Master 1 EEA, Université de Haute-Alsace

Communication entre systèmes

Énoncés de TD

(Parties 1 et 2)

1 Éléments de théorie des graphes **2**
1.1 Modélisation 2
1.2 Analyse 3

2 Algorithmes de routage **6**
2.1 Algorithme de Bellman-Ford 6
2.2 Algorithme de Dijkstra 7

3 Routage par Dijkstra bi-directionnel, arbres couvrants **10**

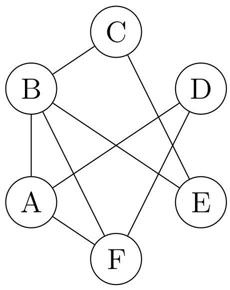
Cours de J.-B. Courbot 2021 – 2022

1 Éléments de théorie des graphes

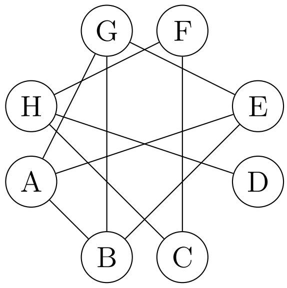
1.1 Modélisation

Exercice 1

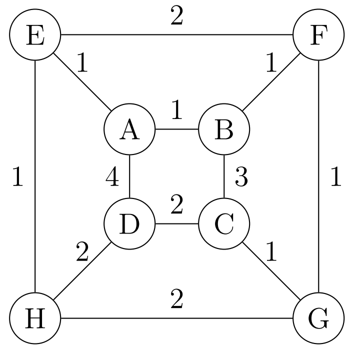
On se donne les graphes ci-dessous :



(a)



(b)



(c)

Pour chaque graphe :

1. Ce graphe est-il complet ? Biparti ? Connexe ?
2. Combien de cycles élémentaires différents contient-il ?
3. Quelle est la distance entre A et les autres sommets ?
4. Écrire la liste d'adjacence du graphe.
5. Écrire la matrice d'adjacence du graphe.

Exercice 2

On se donne les matrices d'adjacences suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 3 & 1 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 1 & 1 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & \infty & \infty & 2 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 1 & 2 & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

Pour chacune :

1. On suppose que les sommets sont nommés par ordre alphabétique : représenter le graphe associé à la matrice.
2. Ce graphe est-il connexe ?
3. Combien de cycles élémentaires différents sont présents ?
4. Quelle est la distance entre A et les autres sommets ?

Exercice 3

Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois.

1. Comment représenter cette situation par un graphe ? Quel type de graphe obtenez-vous ?
2. Comment le passeur doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

Exercice 4

Trois professeurs P_1, P_2, P_3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes C_1, C_2, C_3 :

— P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et 1 heure à C_2 ;
— P_2 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 1 heure à C_3 ;
— P_3 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 2 heures à C_3 .

1. Comment représenter cette situation par un graphe ? Quel type de graphe obtenez-vous ?
2. Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum ? Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.

Exercice 5

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles. Quel type de graphe obtenez-vous ?
2. Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?
3. Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

1.2 Analyse

Exercice 6

Pour chacun des graphes de l'exercice 1 et de l'exercice 2 :

1. donner son degré,
2. donner la liste des stables du graphes et le nombre de stabilité du graphe,
3. encadrer son nombre chromatique, puis le déterminer.

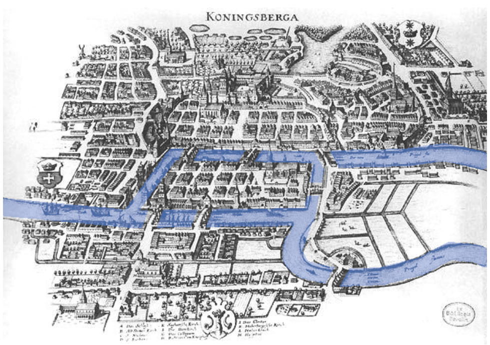
Exercice 7

Montrez que dans une assemblée de n personnes, il y a toujours au moins 2 personnes qui ont le même nombre d'amis présents.

