Moyennes glissantes et erreurs numériques

Examen en ligne CentraleSupélec 2020, communiqué par C. Soussen

Juin 2020

1 Fenêtre glissante

1.1 Réponse impulsionnelles et fréquentielles

On s'intéresse à la moyenne glissante d'un signal $x[n]$ définie par

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]. \tag{1}$$

1. Montrer que le système qui prend en entrée un signal et calcule sa moyenne glissante est linéaire et invariant. (*Justifications attendues*)
2. Calculer sa réponse impulsionnelle $h[n]$. (*Aucune justification calculatoire attendue*)
3. En déduire sa réponse fréquentielle $H(\nu)$. (*Aucune justification calculatoire attendue*)
4. Ecrire $H(\nu)$ sous la forme $H(\nu) = r(\nu)e^{i2\pi\ell\nu}$, avec ℓ un entier relatif à préciser et $r(\nu)$ réel. (*Aucune justification calculatoire attendue*)
5. Ce filtre est-il passe-bas, passe-bande, passe-haut ? (*Justification attendue*)

Solutions

1. Linéarité et invariance : on vérifie que pour une entrée $x[n]+x'[n]$, la sortie est bien $y[n]+y'[n]$ (linéarité de l'addition), et que pour l'entrée $x[n-\Delta]$, la sortie est $y[n-\Delta]$.
2. Réponse impulsionnelle : on remplace l'entrée $x[n]$ par l'impulsion $\delta[n]$. On trouve :
$$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \delta[n-k], \tag{2}$$
ou, de façon équivalente, $h[n] = 1/N$ si et seulement si $0 \leq n < N$.
3. Réponse fréquentielle :
$$H(\nu) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-i2\pi\nu n). \tag{3}$$
ou
$$H(\nu) = \frac{1-\exp(-i2\pi\nu(N-1))}{1-\exp(-i2\pi\nu)} \tag{4}$$
4. Réponse fréquentielle :
$$H(\nu) = \frac{\sin \pi\nu(N-1)}{\sin \pi\nu} e^{-i\pi\nu(N-1)} \tag{5}$$
5. Filtre passe bas car $r(0) = 1$ et $r(1/2) = 0$.

1.2 Filtre récursif

On définit le filtre récursif par l'équation

$$y[n] = y[n-1] + x[n]/N - x[n-N]/N, \tag{6}$$

où x et y représentent respectivement l'entrée et la sortie du filtre.

1. Montrer que sa réponse impulsionnelle, g, vérifie une équation de récurrence de la forme

$$g[n] = g[n-1] + u[n].$$

   Donner l'expression de $u[n]$. (*Justification succincte attendue*)
2. En supposant le filtre causal, expliciter la réponse impulsionnelle g. (*Justification succincte attendue*)
3. Expliciter la relation entrée sortie du filtre sous la forme d'une convolution (on remplacera g par son expression). (*Justification succincte attendue*)
4. On s'intéresse aux nombres d'opérations élémentaires nécessaires pour calculer la sortie $y[n]$ à un instant donné (pour n fixé). Pour simplifier, on ne prend en compte que les additions et les soustractions (on ne considère pas le nombre de multiplications et de divisions).
   Comparer le nombre d'opérations nécessaires pour calculer la sortie du filtre dans les deux cas (avec la relation de récurrence et la relation de convolution). Quel est l'intérêt de la formulation récursive ? (*Aucune justification calculatoire attendue*)

Solutions

1. Récurrence sur la réponse impulsionnelle : on remplace x par δ :

$$g[n] = g[n-1] + \delta[n]/N - \delta[n-N]/N$$

   ou encore

$$u[n] = \delta[n]/N - \delta[n-N]/N$$

2. réponse impulsionnelle : le filtre est supposé causal, on a donc $g[n] = 0$ pour $n < 0$
   On trouve alors que $g[n] = 1/N$ pour $n \geq 0$ et $n < N$.
3. relation de convolution : par définition : $y[n] = (h * x)[n]$ soit

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k].$$

4. Complexité calculatoire :
   — le filtre récursif nécessite une addition et une soustraction,
   — la convolution nécessite $N-1$ additions,
   — la complexité calculatoire du filtre récursif est plus faible et indépendante de N.

2 Erreurs numériques introduites par un filtre

Les filtres sont implémentés sur des calculateurs en virgule flottante. Chaque opération introduit une erreur. Pour simplifier le modèle, on considérera uniquement les erreurs introduites par les additions et soustractions, et ces erreurs seront supposées indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle et de variance s^2.

Pour simplifier la rédaction de la réponse, on pourra remplacer les indices par une notation entre crochets.

