télécharger dans Google SketchUp 6](#)



Nelson Swag Leg Chair by...
par [SmartFurniture.com](#)
The Nelson Swag Leg Chair by...
[Télécharger dans Google SketchUp 6](#)

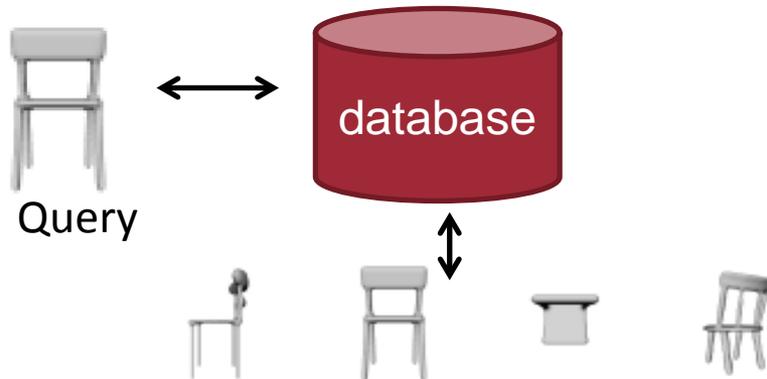


Page de résultats : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Suivante

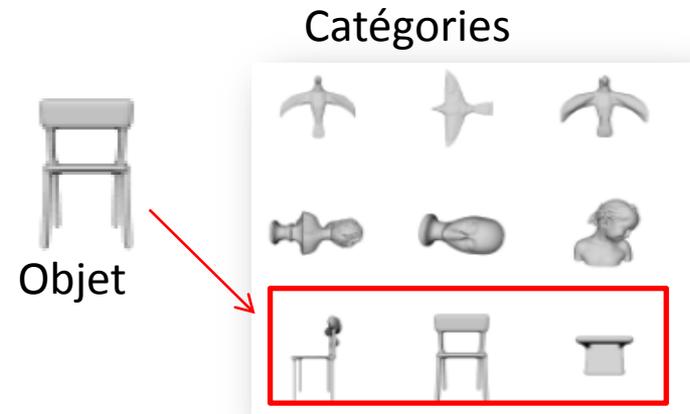
Moteurs de recherche 3D

Recherche

Par le contenu



Classification



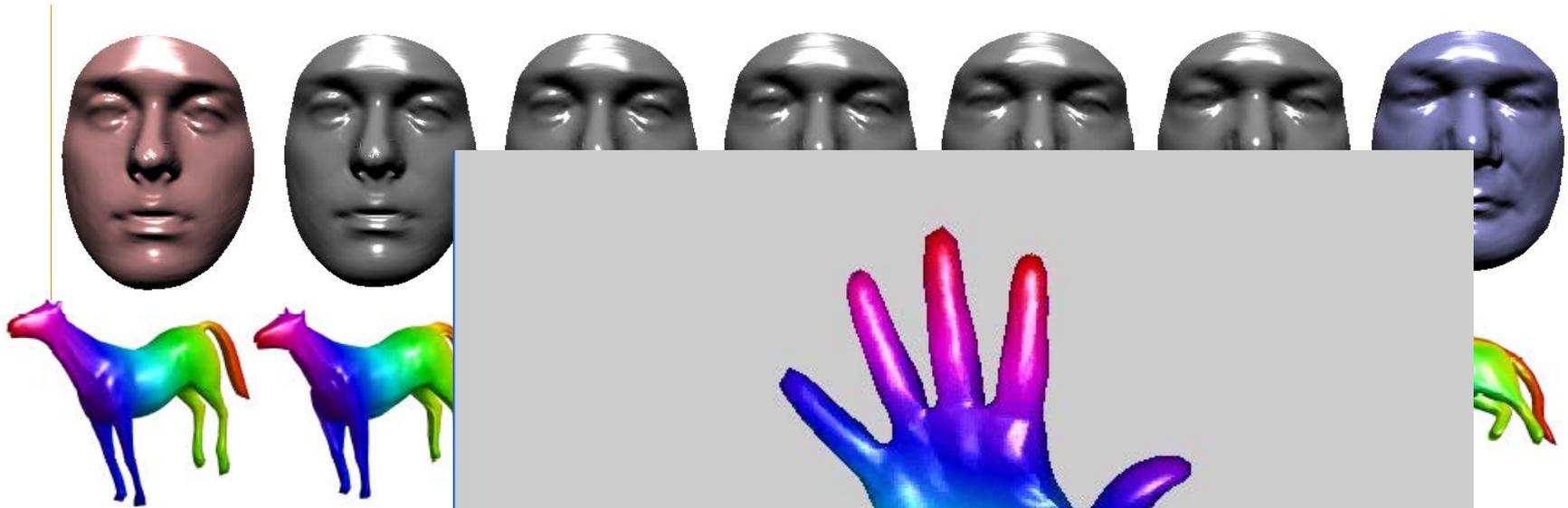
- ❑ Trouver des descripteurs invariants “robustes”.
- ❑ Trouver de “bonnes” distances, facile à calculer et rapides.
- ❑ Passage à l’échelle.

Analyse des surfaces faciales 3D

- ❑ Des scanners disponibles
 - Laser/structured-light/ToF/Passive stereo/etc.



Espace de formes

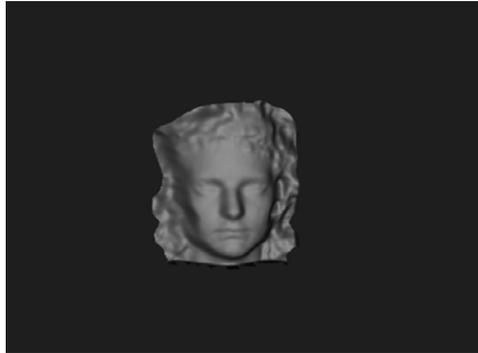


- ❑ Définir des espaces où les éléments sont des objets (courbes, surfaces, etc ..).
- ❑ Modéliser les déformations par les chemins géodésiques.

Statistique dans l'espace des formes

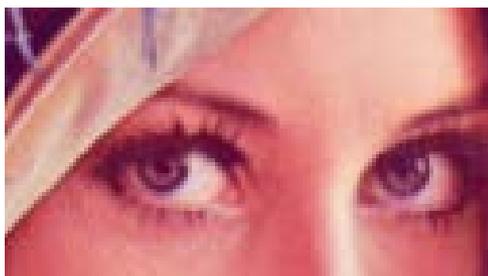
- ❑ Scanner un nombre important de corps humains
 - Différentes poses
 - Différentes personnes
- ❑ Calculer la mise en correspondance
- ❑ Calculer des statistiques (moyennes, PCA, etc ..)

Nouveaux systèmes d'acquisition



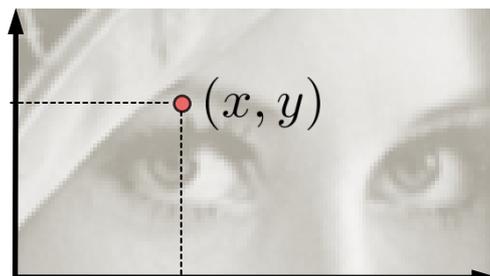
Formes 3D vs images

Géométrie



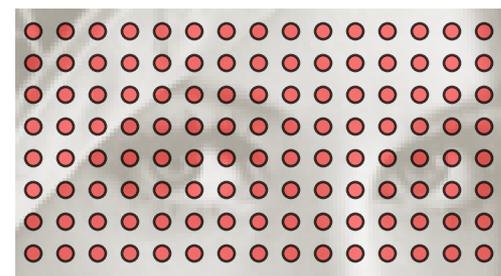
Euclidean

Paramétrisation

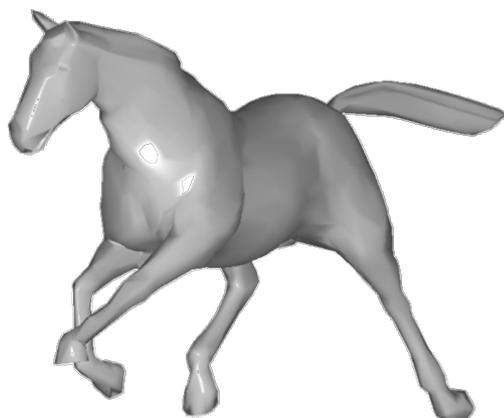


Globale

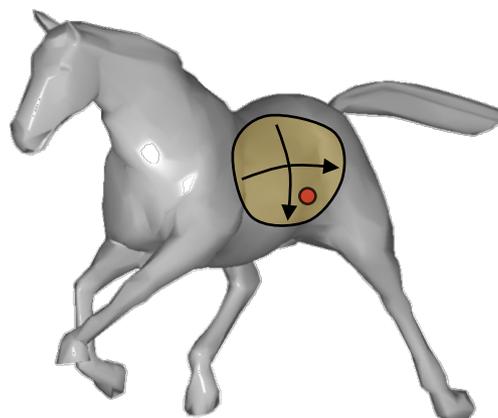
Echantillonnage
uniforme



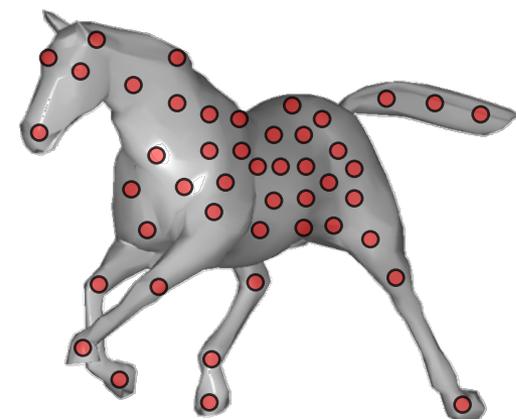
Uniform Cartesian



Non-Euclidienne



Locale



Echantillonnage
uniforme non
définie

Courtesy of Michael Bronstein

Formes 3D vs images

Représentation

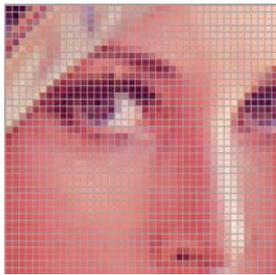
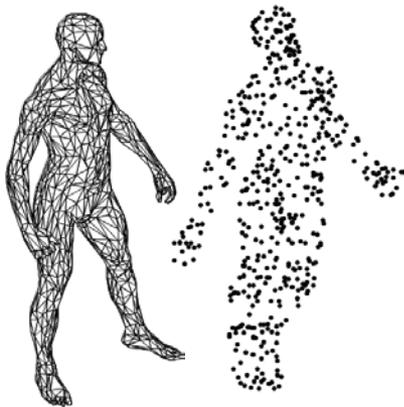


Tableau de pixels



Nuage de points,
maillage, etc, etc.

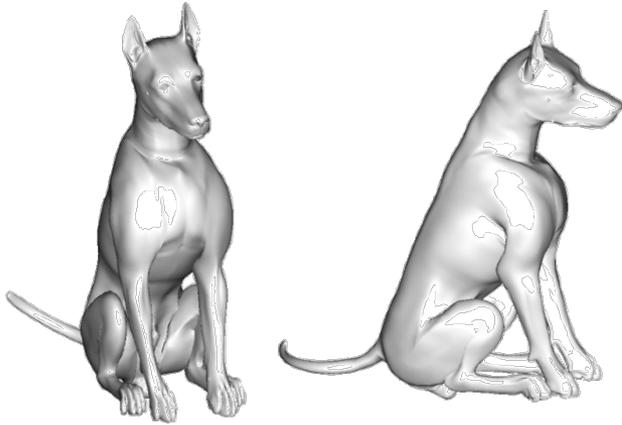
Déformations



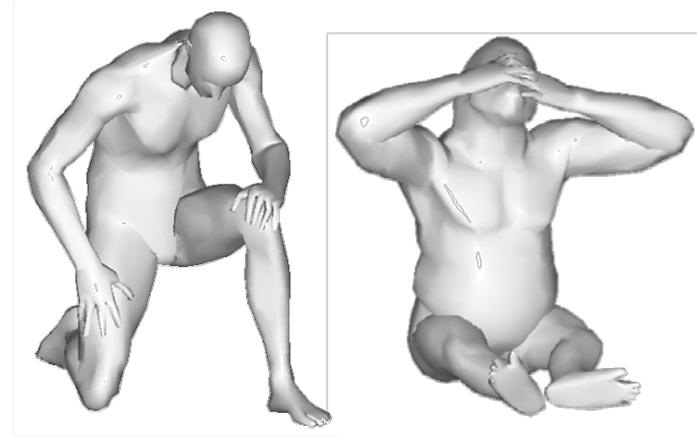
Rotation, affine,
projective, etc.