Exercice 8

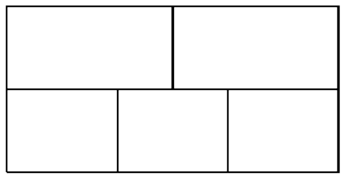
Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Exercice 9



Au cours d'une promenade, est-il possible de passer sur tous les ponts de la ville une et une seule fois ? Justifier.

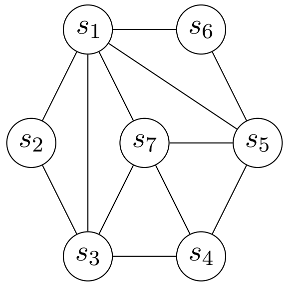
Exercice 10



Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure ci-dessus exactement une fois ? Justifier.

Exercice 11

Encadrez puis déterminez le nombre chromatique du graphe ci-dessous :



Exercice 12

Sept élèves, désignés par A, B, C, D, E, F et G se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui a rencontré qui ». La bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement.

élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D, E	D, E, F, G	E, G	A, B, E	A, B, C, D, F, G	B, E, G	B, C, E, F

De combien de places assises doit disposer la bibliothèque pour que chacun ait pu travailler correctement au cours de cette journée ? Justifier.

Exercice 13

On donne un graphe de 7 sommets par sa matrice d'adjacences ci-dessous. Ce graphe représente les 7 bancs d'un parc et les allées permettant de passer de l'un à l'autre.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On veut peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes. Encadrez puis déterminez le nombre de couleurs.
2. Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée en revenant à son point de départ ? Justifier.

Exercice 14

Sept agences de voyage proposent des visites de monuments et lieux emblématiques de Saint-Pétersbourg : la cathédrale Saint-Isaac, le Musée de l'Ermitage, le Musée russe et la forteresse

Pierre et Paul. Un même lieu ne peut pas être visité par plusieurs groupes de compagnies différentes le même jour.

La première compagnie fait visiter uniquement la cathédrale Saint-Isaac ; la seconde la cathédrale Saint-Isaac et le Musée russe ; la troisième la forteresse Pierre et Paul ; la quatrième le Musée russe et la forteresse Pierre et Paul ; la cinquième la cathédrale Saint-Isaac et le Musée de l'Ermitage ; la sixième le Musée de l'Ermitage et la forteresse Pierre et Paul ; la septième le Musée russe et le Musée de l'Ermitage.

Ces agences peuvent-elles organiser les visites sur les trois premiers jours de la semaine ?

Exercice 15

On veut transporter des produits chimiques par le rail. A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit produits chimiques. Dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les produits ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon, car il y aurait risque d'explosion :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		x	x	x			x	x
B	x				x	x	x	
C	x			x		x	x	x
D	x		x		x			x
E		x		x		x	x	
F		x	x		x			
G	x	x	x		x			
H	x		x	x				

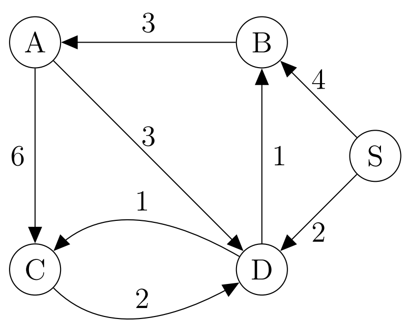
Quel nombre minimum de wagons faut-il ?

2 Algorithmes de routage

2.1 Algorithme de Bellman-Ford

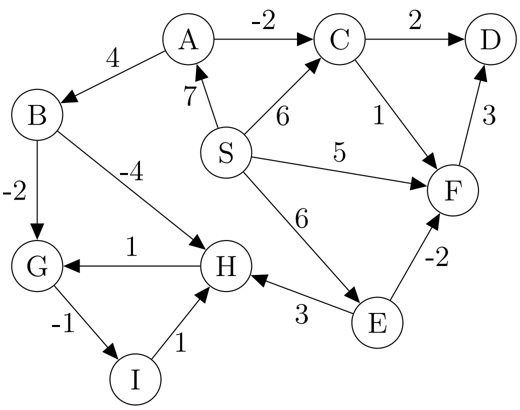
Exercice 16

On se donne le graphe ci-contre.
1. Trouvez la plus courte distance entre S et les autres noeuds en utilisant l'algorithme de Bellman-Ford.
2. On supprime le sommet D. Effectuez la mise à jour des distances avec l'algorithme de Bellman-Ford.



