Correction de l'examen de traitement du signal

Examen en ligne CentraleSupélec 2020, communiqué par C. Soussen

Juin 2020

Note : les questions et corrections ci-dessous se rapportent à une version-type de l'énoncé, qui ne correspond peut être pas exactement à votre énoncé. Les mêmes raisonnements sont applicables aux autres versions de l'énoncé avec des adaptations des calculs numériques.

Exercice 1.1

On considère le filtre linéaire de réponse impulsionnelle

$$h[k] = a^k \mathbb{1}_{[0,\infty)}[k]$$

où $a \in \mathbb{R}$. Répondre et justifier brièvement :

— Le système est-il causal ?

— Pour quelles valeurs de a le filtre est-il stable EBSB (entrée bornée sortie bornée) ?

1. h est causal car $h[k] = 0$ pour $k < 0$
2. h est stable EBSB si
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| < \infty$$
c'est-à-dire si $|a| < 1$.

Exercice 1.2

On considère le filtre linéaire de réponse impulsionnelle

$$h\,[k] = a^k \mathbb{1}_{[0,\infty)}[k]$$

où $|a| < 1$.

Soit x un signal borné et $y = h * x$. Montrer que $y\,[n] = Ax\,[n] + By\,[n-1]$, en exprimant les facteurs multiplicatifs A et B en fonction de a. Répondre en donnant les principales étapes de votre raisonnement.

Par définition du produit de convolution,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x[n-k]$$

On en déduit que $y[n] = x[n] + ay[n-1]$. On a donc $A = 1$ et $B = a$.

Exercice 1.3

On considère le filtre linéaire de réponse impulsionnelle

$$h\,[k] = a^k \mathbb{1}_{[0,\infty)}[k]$$

où $|a| < 1$.

Pour $\nu \in \mathbb{R}$, la réponse du système à l'entrée $x[n] = e^{2i\pi\nu n}$ s'exprime sous la forme $y\,[n] = c\,x[n]$. Donner l'expression de c en fonction de ν. Vous répondrez en donnant les principales étapes de votre raisonnement.

D'après le cours, la réponse d'un SLI à un signal exponentiel complexe de fréquence ν est $y = c\,x$ où c est la TFTD de h évaluée pour la fréquence ν :

$$c = H(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-i2\pi\nu k} = \frac{1}{1 - ae^{-i2\pi\nu}}$$

Exercice 1.4

On considère le filtre défini par l'équation aux différences $y[n] = ay[n-1] + x[n]$. On souhaite obtenir le filtre inverse de réponse impulsionnelle g tel que $x = g * y$. Donner l'expression de $g[n]$ (sans détailler le calcul).

Comme

$$x[n] = y[n] - ay[n-1]$$

et $x[n] = (g * y)[n]$, on a

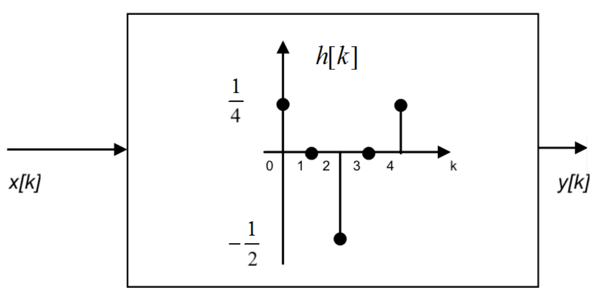
$$g[n] = \delta[n] - a\delta[n-1].$$

Exercice 2

Exercice 2.1

Soit le filtre de réponse impulsionnelle

$$h[k] = \frac{1}{4}(\delta[k] - 2\delta[k-2] + \delta[k-4])$$



2.1 La réponse en fréquence du filtre, $H(\nu)$, prend la forme

$$H(\nu) = H_1(\nu)e^{i\pi n\nu}$$

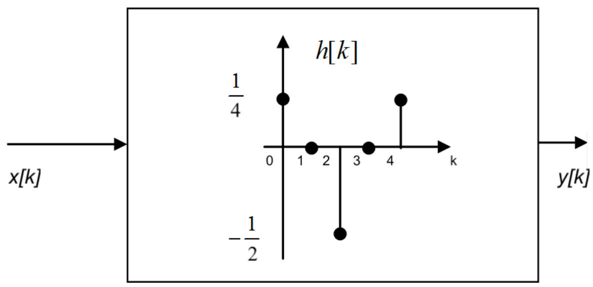
avec $H_1(\nu) \in \mathbb{R}$ et...

$$n = -4$$

Exercice 2.2

Soit le filtre de réponse impulsionnelle

$$h[k] = \frac{1}{4}(\delta[k] - 2\delta[k-2] + \delta[k-4])$$



1. Donner l'expression de sa réponse en fréquence $H(\nu)$ (sans explication).
2. Le filtre est-il passe-bas, passe-bande ou passe-haut ? Justifier votre réponse.