Richesse des
déformations non-
rigides

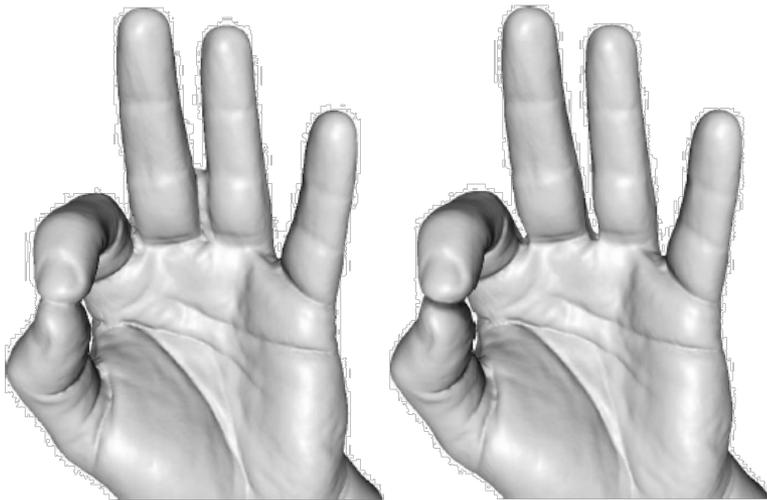
Challenges



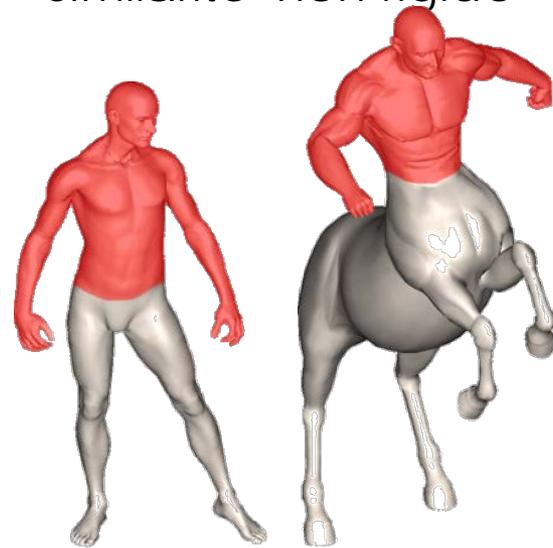
Similarité rigide



Similarité non-rigide



Similarité topologique



Similarité partielle

Courtesy of Michael Bronstein

Outils



Géométrie différentielle



Géométrie Riemannienne



Pierre Simon de Laplace
(1749-1827)

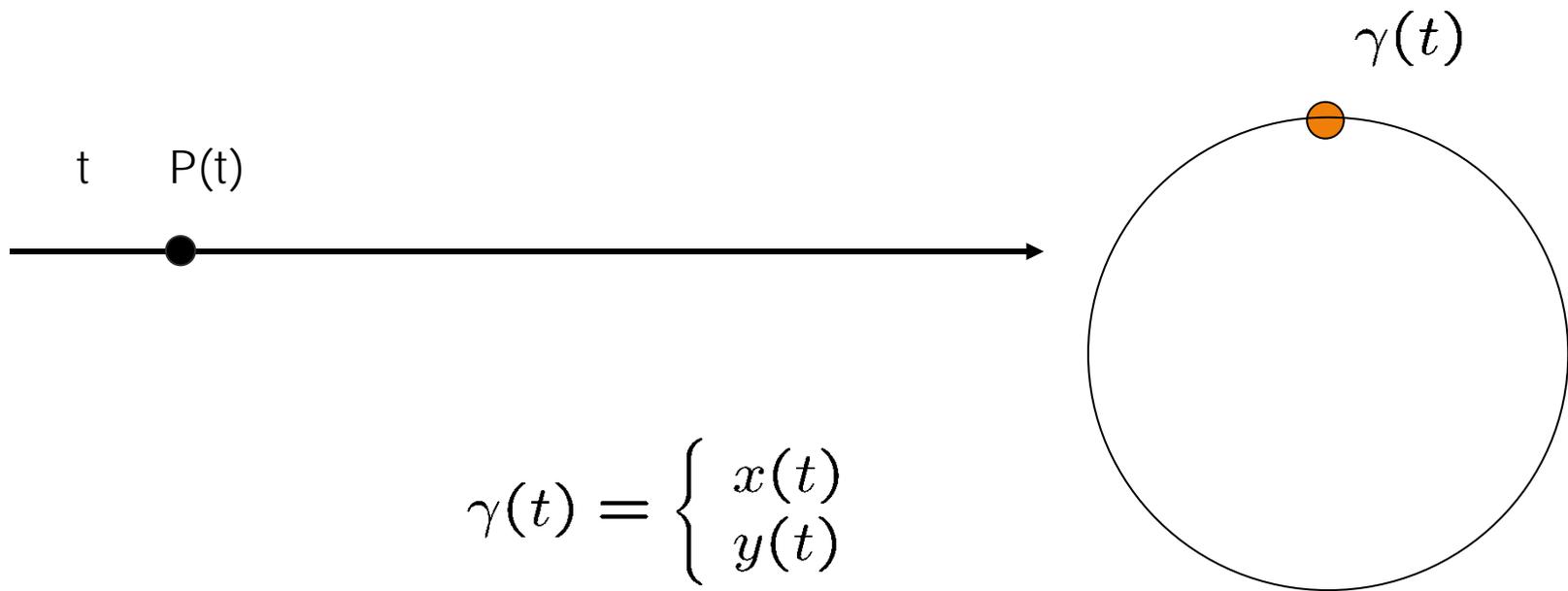


Eugenio Beltrami
(1835-1899)

Géométrie spectrale

Courbes 2D

- Un seul paramètre



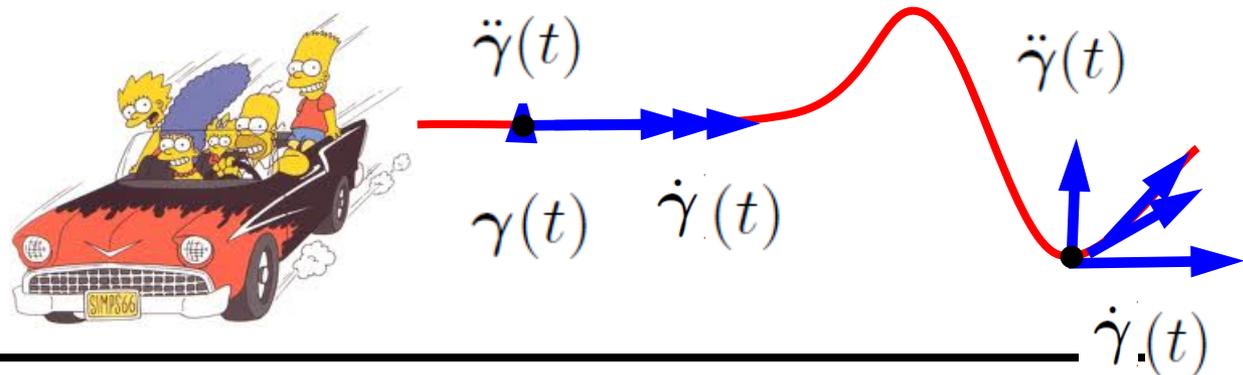
$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$$

arc length:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

Les courbes

- ❑ Soit $\gamma(t)$ une courbe paramétrisée par l' **abscisse curviligne**.
- ❑ $\gamma(t)$ est **la trajectoire** de la voiture qui roule à une vitesse constante.
- ❑ $\dot{\gamma}(t)$ est **le vecteur vitesse**, il indique le taux du changement de la position, il est tangent à la courbe.
- ❑ $\ddot{\gamma}(t)$ indique **le vecteur accélération**, perpendiculaire à la courbe.
- ❑ **La courbure** $k = \|\ddot{\gamma}(t)\|$ d'une courbe est une *mesure* quantitative du caractère « plus ou moins courbé » de cette courbe.



Courbes 3D

- Un seul paramètre

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

arc length:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du$$

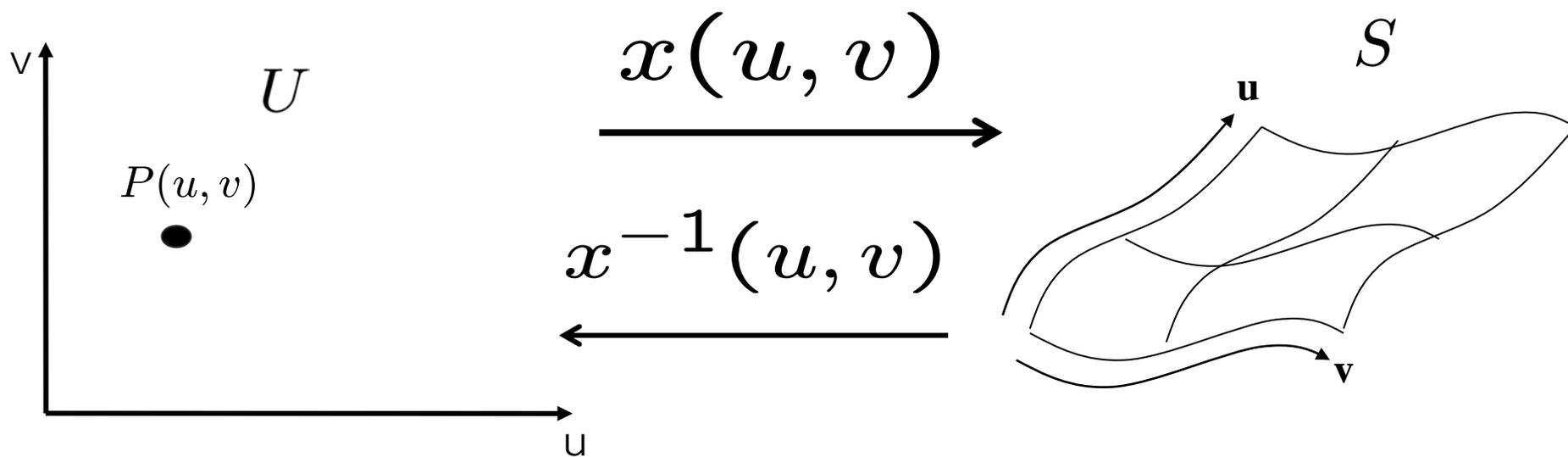
C'est quoi une surface ?



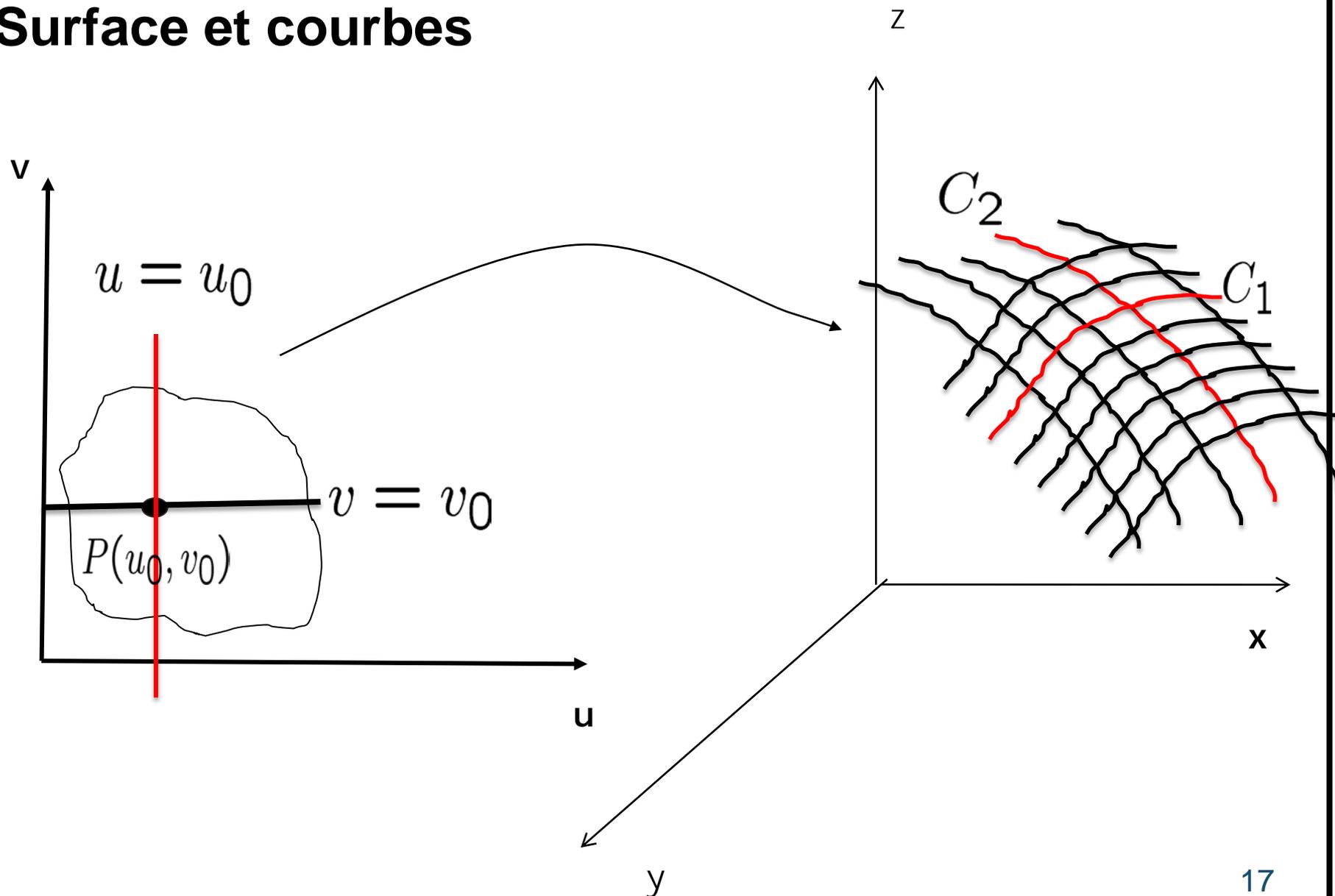
La surface.