Exercice 17

On se donne le graphe ci-contre.
1. Trouvez la plus courte distance entre S et les autres noeuds en utilisant l'algorithme de Bellman-Ford.
2. On supprime le sommet A. Effectuez la mise à jour des distances avec l'algorithme de Bellman-Ford.
3. On reprends le graphe d'origine, en pondérant l'arête G $\longrightarrow$ I par -3 au lieu de -1. Quelles distances trouve l'algorithme de Bellman-Ford ?



Exercice 18

Une compagnie aérienne dessert différentes villes A, B, C, D et E selon le tableau d'horaires ci-contre.
1. Déterminer les trajets les plus rapides pour rejoindre A, B, C et E à partir de D.

2. Nous voulons également tenir compte des durées d'escale, estimées à 30 minutes. Comment modifier le graphe ? Quel est alors le chemin le plus court ?

	A	B	C	D	E
A		1h30	2h00		2h15
B	1h40				3h00
C	2h20			2h55	
D			3h20		1h05
E	2h25	3h10	1h10		

Exercice 19

On modélise un robot qui se déplace entre plusieurs pièces, dans lesquelles il peut se charger ou se décharger en suivant ce qui est énoncé dans le tableau ci-contre.
Est-il possible, en commençant par entrer dans la pièce 1, d'arriver dans la pièce 4 avec un niveau d'énergie positif ?

Pièce	Changement d'énergie	Connectée à
1	+20	2
2	+10	3
3	-20	1,4
4	0	

Exercice 20

Dans cet exercice, nous souhaitons planifier un voyage en avion entre une ville A et une ville D, en recherchant le trajet le moins cher possible. Trois compagnies aériennes (numérotées 1, 2 et 3) proposent des trajets aller-retour entre les villes A,B,C, et D aux prix suivants :

Compagnie 1. A - B pour 160 €, A - C pour 90 €, A - D pour 400 €.
Compagnie 2. A - B pour 170 €, B - C pour 30 €, B- D pour 80 €.
Compagnie 3. A - C pour 140 €, B - C pour 50 €, C - D pour 160 €.

1. Quel est le trajet le moins cher ?
2. Quel est le trajet, avec une seule correspondance, le moins cher ?
3. Nous disposons d'une réduction de 100 € utilisable sur un vol coûtant au moins cette somme dans la liste ci-dessus. Comment représenter cette situation par un graphe ? Quel est le trajet optimal ?

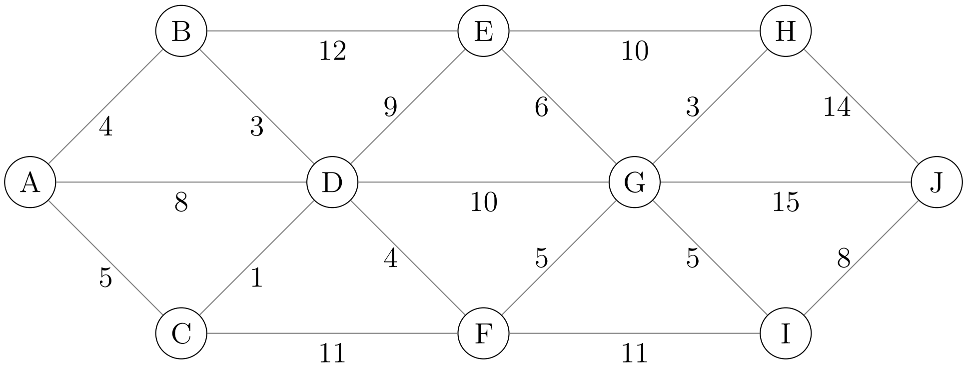
2.2 Algorithme de Dijkstra

Exercice 21

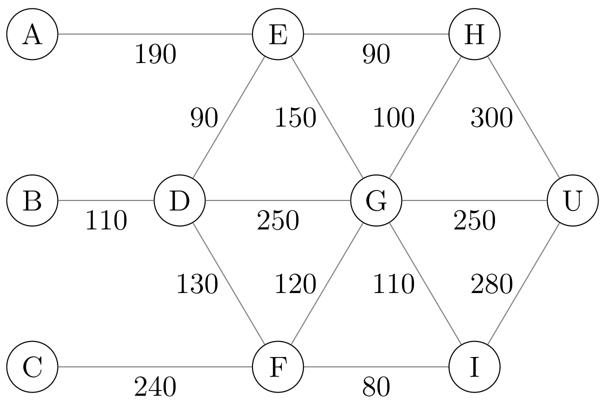
Reprendre les exercices 1 et 2 avec l'algorithme de Dijkstra.