1)

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \frac{1}{4}\left(1 - 2e^{-4i\pi\nu} + e^{-8i\pi\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos(4\pi\nu) - 1\right) e^{-4i\pi\nu} \\ &= -\sin^2(2\pi\nu)e^{-4i\pi\nu} \end{aligned}$$

2) filtre passe-bande, car

- $H(0) = 0$,
- $|H(\nu)|$ est maximal en $\nu = \pm\frac{1}{4}$,
- $H(\pm\frac{1}{2}) = 0$.

Note : les hautes fréquences correspondent à $\nu = \pm\frac{1}{2}$.

Exercice 3

Exercice 3.1

Soit X_n un processus SSL de moyenne μ_X et de fonction d'autocorrélation γ_X. On définit la version sous-échantillonnée de X par

$$Y_n = X_{nL}$$

.

1. Donner la moyenne et la fonction d'autocorrélation de Y_n. Pas de justification demandée.
2. Y_n est-il SSL ? Justifier votre réponse.

1. $\mathbb{E}(Y_n) = \mu_X$ et $\mathbb{E}(Y_{n+k}Y_n^*) = \gamma_X[kL]$
2. Y_n est SSL car $\mathbb{E}(|Y_n|^2)$ est fini (X étant SSL), et $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{E}(Y_{n+k}Y_n^*)$ ne dépendent pas de n.

Exercice 3.2

Soit $h[k]$ un filtre FIR et X_n un processus SSL. Pour $L \geq 2$, on définit :
- $h'[k] = h[kL]$
- $X'_n = X_{nL}$
- $Y_n = (h * X)_{nL}$
- $Z_n = (h' * X')_n$

(a). Exprimer Y_n et Z_n en fonction de h et X

(b). Calculer leurs moyennes en fonction de h et μ_X

(c). En déduire que Y_n et Z_n sont différents.

(d). Soit X_n un bruit blanc de variance unité. Calculer la puissance de Z_n en fonction de h

On ne demande pas de justification pour les réponses a, b, d.

(a). $Y_n = \sum_k h[k]\, X_{nL-k}$ (ou $Y_n = \sum_k h[nL-k]\, X_k$) ;

et $Z_n = \sum_k h[kL]\, X_{nL-kL}$ (ou $Z_n = \sum_k h[nL-kL]\, X_{kL}$)

(b). $\mu_Y = \mu_X \sum_k h[k]$;

et $\mu_Z = \mu_X \sum_k h[kL]$

(c). μ_Y et μ_Z sont généralement différents. Par exemple, en prenant pour h une fenêtre rectangulaire de largeur N paire et $L = 2$, on a $\mu_Y = N\mu_X$, $\mu_Z = N\mu_X/2$ donc Y et Z sont différents si $\mu_X \neq 0$ et $N > 2$.

(d). $P_Z = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h[Lk]|^2$

Exercice 3.3

Soit X_n un processus SSL de moyenne non nulle. Pour $L \geq 2$, on définit

$$U_n = \begin{cases} X_{1+(n/L)} & \text{si } \frac{n}{L} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \frac{n}{L} \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

U_n est-il SSL ? Justifier votre réponse.

Non. Si $\mu_X \neq 0$, U_n n'est pas SSL car la valeur de $\mathbb{E}(U_n)$ dépend de n, par exemple :

— $\mathbb{E}(U_0) = \mu_X$

— $\mathbb{E}(U_1) = 0$

Exercice 3.4

On définit :

$$U_n = \begin{cases} X_{1+(n/L)} & \text{si } \frac{n}{L} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \frac{n}{L} \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On suppose maintenant que X_n est SSL, centré et de puissance $P_X > 0$. U_n est-il SSL ? Justifier votre réponse.

1) Si $\mu_X = 0$, $\mathbb{E}(U_n) = 0$ quelquesoit n. On ne peut pas conclure à ce stade.

2) On évalue l'autocorrélation $\mathbb{E}(U_{n+k}U_n^*)$ pour $k = 0$:

— Si n est multiple de L ($n = Lp$), $\mathbb{E}(U_n U_n^*) = \mathbb{E}(X_{p+1}X_{p+1}^*) = P_X \neq 0$

— Sinon (par exemple, pour $n = Lp + 1$), $\mathbb{E}(U_n U_n^*) = \mathbb{E}(0) = 0$.

$\mathbb{E}(U_n U_n^*)$ dépend de n donc U_n n'est pas SSL.