2.1 Relation de convolution

On considère un filtre correspondant à la somme de N valeurs sur une fenêtre glissante. En utilisant la relation de convolution, la sortie est le résultat de $N-1$ additions.

Le processus aléatoire E_n modélisant les erreurs sur la sortie est donc donné par

$$E_n = \sum_{k=1}^{N-1} W_n^{(k)}, \tag{7}$$

où les $N-1$ processus $W_n^{(k)}$, pour $0 < k < N$, sont blancs au sens large et décorrélés entre eux. Ils sont de variances identiques, notée s^2.

Pour simplifier la rédaction de la réponse, on pourra noter $W_n^{(k)}$ sous la forme $Wk[n]$.

1. Calculer la moyenne, l'autocorrélation de E_n. (*Justification succincte attendue*)
2. E_n est-il stationnaire ? (*Justifications attendues*)
3. Donner sa puissance. (*Justifications attendues*)

Solutions

1. moyenne et variance :
   - moyenne : les bruits blancs sont centrés donc $\mathbf{E}(E_n) = 0$
   - variance : les bruits blancs sont décorrélés donc

$$\gamma_E[0] = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}(W_n^{(k)} W_n^{(k)}) \tag{8}$$

$$= (N-1)s^2 \tag{9}$$

2. — la moyenne est constante
   - En utilisant le fait que les $W_n^{(k)}$ sont blancs et décorrélés, on trouve

$$\gamma_E[k] = 0 \tag{10}$$

   pour $k \neq 0$.
   - le processus est SSL
3. La puissance de E est son autocorrélation en 0, donc $P_E = (N-1)s^2$.

2.2 Relation de récurrence

La sortie du filtre de la question précédente peut s'écrire à l'aide de l'équation de récurrence :

$$y[n] = y[n-1] + x[n] - x[n-N]. \tag{11}$$

L'erreur numérique sur la sortie E'_n vérifie alors

$$E'_n = E'_{n-1} + W_n + W'_n, \tag{12}$$

où W_n modélise les erreurs introduites par l'addition et W'_n par la soustraction. On suppose que W_n et W'_n sont des bruits blanc décorrélés entre eux et de variance identique notée s^2. De plus, on suppose que E'_0 est centrée et $Var(E'_0) = s_0^2$.

1. Calculer la moyenne et la variance de E'_n pour $n > 0$. (*Justification succincte attendue*)
2. E'_n est-il stationnaire ? (*Justifications attendues*)
3. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ? (*Justifications attendues*)

4. Conclure sur la possibilité d'utiliser la formulation récursive. (*Justifications attendues*)

Solutions

1. moyenne et variance : On trouve par récurrence, $\mathbf{E}(E'_n) = 0$, et en utilisant la décorrélation de W_n, W'_n et E'_{n-1}, $Var(E'_n) = s_0^2 + 2ns^2$.
2. Aucune justification calculatoire attendue
3. La puissance de l'erreur tend vers l'infini car $Var(E'_n) = s_0^2 + 2ns^2$
4. La puissance de l'erreur diverge, le filtre n'est pas utilisable en pratique

3 Processus aléatoire

On définit le processus

$$X_n = W_n + aW_{n-1} \tag{13}$$

où a est réel et W_n est un bruit blanc de variance s^2.

Pour simplifier la rédaction de la réponse, on pourra remplacer les indices par une notation entre crochets.

1. Calculer l'autocorrélation de X_n. (*Aucune justification calculatoire attendue*)
2. Pour quelles valeurs de a, X_n est-il stationnaire ? (*Justifications attendues*)
3. Pour quelles valeurs de a, X_n est-il un bruit blanc ? (*Justifications attendues*)
4. Donner l'expression de la densité spectrale de puissance de X_n. (*Aucune justification calculatoire attendue*)
5. Donner le système d'équations permettant d'estimer les paramètres a et s du modèle si on connait l'autocorrélation du processus et en supposant $a > 0$. (*Aucune justification calculatoire attendue*)

Solutions

1. $\gamma[0] = (1 + a^2)s^2$, $\gamma[\pm 1] = as^2$ et $\gamma[k] = 0$ sinon
2. $E(X_n) = 0$, $r_X[k + n, n] = \gamma_X[k]$ donc X_n est SSL quelque soit la valeur de a
3. $E(X_n) = 0$, X_n est un bruit blanc si $\gamma[k] \sim \delta[k]$ donc pour $a = 0$
4. $\Gamma(\nu) = s^2(1 + a^2) + as^2(e^{i2\pi\nu} + e^{-i2\pi\nu}) = s^2(1 + a^2) + \frac{as^2}{2}\cos(2\pi\nu)$
5. A partir de 1 on obtient les 2 équations :

$$\gamma[0] = s^2(1 + a^2)$$
$$\gamma[1] = as^2$$