On entend par surface tout ce qui enveloppe les corps; ne pas trop se fier aux surfaces, elles sont souvent trompeuses.

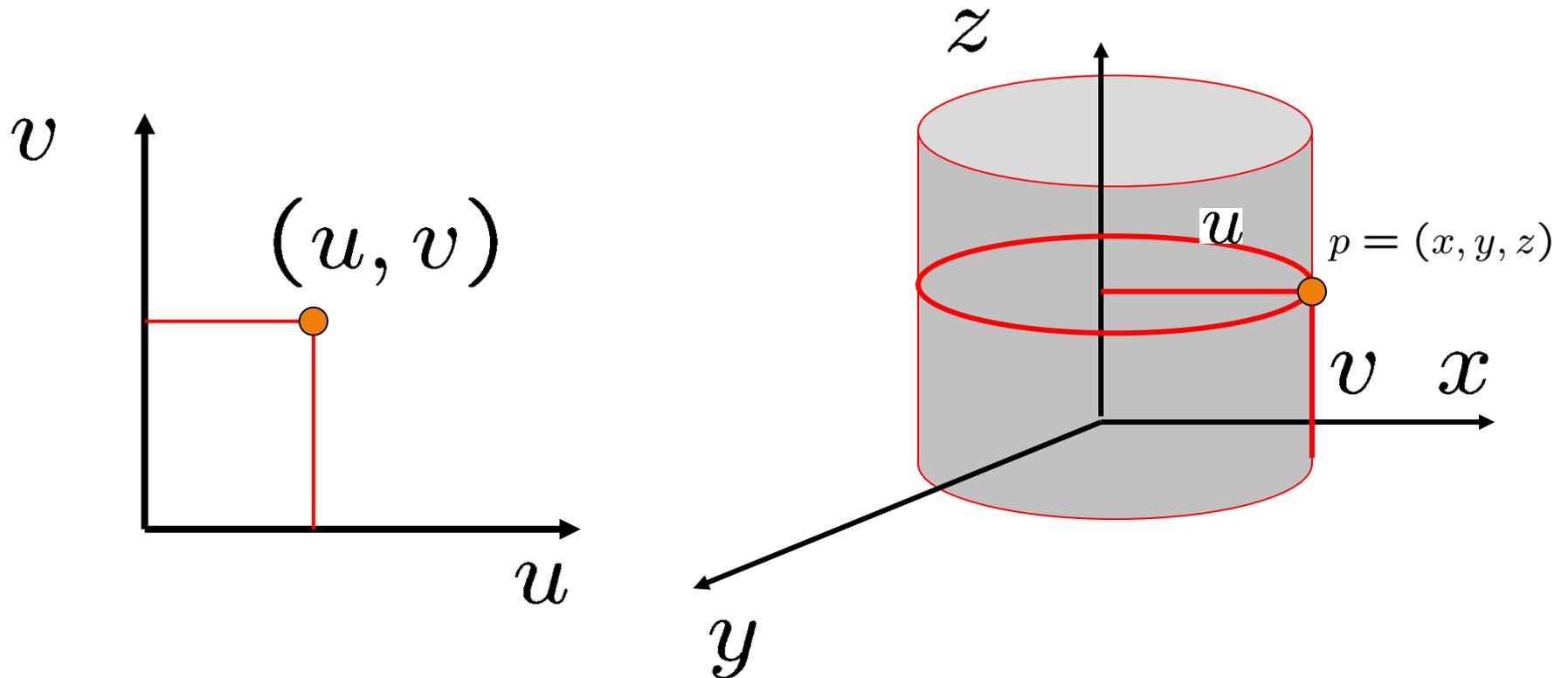
Paramétrisation d'une surface



Surface et courbes



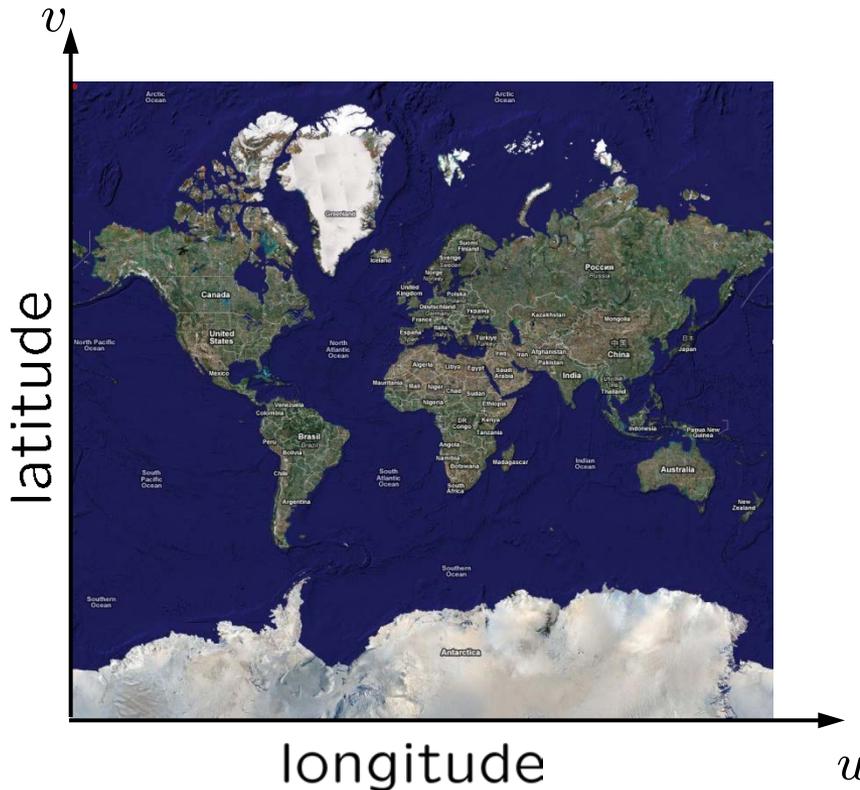
Exemple : les coordonnées cylindriques



$$x(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$$

$$U(u, v) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < 2\pi, 0 < v < 1\}$$

Exemple : paramétrisation de la terre



$$U = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \times [-\pi, \pi]$$

$$x = r \cos v \cos u$$

$$y = r \sin v \cos u$$

$$z = r \sin u$$

Plan tangent et normal

- En chaque point $q \in U$, nous définissons un **système de coordonnées locales** :

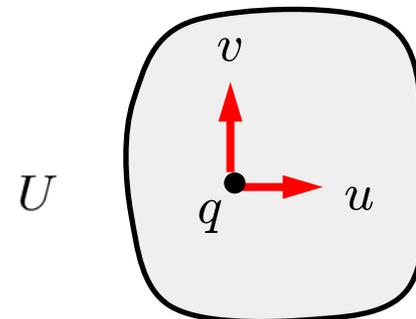
$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$$

- Une paramétrisation est dite **régulière** si x_u et x_v sont linéairement indépendants.

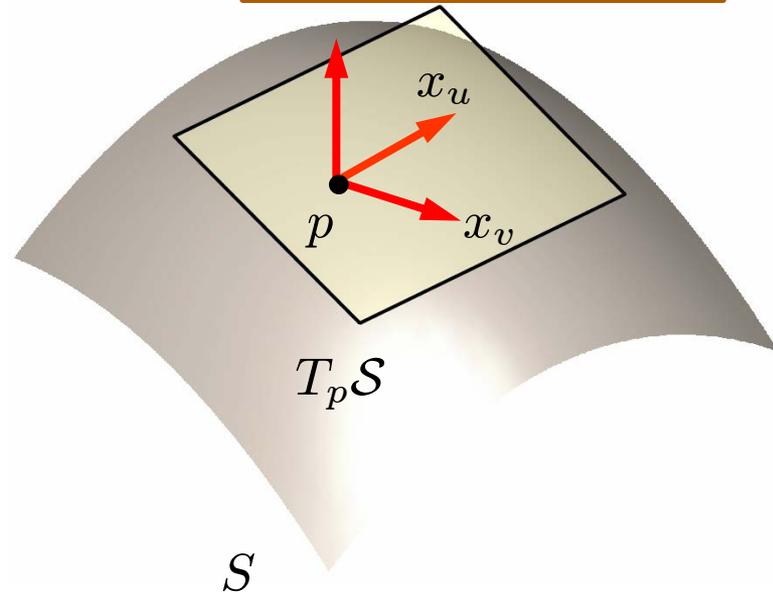
- Le plan $T_p \mathcal{S} = \text{span}\{x_u, x_v\}$ est le **plan tangent** au point $p = x(q)$.

- Une approximation Euclidienne de la surface.

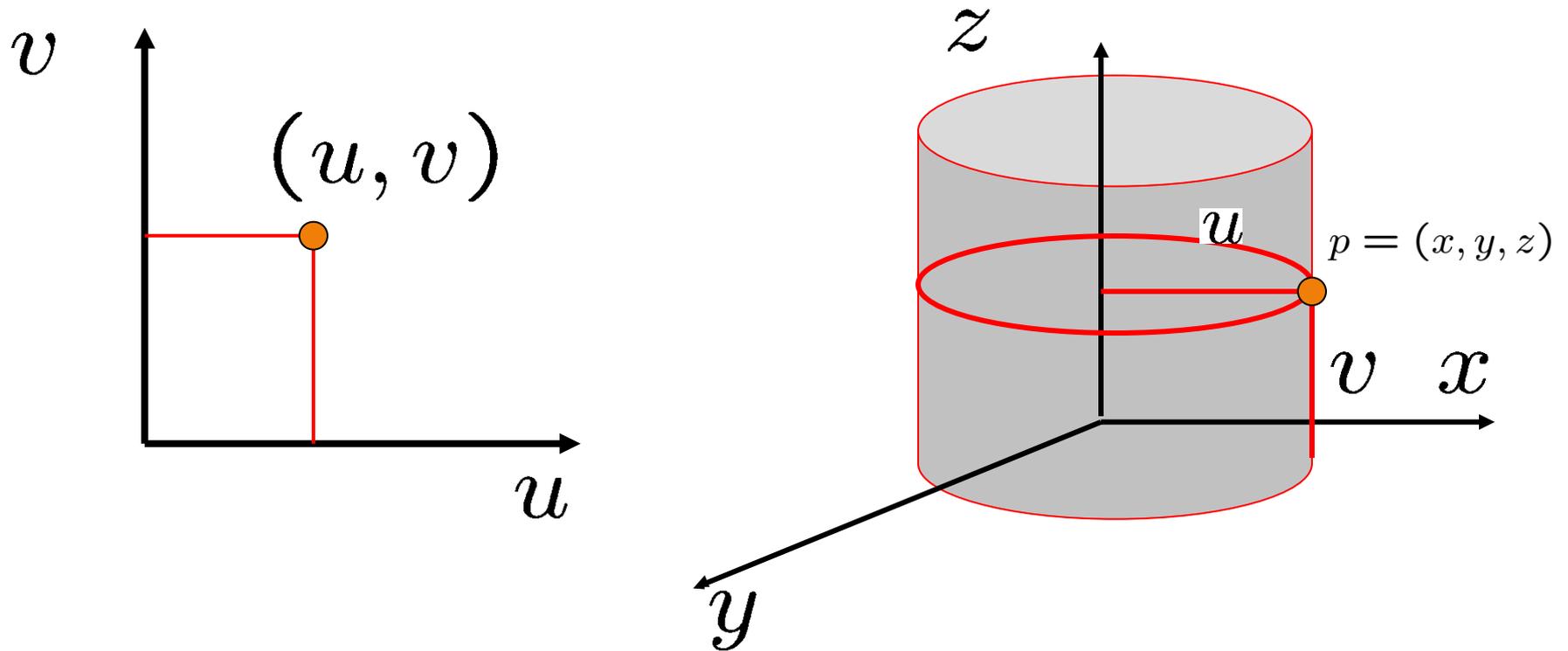
- $N \perp T_p \mathcal{S}$ est la **normale** à la surface.