Exercice 22

Trouvez le plus court chemin entre A et J sur le graphe ci-dessous.



Exercice 23



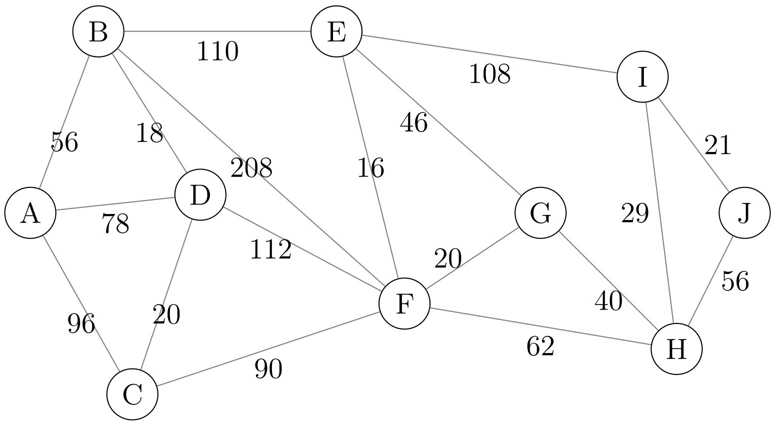
Trois étudiants vont à l'université, U, à partir de leurs logements en A, B, et C. Le diagramme montre le réseau des routes entre leurs maisons et l'université. Les nombres sur les arcs représentent les distances, en mètres, à parcourir pour chaque route.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer quel étudiant vit le plus près de l'université.

Exercice 24

Un voyageur de commerce veut rejoindre son lieu de travail, J, depuis sa maison en A en suivant un des chemins représentés ci-contre.

1. Trouvez le plus court chemin entre A et J sur le réseau ci-contre.

2. Un nouveau chemin est construit entre B et G. Trouvez la distance associées à cette section pour que le trajet de A à J soit réduit de 10.

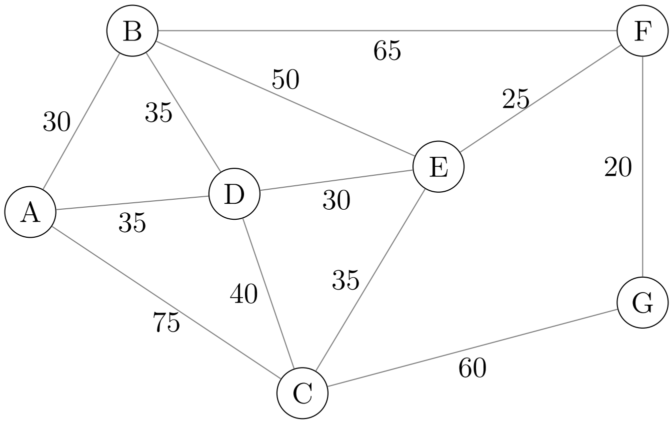


Exercice 25

Le réseau de droite donne, en minute, les temps de parcours entre plusieurs gares.

1. En supposant qu'il n'y a pas de délai en gare, utilisez l'algorithme de Dijkstra pour trouver le plus court chemin de A à G.

2. Trouvez le plus court chemin entre A et G si, en pratique, le passage par une gare autre que A et G prend 10 minutes supplémentaires.