$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$$



Exercice : coordonnées cylindriques



$$U(u, v) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < 2\pi, 0 < v < 1\}$$

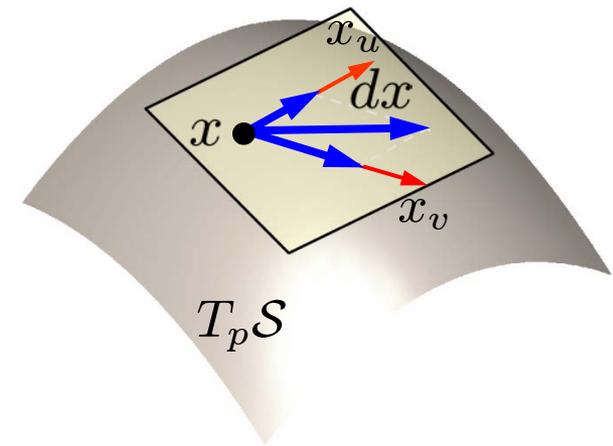
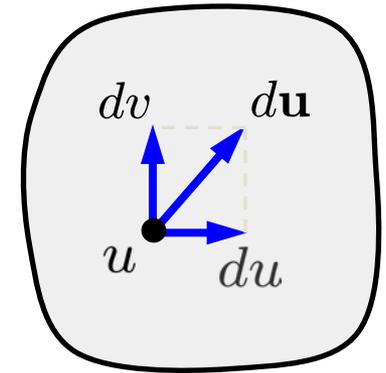
$$x(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$$

La première forme fondamentale

- Un déplacement infinitésimal $d\mathbf{u}$
- Displace x sur la surface de

$$\begin{aligned} dx &= x(u + du) - x(u) \\ &= x_u du + x_v dv \\ &= J d\mathbf{u} \end{aligned}$$

- J est la matrice Jacobienne de colonne x_u et x_v



Exemple : paramétrisation de la terre

- Paramétrisation

$$x = r \cos v \cos u$$

$$y = r \sin v \cos u$$

$$z = r \sin u$$

- Calculer la matrice Jacobienne ?

La première forme fondamentale

□ **La longueur** du déplacement $d\ell^2 = \|dx\|^2 = du^\top J^\top J du$
 $= du^\top G du$

□ G est une matrice 2x2 **symétrique définie positive**,

□ Les éléments G de sont des **produits scalaires**

$$g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$$

□ La forme quadratique :

$$d\ell^2 = du^\top G du$$

est la première forme fondamentale

La première forme fondamentale

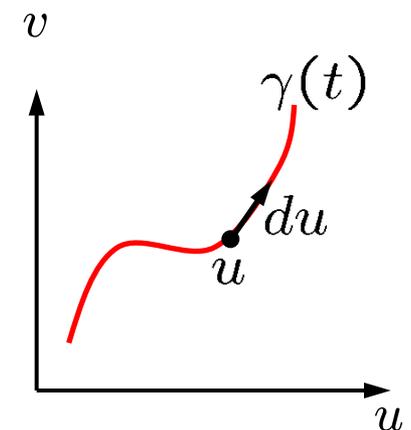
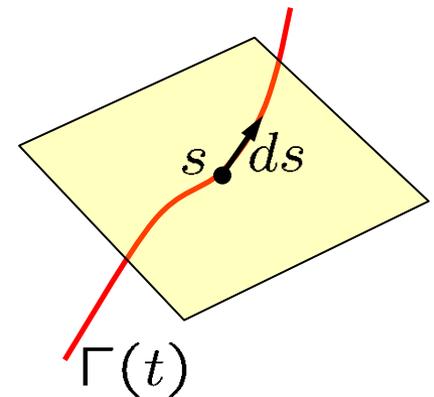
- ❑ $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un chemin dans le domaine de paramétrisation.
- ❑ $\Gamma = x \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$ correspond au chemin sur la surface.
- ❑ L'incrémentantation du paramètre t par, dt induit un déplacement dans le domaine de paramétrisation de :

$$du = \dot{\gamma}(t)dt$$

- ❑ Le déplacement sur la surface est de

$$ds = x_u du + x_v dv = J d\mathbf{u}$$

- ❑ J est le Jacobien de la paramétrisation.



La première forme fondamentale (Do Carmo)

- Définition : La restriction du produit euclidien de \mathbb{R}^n au plan tangent $T_p\mathcal{S}$ à \mathcal{S} en p est dite **la I-forme fondamentale** de la surface \mathcal{S} en p .
- La **I-forme fondamentale** d'une surface est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $T_p\mathcal{S}$
- **La matrice associée** à cette forme dans la base (x_u, x_v) est définie par :

$$[I_p] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = \|x_u\|^2$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = \|x_v\|^2$$

Première forme fondamentale

- Paramétrisation

$$x = r \cos v \cos u$$

$$y = r \sin v \cos u$$

$$z = r \sin u$$

- Calculer la matrice Jacobienne ?

- Calculer la première forme fondamentale ?

La première forme fondamentale

- Exercice : Calcul de l'aire d'une région R d'une surface S ?

La première forme fondamentale

- ❑ Soit une courbe définie dans le domaine de paramétrage:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow U$$

- ❑ Son image sur la surface est :

$$\Gamma = x \circ \gamma$$

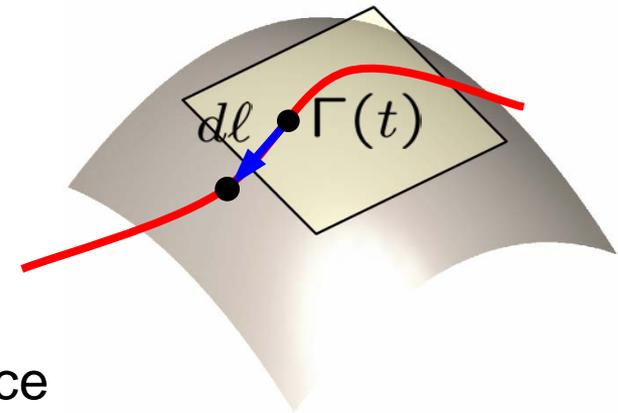
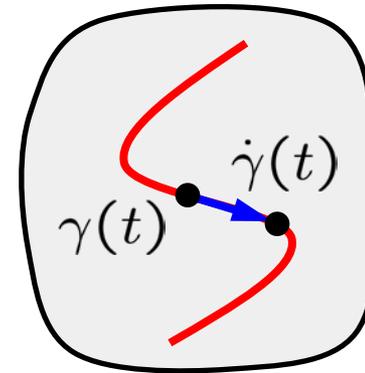
- ❑ Un déplacement du paramètre t de dt :

Génère un déplacement de :

$$\begin{aligned} d\gamma &= \gamma(t + dt) - \gamma(t) \\ &= \dot{\gamma}(t)dt \end{aligned}$$

- ❑ La longueur de cette courbe sur la surface

$$d\ell = \sqrt{\dot{\gamma}(t)^T G(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)} dt$$



Géométrie intrinsèque

- La longueur d'une courbe

$$L(\Gamma) = \int_{\Gamma} dl = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}(t)^T G(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)} dt$$

- Le point de vue différentielle

$$ds^2 = E(du)^2 + 2F dudv + G(dv)^2$$

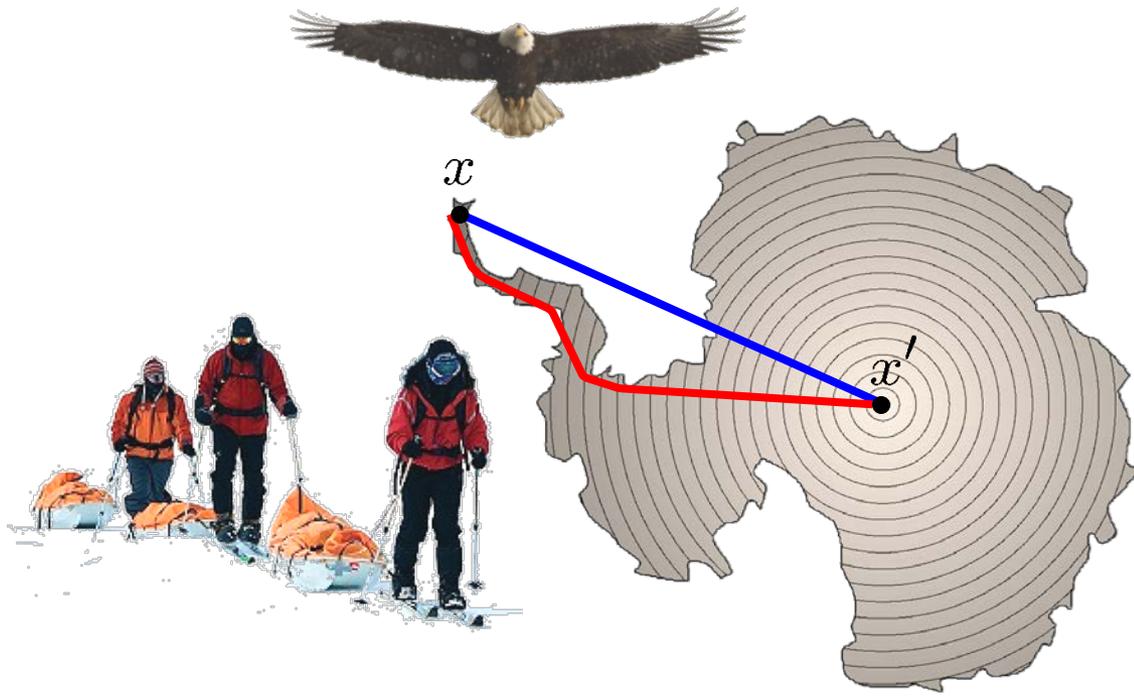
- Induit **une métrique** (intrinsèque)

$$d_X(x_1, x_2) = \min_{\substack{\Gamma \\ \Gamma(0)=x_1, \Gamma(1)=x_2}} L(\Gamma)$$

- La **géométrie intrinsèque** est complètement décrite par la **première forme fondamentale**.

- La première forme est **invariante aux isométries**.

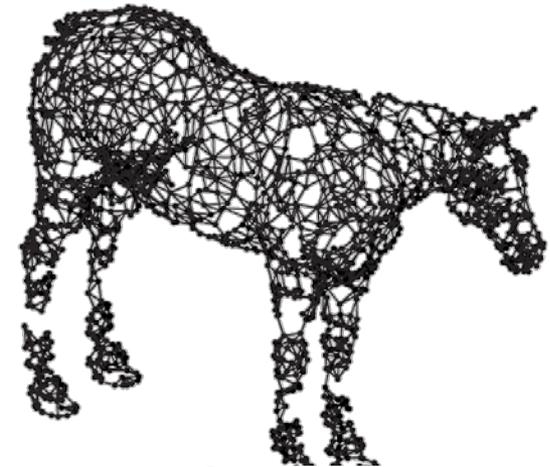
Distance géodésique v.s distance Euclidienne



$$d_{\mathbb{R}^2|X}(x, x') = d_{\mathbb{R}^2}(x, x') \quad d_X(x, x') = \inf_{\Gamma(x, x') \subset X} L(\Gamma(x, x'))$$

Courtesy of Michael Bronstein

Maillages et graphes



□ Un maillage triangulaire est une

- Une géométrie $M = (V, E, F)$
- Une topologie $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$

□ Topologie

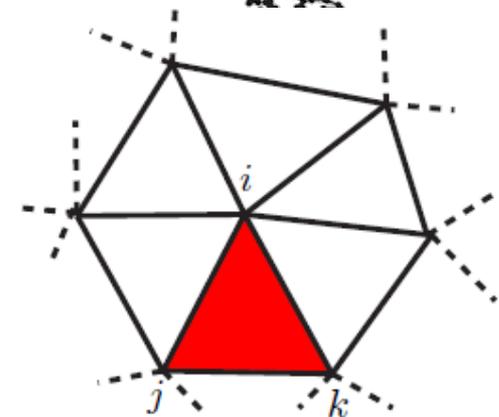
(0D) Vertices: $V \simeq \{1, \dots, n\}$.

(1D) Edges: $E \subset V \times V$.