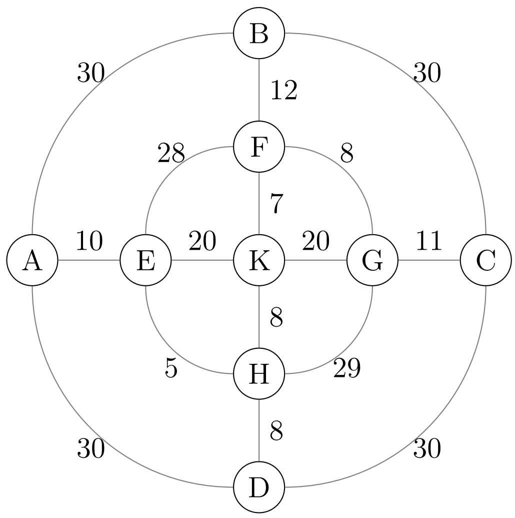


Exercice 26

Ce graphe montre les routes autour d'une ville K et les temps, en minutes, nécessaires pour voyager en voiture sur ces routes.

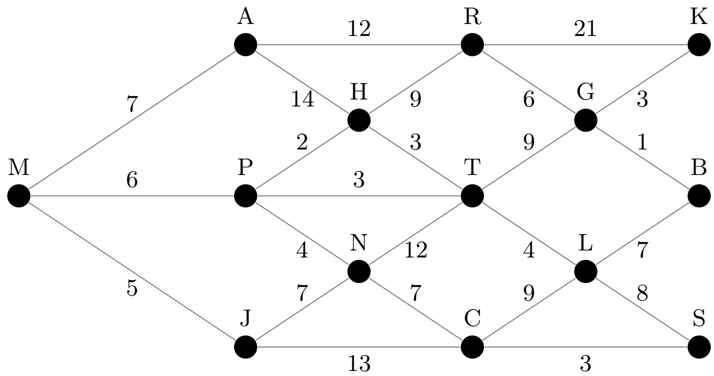
1. Un automobiliste veut voyager de A à C le plus rapidement possible. Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour trouver le meilleur chemin et sa durée.

2. Les quatre parties de la périphérie AB, BC, CD et DA prennent la même durée. L'année prochaine, ces segments seront améliorés et le temps de trajet passera de 30 à m minutes. Cela permettra à l'automobiliste de gagner 2 minutes sur son trajet de A à C. Quelle est la nouvelle route et quelle est la valeur de m ?



Exercice 27

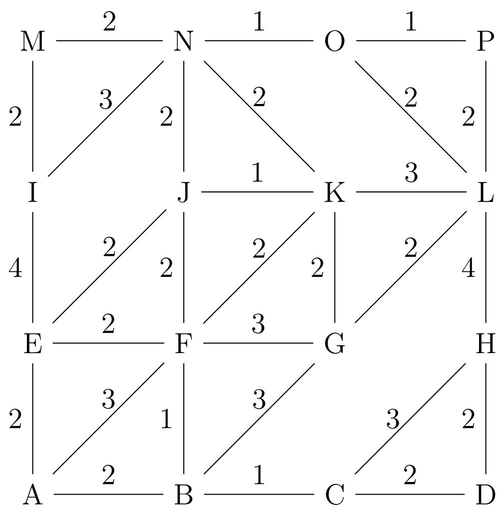
Chaque jour, Marie ("M") propage une nouvelle rumeur en allant à l'école. La rumeur est ensuite propagée d'une personne à l'autre. Le graphe ci-contre montre le chemin par lequel la rumeur se répand : chaque arête représente le temps, en minutes, pour propager la rumeur.



1. Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour trouver le temps que met la rumeur à atteindre chaque personne.
2. Par quel chemin Ben ("B") entend-il la rumeur pour la première fois ?
3. Un jour donné, Pauline ("P") est absente. Trouvez alors le temps supplémentaire avant que la rumeur parvienne à Ben.

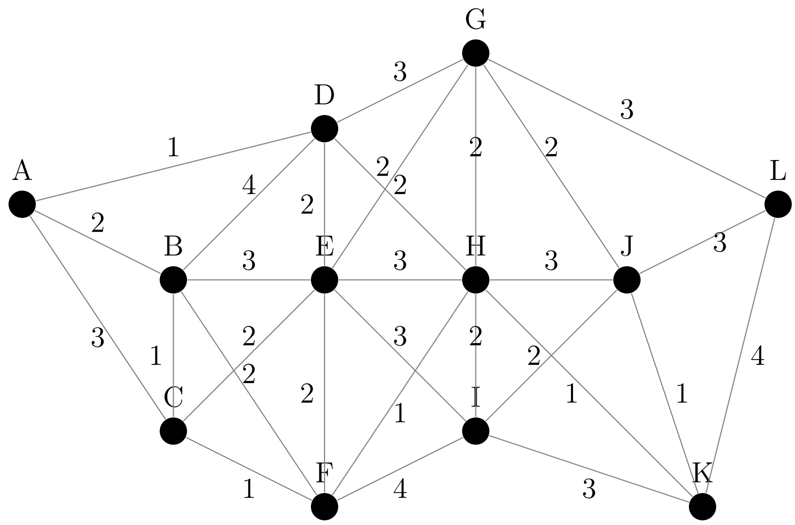
3 Routage par Dijkstra bi-directionnel, arbres couvrants