Symmetric: $(i, j) \in E \Leftrightarrow i \sim j \Leftrightarrow (j, i) \in E$

Compatibility: $(i, j, k) \in F \Leftrightarrow (i, j), (j, k), (k, i) \in E$.

$\forall (i, j) \in E, \exists (i, j, k) \in F$.

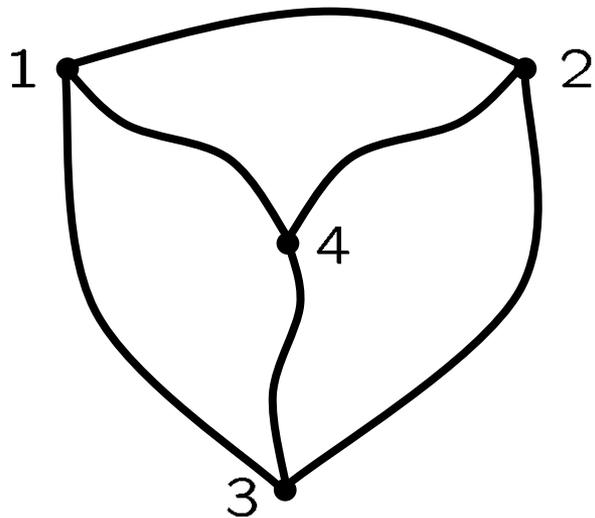


□ Réalisation géométrique $\mathcal{M}: \forall i \in V, x_i \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \{x_i \mid i \in V\}$.

$\mathcal{E} \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{(i,j) \in E} \text{Conv}(x_i, x_j) \subset \mathbb{R}^3$.

$\mathcal{F} \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{(i,j,k) \in F} \text{Conv}(x_i, x_j, x_k) \subset \mathbb{R}^3$.

Exemple d'un maillage

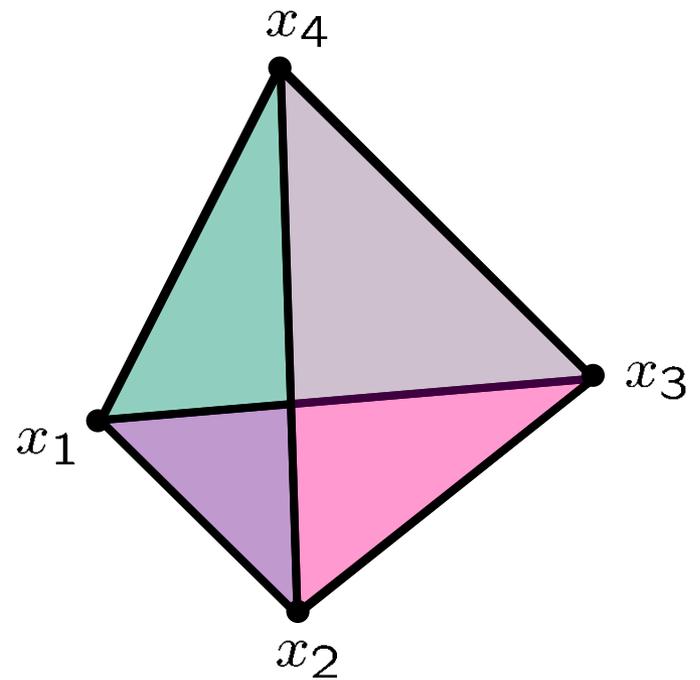


Vertices	1	2	3	4
----------	---	---	---	---

Edges	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
	(4, 2)	(4, 3)	(2, 3)

Faces	(2, 4, 3)	(1, 4, 2)
	(3, 4, 1)	(2, 3, 1)

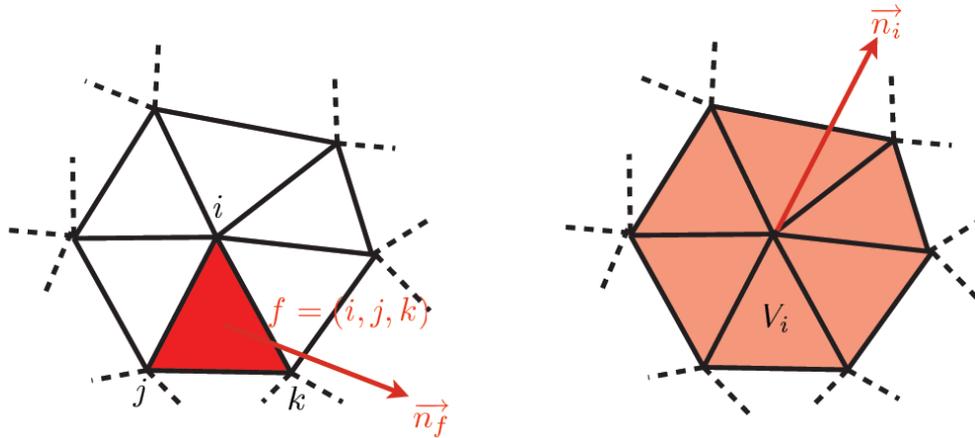
Topologie



Coordinates	(0.5, 0.86, 0)
	(0, 0, 0)
	(1, 0, 0)
	(0.5, 0.28, 0.86)

Geométrie

Exemple de calcul de la normale



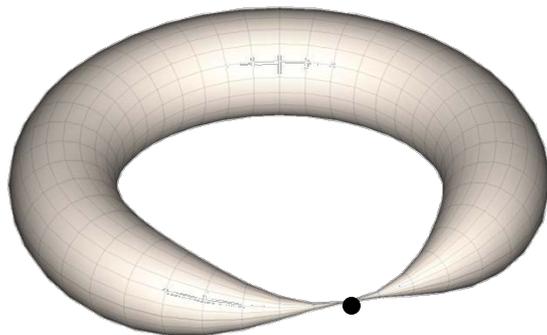
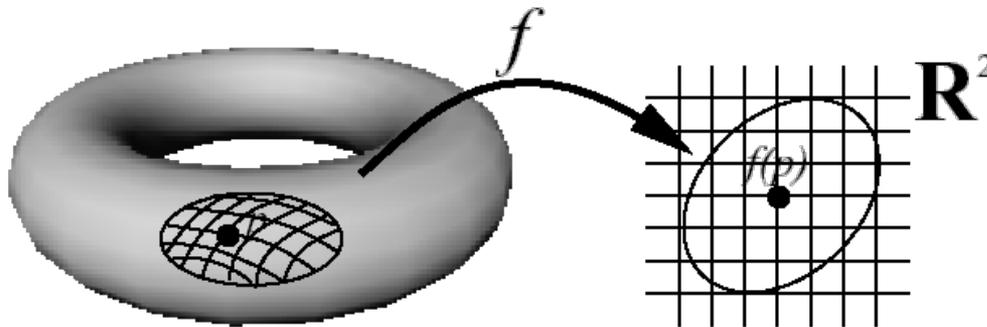
□ Calcul de la normale

$$\forall f = (i, j, k) \in F, \quad \vec{n}_f \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{(x_j - x_i) \wedge (x_k - x_i)}{\|(x_j - x_i) \wedge (x_k - x_i)\|}$$

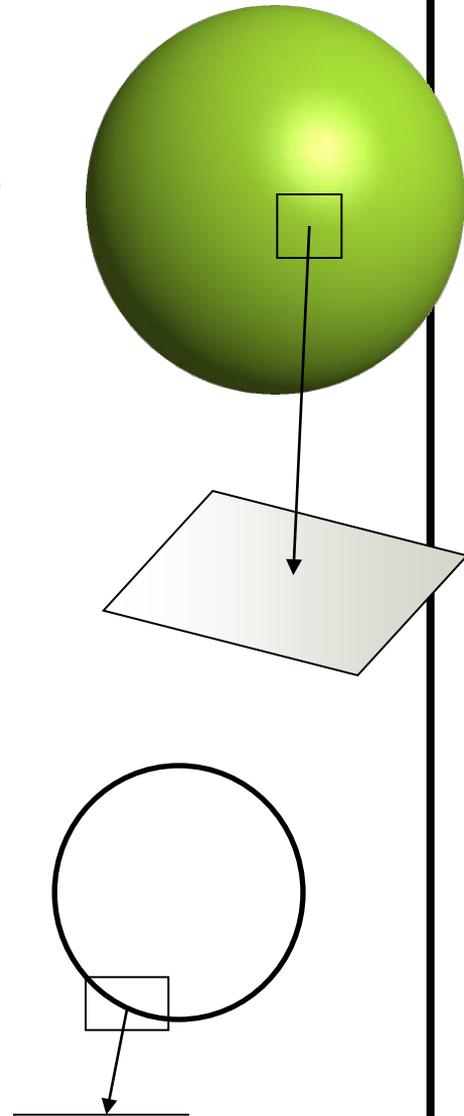
$$\forall i \in V, \quad \vec{n}_i \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{f \in F_i} \vec{n}_f}{\|\sum_{f \in F_i} \vec{n}_f\|}$$

Surfaces et variétés (manifolds)

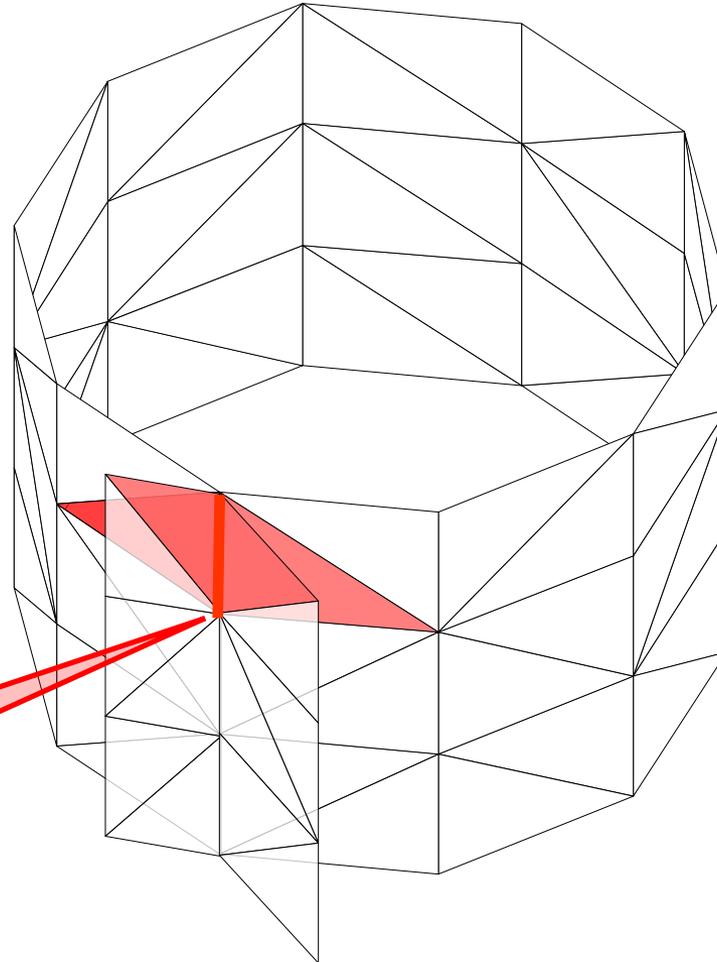
- Un espace topologique qui localement ressemble (homéomorphe) à \mathbb{R}^n est une variété de dimension n .



Not a manifold



Surfaces et variétés (manifolds)



**Arrête partagé
par 4 triangles**

Un maillage qui n'est pas une variété

Distance

- Nous définissons **une fonction distance** $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui mesure les distances locales :

$$L(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\|_2$$

- **Le chemin** entre deux points $x_i, x_j \in X$ est l'ensemble des segments connectés :

$$\begin{aligned}\Gamma(x_i, x_j) &= \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subset E \\ &= \{(x_{i_1}, x_{i_2}), (x_{i_2}, x_{i_3}), \dots, (x_{i_{k-1}}, x_{i_k}), (x_{i_k}, x_{i_{k+1}})\}\end{aligned}$$

Où $x_{i_1} = x_i$ et $x_{i_{k+1}} = x_j$

- **La longueur d'un chemin = la somme des longueurs des segments** est définie par :

$$L(\Gamma(x_i, x_j)) = \sum_{n=1}^k L(e_n) = \sum_{n=1}^k L(x_{i_n}, x_{i_{n+1}})$$

Distance géodésique

- Le plus court chemin entre deux points $x_i, x_j \in X$

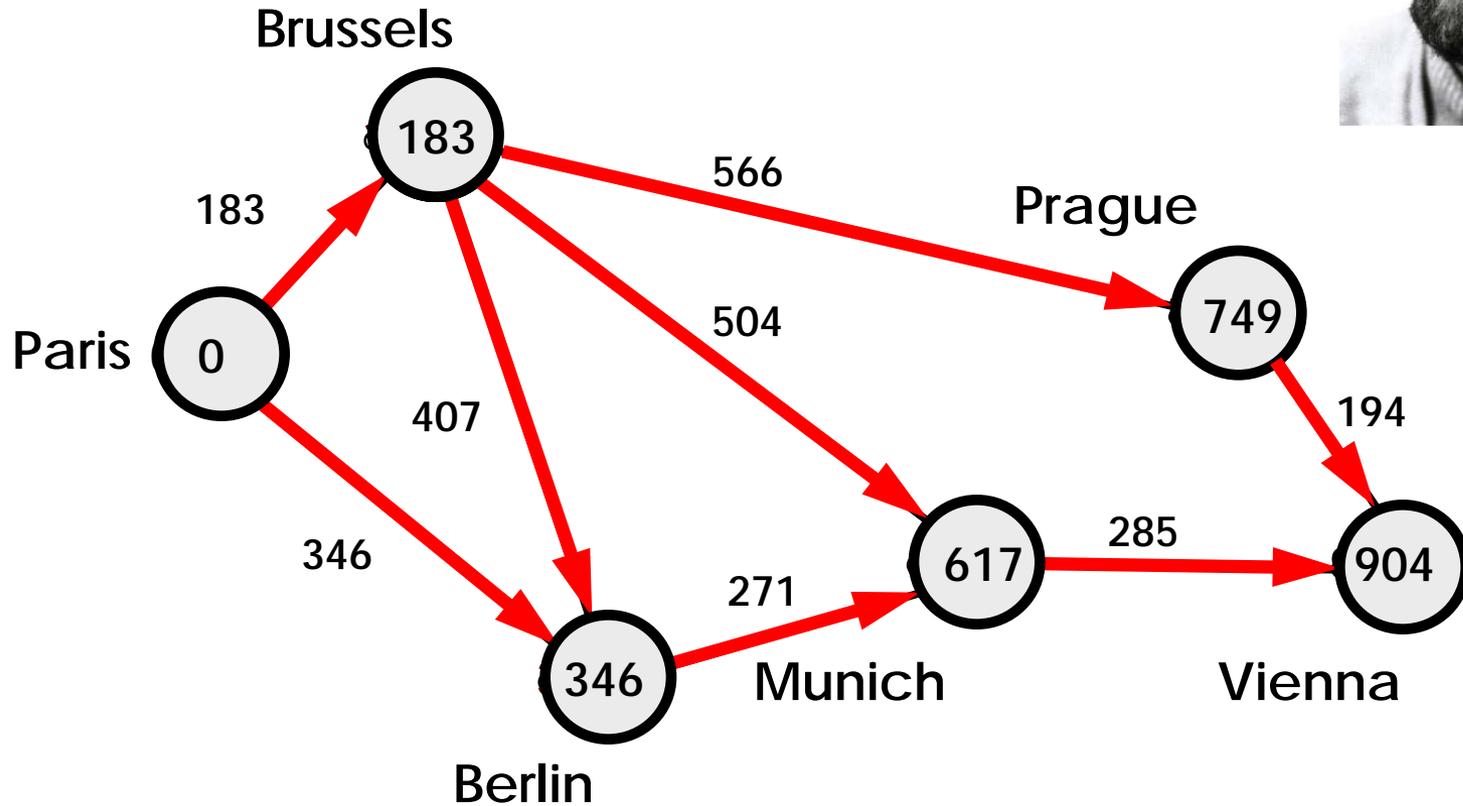
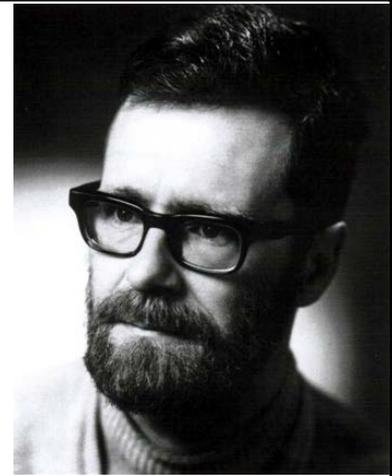
$$\Gamma^*(x_i, x_j) = \arg \min_{\Gamma(x_i, x_j)} L(\Gamma(x_i, x_j))$$

□

$$d_L(x_i, x_j) = \min_{\Gamma(x_i, x_j)} L(\Gamma(x_i, x_j))$$

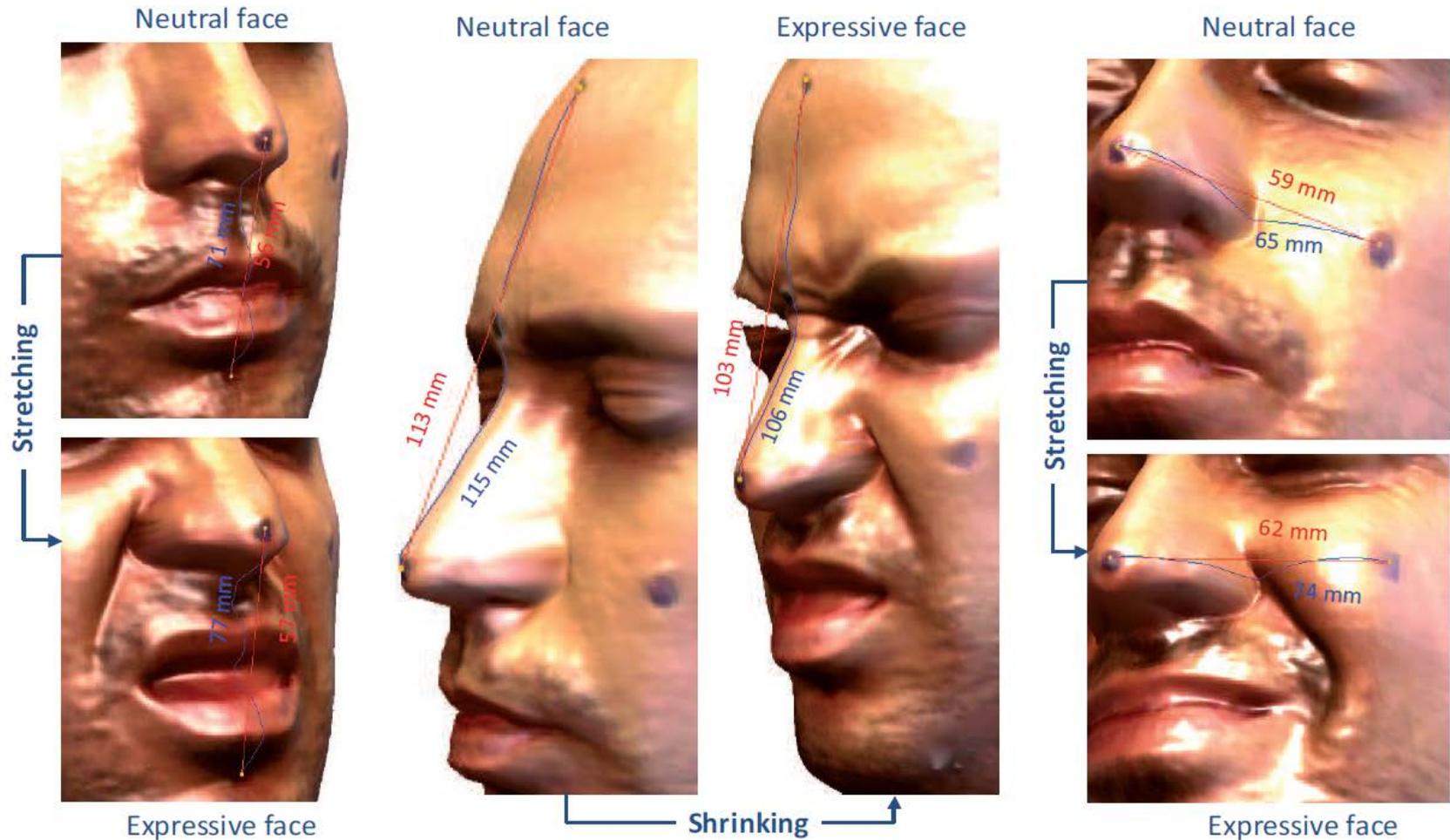
- Objectif approximer la distance géodésique par $d_X \approx d_L$
- **Problème du plus courts chemin** : calculer $\Gamma^*(x_i, x_j)$ et $d_L(x_i, x_j)$ entre les points $x_i, x_j \in X$

Dijkstra's algorithm



Courtesy of Michael Bronstein

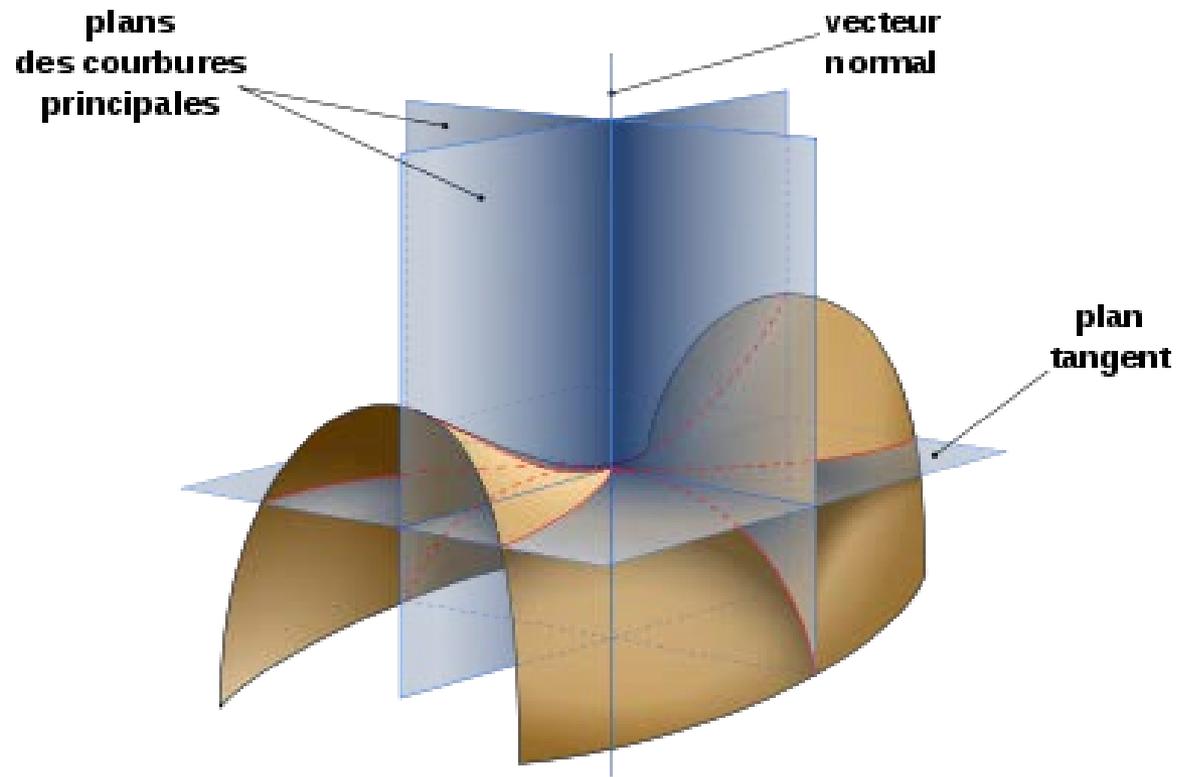
Exemple de calcul de distance géodésique



— Distance along line (Euclidian)

— Distance along surface (Geodesic)

Les courbures



[Image wikipédia]

Rappels mathématiques

□ Soit une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la dérivée de F au point $p \in \mathbb{R}^n$

est la matrice dF_p qui décrit les petites variations en F(p) quand la position p change

□ Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est exprimée en terme $F(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p))$ la dérivée est la matrice de taille $n \times m$

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Rappels mathématiques

□ Etant donnée une fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nous pouvons approximer

cette fonction autour du point (0,0) par le polynôme de Taylor :

$$F(x, y) \approx \underbrace{F(0,0)}_{\text{Constante}} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(0,0)} x + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(0,0)} y}_{\text{Linéaire}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} x^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} xy \right)}_{\text{quadratique}}$$

Si $F(0,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

$$F(x, y) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} x^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} xy \right)$$

Rappels mathématiques

$$F(x, y) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} x^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} xy \right)$$

□ Forme quadratique $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

□ Nous pouvons ré-écrire F de la façon suivante :

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rappels mathématiques

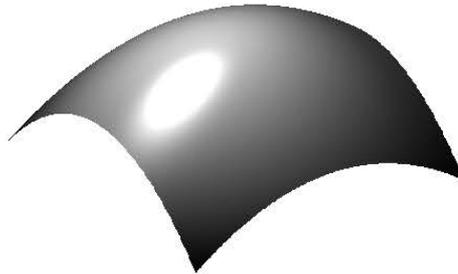
$$F(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2$$