Exercice 28



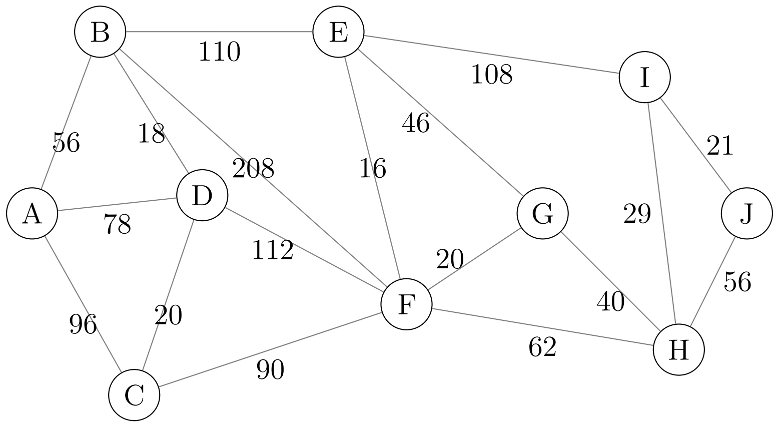
1. Trouver le chemin le plus court entre A et P par l'algorithme de Dijkstra bi-directionnel.
2. Trouver l'arbre couvrant de poids minimal avec l'algorithme de Prim. On prendra A comme point de départ.
3. Trouver un arbre couvrant de poids minimal avec l'algorithme de Kruskal.

Exercice 29



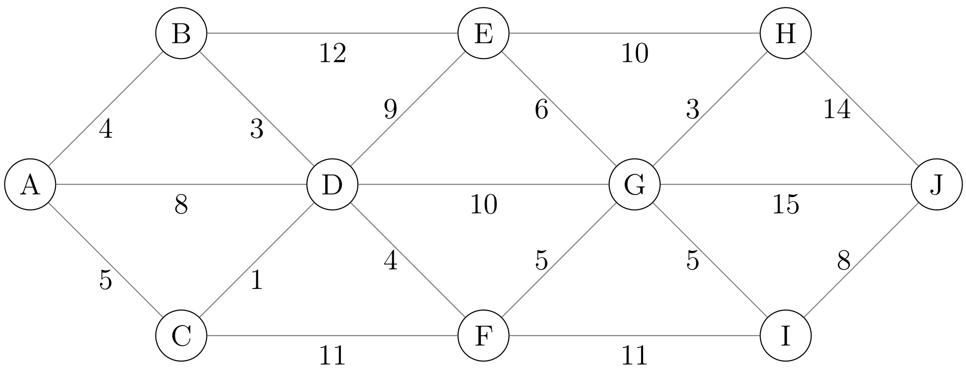
1. Trouver le chemin le plus court entre A et L par l'algorithme de Dijkstra bi-directionnel.
2. Trouver l'arbre couvrant de poids minimal avec l'algorithme de Prim. On prendra A comme point de départ.
3. Trouver un arbre couvrant de poids minimal avec l'algorithme de Kruskal.

Exercice 30



1. Trouver l'arbre couvrant de poids minimal avec l'algorithme de Prim, en prenant A comme point de départ.
2. Trouver l'arbre couvrant de poids minimal avec l'algorithme de Kruskal. Est-ce le même que celui obtenu en question précédente ?

Exercice 31



1. Trouver l'arbre couvrant de poids minimal avec l'algorithme de Prim, en prenant A comme point de départ.
2. Trouver l'arbre couvrant de poids minimal avec l'algorithme de Kruskal. Est-ce le même que celui obtenu en question précédente ?