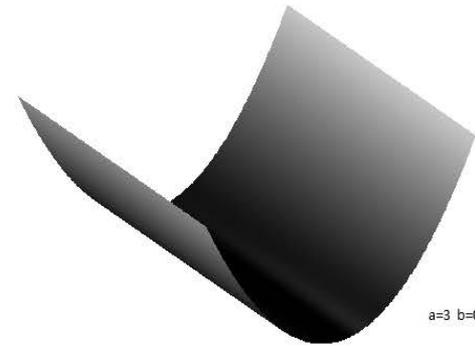
a=3 b=2

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0$$



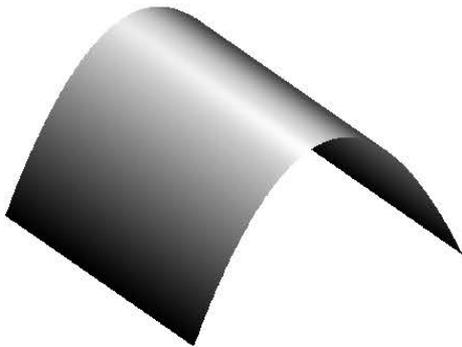
a=-2 b=-3

$$\lambda_1, \lambda_2 < 0$$



a=3 b=0

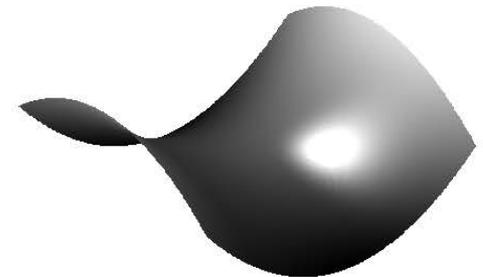
$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$$



$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$$



$$\lambda_1, \lambda_2 = 0$$

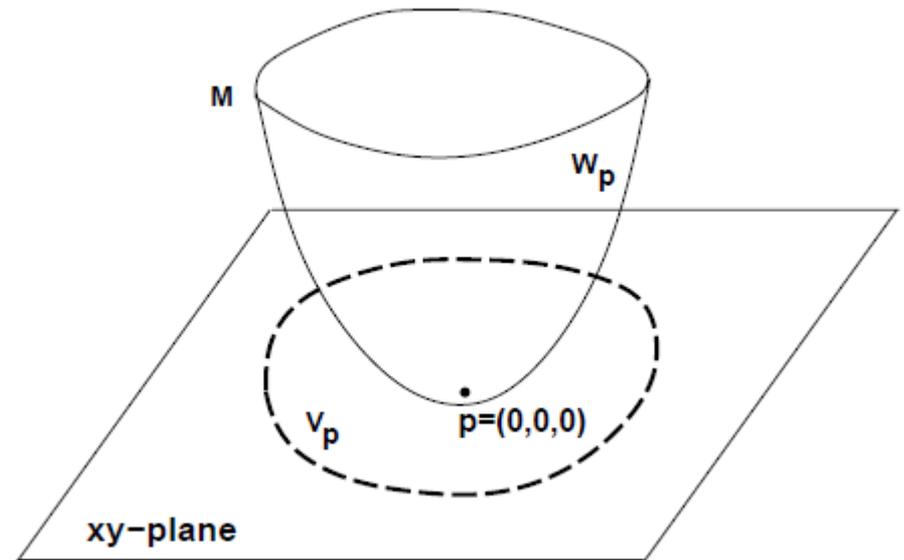


$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$

Courbures

□ Nous supposons

- P est l'origine
- Le plan x-y est le plan tangent



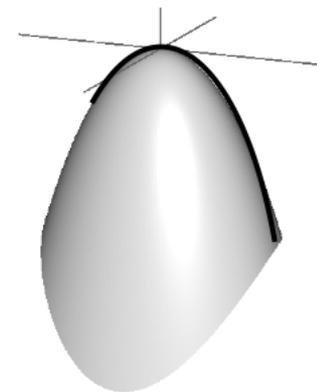
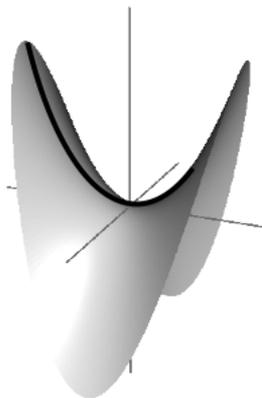
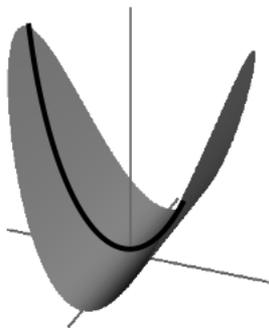
□ Localement la surface est approximée par $z=F(x,y)$

$$F(x, y) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} x^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} xy \right)$$

Courbures

$$f(x, y) \approx \frac{\lambda_1}{2} x^2 + \frac{\lambda_2}{2} y^2$$

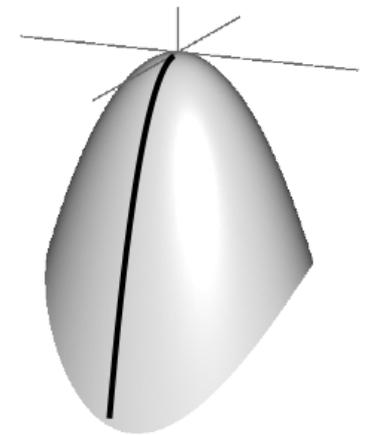
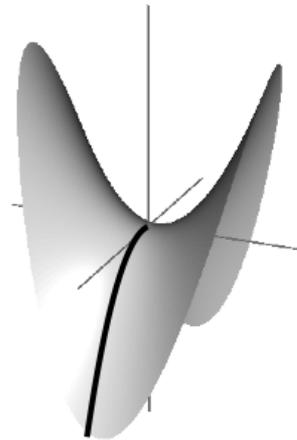
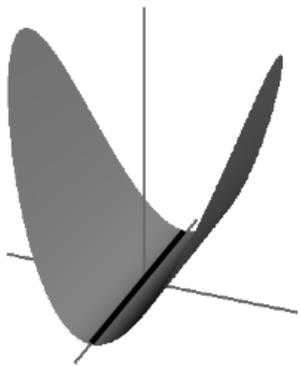
- Si $y=0$, nous obtenons la courbe ayant comme courbure λ_1



Courbures

$$f(x, y) \approx \frac{\lambda_1}{2} x^2 + \frac{\lambda_2}{2} y^2$$

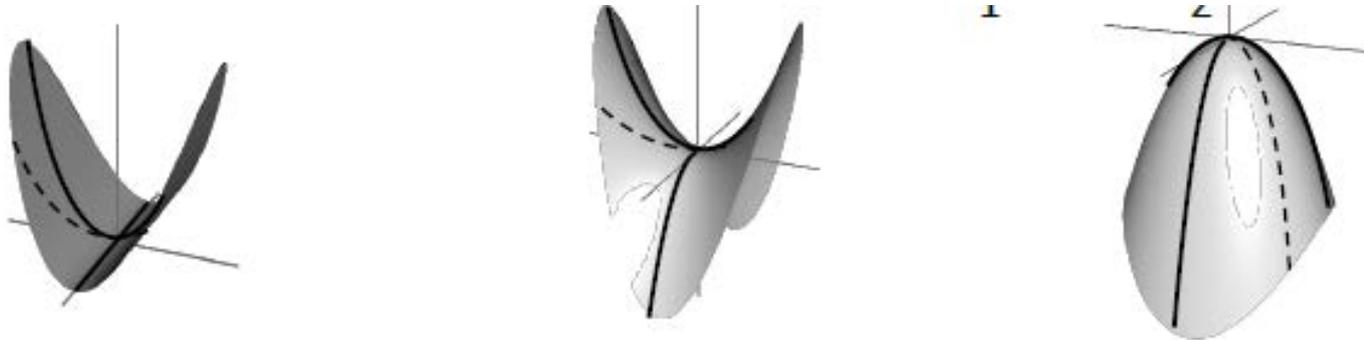
- Si $x=0$, nous obtenons la courbe ayant comme courbure λ_2



Courbures

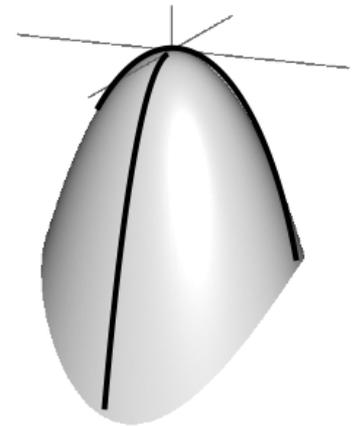
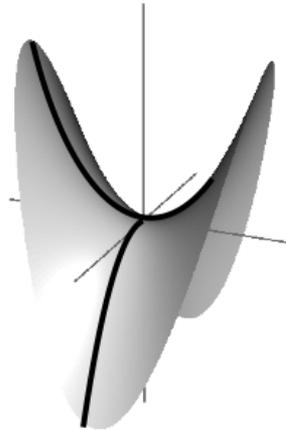
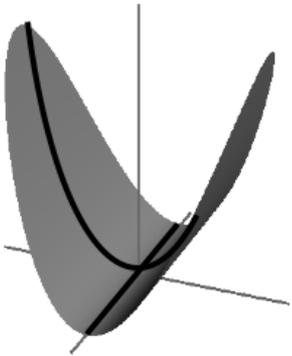
$$f(x, y) \approx \frac{\lambda_1}{2} x^2 + \frac{\lambda_2}{2} y^2$$

- Tout autre ligne dans le plan tangent, génère une courbe avec une courbure comprise λ_1 entre λ_2



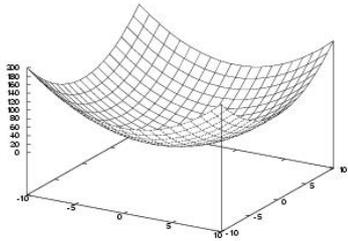
Courbures

- Les valeurs de λ_1 et λ_2 sont les courbures principales au point p et les directions des courbes correspondantes au point p sont appelées les directions principales.

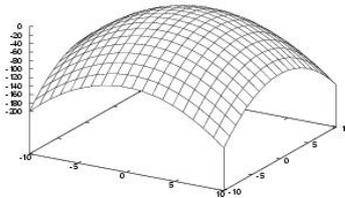


Caractérisation de surfaces

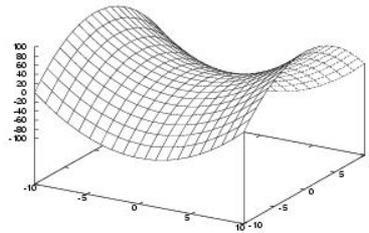
- Descripteur local : détails du modèle



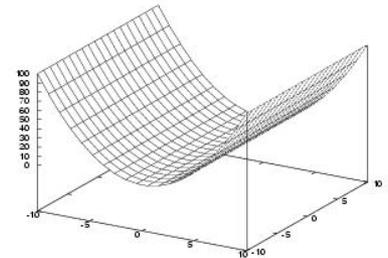
$$k_1 = k_2 = 2$$



$$k_1 = k_2 = -2$$



$$k_1 = 2 ; k_2 = -2$$



$$k_1 = 2 ; k_2 = 0$$

Courbures

- ❑ Le produit des principales de courbures , $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ est appelé la courbure Gaussienne.
- ❑ La somme des principales de courbures, $\lambda_1 + \lambda_2$ est appelée la courbure moyenne.

Endmorphism de Weingartan

- La deuxième forme fondamentale d'une surface S en un point $p \in S$ est la forme bilinéaire symétrique $T_p S$ définie par la matrice dans la base (x_u, x_v) de $T_p S$
- k_1 et k_2 sont les vecteurs propres de l'endomorphisme de Weingarten défini par la matrice :

$$W = I^{-1} \cdot II$$

$$I = \begin{pmatrix} \langle x_u, x_u \rangle & \langle x_u, x_v \rangle \\ \langle x_u, x_v \rangle & \langle x_v, x_v \rangle \end{pmatrix}$$

$$II = \begin{pmatrix} \langle x_{uu}, N \rangle & \langle x_{uv}, N \rangle \\ \langle x_{uv}, N \rangle & \langle x_{vv}, N \rangle \end{pmatrix}$$

Démo Meshlab

❑ <http://meshlab.sourceforge.net/>

MeshLab

MeshLab is an open source, portable, and extensible system for the processing and editing of unstructured 3D triangular meshes.

The system is aimed to help the processing of the typical not-so-small unstructured models arising in 3D scanning, providing a set of tools for editing, cleaning, healing, inspecting, rendering and converting this kind of meshes.

The system is heavily based on the **VCG library** developed at the **Visual Computing Lab** of **ISTI - CNR**, for all the core mesh processing tasks and it is available for Windows, MacOSX, and Linux. . The MeshLab system started in late 2005 as a part of the **FGT** course of the **Computer Science** department of University of Pisa and most of the code (~15k lines) of the first versions was written by a handful of willing students. The following years **FGT** students have continued to work to this project implementing more and more features. The proud MeshLab developers are listed **here**.

This project is actively supported by the **3D-CoForm** project.

Other projects that have previously supported MeshLab are listed **here**.

Download Latest Version (03 August 2012) V1.3.2 (changes)

Remember that, whenever you use MeshLab in a official/commercial project or in any kind of research, you should:

- Explicitly cite in your work that you have used MeshLab, a tool developed with the support of the **3D-CoForm** project,
- Post a couple of lines in the **users' forum** describing the project where MeshLab was used.

Adopted License, acknowledgments and other legal issues are detailed **here**.

Features



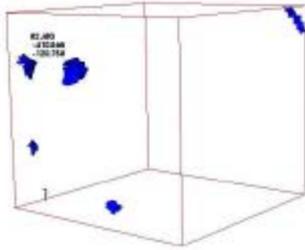
SOURCEFORGE.NET®



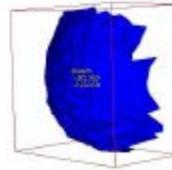
Like!

J'aime  1 647 personnes aiment ça. Sign Up pour voir ce que vos amis aiment.

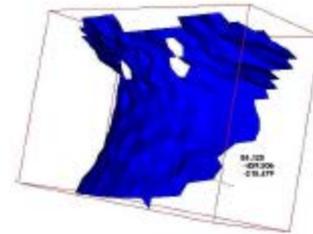
3D face segmentation



eye cavities
(pit)



nose tip
(peak)



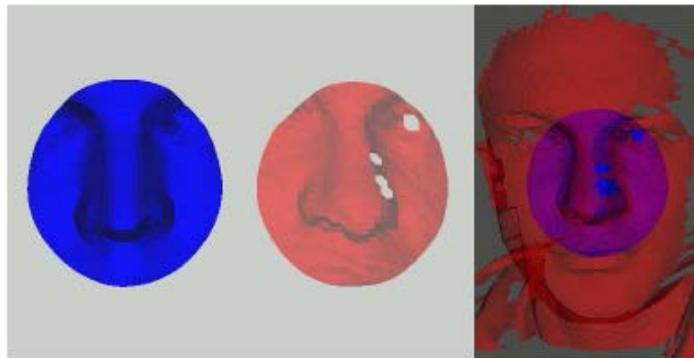
nose bridge
(saddle)

□ The pose correction

Input image



Registration result



3D face segmentation

	$H < 0$	$H = 0$	$H > 0$
$K < 0$	<i>saddle ridge</i>	<i>minimal surface</i>	<i>saddle valley</i>
$K = 0$	<i>ridge</i>	<i>plane</i>	<i>valley</i>
$K > 0$	<i>peak</i>	<i>impossible</i>	<i>pit</i>

- ❑ **a nose tip** is expected to be a peak

$$K > T_K; H < T_H$$

- ❑ **a pair of eye cavities** can be a pair of pit regions

$$K > T_K; H < T_H$$

- ❑ **the nose bridge** can be a saddle region

$$K < T_K; H > T_H$$

Spectre de courbure (Shape Index)

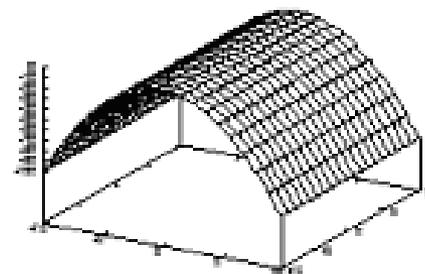
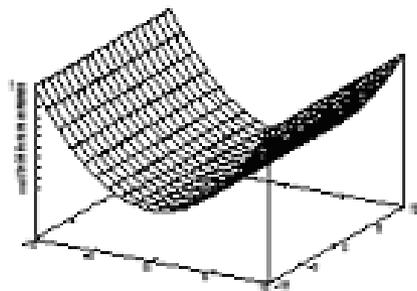
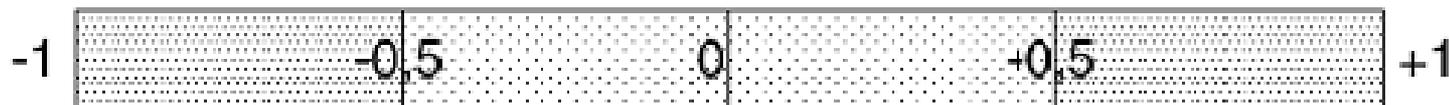
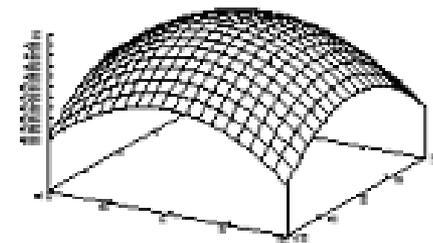
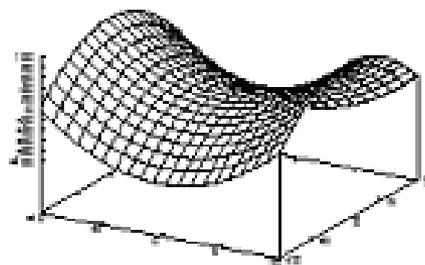
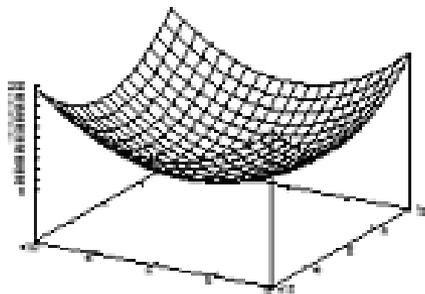
- Une seule valeur (Koenderink & van Doorn - 1992) :

$$I_P = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{k_P^1 + k_P^2}{k_P^1 - k_P^2}\right), \quad k_P^1 \geq k_P^2$$

- Propriétés :

- invariante par rapport à la rotation et au facteur d'échelle
- intervalle [-1; +1]
- le rapport permet de s'affranchir de la "force" des courbures
- valeurs de signes opposées = surfaces identiques mais d'orientations opposées
- calcul impossible avec :
 - $k_1 = k_2, k_1 + k_2 \neq 0$: $I_p = \pm 1$ selon signe de $k_1 + k_2$
 - $k_1 = k_2 = 0$: plan, valeur particulière attribuée à I_p

Spectre de courbure



Spectre de courbure (Shape Index)

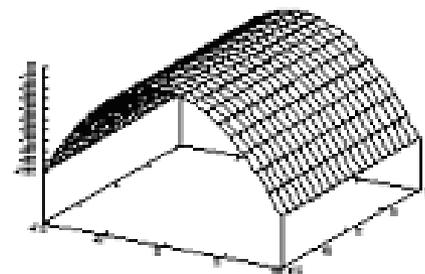
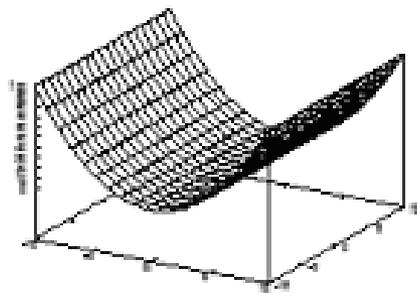
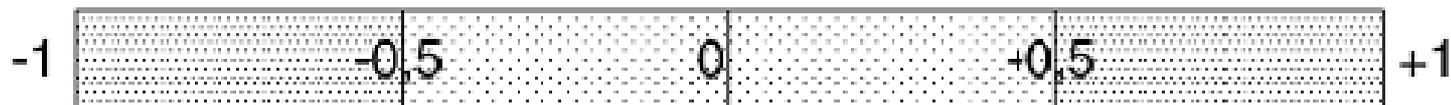
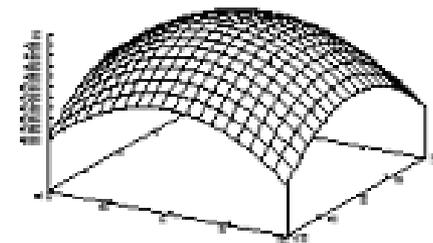
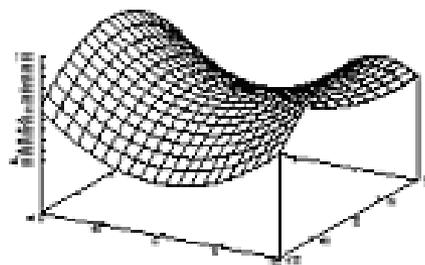
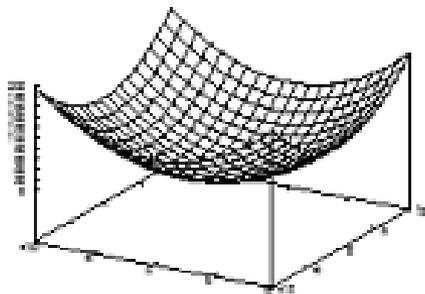
- Une seule valeur (Koenderink & van Doorn - 1992) :

$$I_P = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{k_P^1 + k_P^2}{k_P^1 - k_P^2}\right), \quad k_P^1 \geq k_P^2$$

- Propriétés :

- invariante par rapport à la rotation et au facteur d'échelle
- intervalle [-1; +1]
- le rapport permet de s'affranchir de la "force" des courbures
- valeurs de signes opposées = surfaces identiques mais d'orientations opposées
- calcul impossible avec :
 - $k_1 = k_2, k_1 + k_2 \neq 0$: $I_p = \pm 1$ selon signe de $k_1 + k_2$
 - $k_1 = k_2 = 0$: plan, valeur particulière attribuée à I_p

Spectre de courbure



Paramétrisation de Monge

- ❑ Représentation implicite : la surface est l'ensemble des points (x,y,z) de l'espace vérifiant l'équation $F(x,y,z)$.
- ❑ Représentation paramétrique : la surface est l'image dans \mathbb{R}^3 d'un sous-ensemble D de \mathbb{R}^2 par une fonction $X : X(u_1,u_2)=(x(u_1,u_2), y(u_1,u_2), z(u_1,u_2))$.
- ❑ Représentation par graphe : la surface est l'ensemble des triplets $(x,y,f(x,y))$, avec x et y deux réels.

Paramétrisation de Monge

- Une paramétrisation de Monge est une fonction différentiable r , définie d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}^3 , de la forme :

$$r : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\forall (u, v) \in U \quad r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T = (u, v, z(u, v))^T$$

Paramétrisation de Monge

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, f_u)$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 1, f_v)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (0, 0, f_{uv})$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, f_{uu})$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (0, 0, f_{vv})$$

$$\mathbf{x}_{vu} = (0, 0, f_{vu})$$

Les formes fondamentales de la paramétrisation de Monge

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{f}_x^2 & \mathbf{f}_x \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_x \mathbf{f}_y & 1 + \mathbf{f}_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{II} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{f}_x^2 + \mathbf{f}_y^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{xx} & \mathbf{f}_{xy} \\ \mathbf{f}_{xy} & \mathbf{f}_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = -\frac{(\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, -1)^t}{\sqrt{1 + \mathbf{f}_x^2 + \mathbf{f}_y^2}}$$

Approximation par une quadrique

Soit une surface tridimensionnelle dont les points sont définis par $(x, y, f(x, y))$ où f est un polynôme du second degré :

$$f(x, y) = a_0x^2 + a_1y^2 + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5$$

$$\{a_i \in \mathbb{R}\}_{i=0}^5$$

La surface est alors appelée une *quadrique*

Approximation par une quadrique

En notant $a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)^t$ et $b(x, y) = (x^2, y^2, xy, x, y, 1)^t$, l'équation précédente peut se noter sous forme matricielle :

$$f(x, y) = a^t \cdot b(x, y)$$

$$a = \left(\sum_{i=1}^{i=N} b(x_i, y_i) b^t(x_i, y_i) \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{i=N} z_i b(x_i, y_i) \right)$$

Références

- ❑ Bronstein A., Bronstein M., Kimmel R. (2008). **Numerical geometry of non-rigid shapes**. Springer. <http://www.cs.technion.ac.il/~mbron/>
- ❑ Andrew Pressley, Elementary differential geometry, Springer
- ❑ Barrett O'Neill, Elementary Differential geometry
- ❑ [Manfredo DoCarmo](#) , **Differential Geometry of Curves and Surfaces**