



TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1^{er} au 5 juin 1971

TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES *

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

J.C. CONSTANTIN, P. DELEPINE et J.L. VERNET

THOMSON-CSF - Division: ASM. - 06 CAGNES-sur-MER

RESUME

Après un rappel des propriétés principales de la Transformée de Fourier Discrète et de ses relations avec la Transformée de Fourier, on examine dans quelles conditions on peut effectuer le calcul des estimateurs de Densité Spectrale et des fonctions de corrélation, notamment en ce qui concerne leurs fréquences d'échantillonnage.

On décrit ensuite un Transformateur de Fourier Rapide employant des mémoires circulantes grâce à la modification des graphes classiques de F.F.T.

On donne ensuite les caractéristiques et performances de l'appareil basé sur ces principes.

SUMMARY

After a brief survey of the main properties of the Discrete Fourier Transform and its relationship with the Continuous Fourier Transform, the conditions involved in spectrum estimates and correlation function calculation are studied, with special emphasis on their sampling frequencies.

A fast Fourier Processor, using circulating memories, as it works according to a modified FFT graph, is described.

The characteristics and performance of the equipment relevant to these principles are then stated.

* Etude financée par la Direction des Recherches et Moyens d'Essais. - Paris FRANCE.

TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

1. INTRODUCTION

L'équipement que nous présentons est basé sur l'utilisation d'un Transformateur de Fourier Rapide employant des mémoires circulantes. Il permet d'effectuer tous les traitements classiques sur des signaux issus de systèmes linéaires et invariants dans le temps (ou lentement variables). Avant d'exposer les principes de fonctionnement de cet équipement, nous allons examiner les différentes fonctions qu'il peut effectuer.

2. TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRETE [1]

Le Transformateur de Fourier Rapide qui constitue la partie centrale de l'équipement effectue un calcul de Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur des suites de nombres réels ou complexes X_n représentant le signal à analyser qui a été échantillonné à l'intérieur ou à l'extérieur de l'appareil. Rappelons que la TFD des échantillons X_n est définie par :

$$(1) \quad A_K = \sum_{n=0}^{n=N-1} X_n W_N^{nK} \quad K = 0, 1, \dots, N-1$$

avec

$$(2) \quad W_N = \exp \left(-2 \pi \frac{j}{N} \right)$$

Une transformée inverse définie de la même façon, permet de retrouver les échantillons X_n à partir des A_K .

$$(3) \quad X_n = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} A_K W^{-nK}$$



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

La compatibilité de (2) et (3) est due à l'orthogonalité des coefficients W . En effet, on vérifie aisément que :

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{N-1} W^{nK} W^{-nh} = \delta_{Kh}$$

On peut rapprocher la formule (1) de la Transformée de Fourier $A(f)$ d'un signal continu $X(t)$ [2] :

$$(5) \quad A(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \exp(-2\pi j ft) dt$$

dont on sait que, sous des conditions assez larges et suffisantes en physique, elle est réciproque et que :

$$(6) \quad X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) \exp(2\pi j ft) df$$

En fait, on peut dire que la Transformée de Fourier Discrète est une version échantillonnée de la Transformée de Fourier classique. Un certain nombre de propriétés sont identiques, (symétrie, translation, etc...) mais il faut cependant noter que si les quantités X_n représentent les échantillons d'un signal $X(t)$, le spectre de ce signal a été rendu périodique par l'échantillonnage. De la même façon, le spectre $A(f)$ ayant été échantillonné, on a remplacé le signal $X(t)$ par un signal périodique. De plus il est évident que la durée de $X(t)$ doit être limitée à N fois la période d'échantillonnage.

TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTESApplication au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

Il résulte de ces quelques considérations que des précautions doivent être prises non seulement au moment de l'échantillonnage de $X(t)$, mais encore dans l'emploi ultérieur du "spectre" A_K .

3. ESTIMATION DE DENSITES SPECTRALES.

Considérons un signal continu $X(t)$ et son spectre $A(f)$ donné par (5). La densité spectrale de $X(t)$ est par définition :

$$(7) \quad D(f) = A(f) A^*(f) \quad (A^* \text{ est le conjugué de } A)$$

La quantité $D(f).df$ représente la partie d'énergie localisée dans la bande de fréquence df . Cette quantité est physiquement intéressante car elle permet par exemple d'atteindre les moments du second ordre d'un processus aléatoire stationnaire, de mettre en évidence les fréquences de résonances d'un système dont est issu le signal $x(t)$ etc...

Pour effectuer le calcul de $D(f)$, il est nécessaire de disposer de $X(t)$ dans sa totalité. Pratiquement, on remplace $D(f)$ par son estimation $\hat{D}(f)$ calculée sur une durée finie de $X(t)$. $\hat{D}(f)$ est alors une fonction du temps. En effet, son expression est :

$$(8) \quad \hat{D}(f, t) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(u+t) X(u) \exp \left[-2\pi j (u+t) f \right] du \right|^2$$



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales et des fonctions de corrélation

Pour obtenir l'estimation de $D(f)$, on effectue le produit de corrélation de $X(t)$ par une "fenêtre glissante":

$$p(u + t) \exp \left[- 2\pi j f (u+t) \right]$$

où $p(u + t)$ est une fonction de pondération de durée limitée T choisie de façon à avoir le spectre le plus étroit possible pour une durée T donnée (son choix résulte d'un compromis). L'expression (8) peut se mettre sous la forme :

$$D(f, t) = \left| \exp(-2\pi j f t) \int_{-\infty}^{+\infty} p(u + t) X(u) \exp(-2\pi j u f) du \right|^2$$

$$(9) \quad D(f, t) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(u + t) X(u) \exp(-2\pi j u f) du \right|^2$$

En fait, la fonction $\hat{Y}_f(t)$ est elle-même échantillonnée. La période d'échantillonnage minimale T_d est liée à la durée T et non à $X(t)$.

En effet, l'intégrale de (9) est la fonction de corrélation temporelle de $p(u+t)$ par $X(u) \exp(-2\pi j f u)$. Donc son spectre est le produit du spectre de $X(u) \exp(-2\pi j f u)$ par celui de $p(u)$. (Fig. 1)

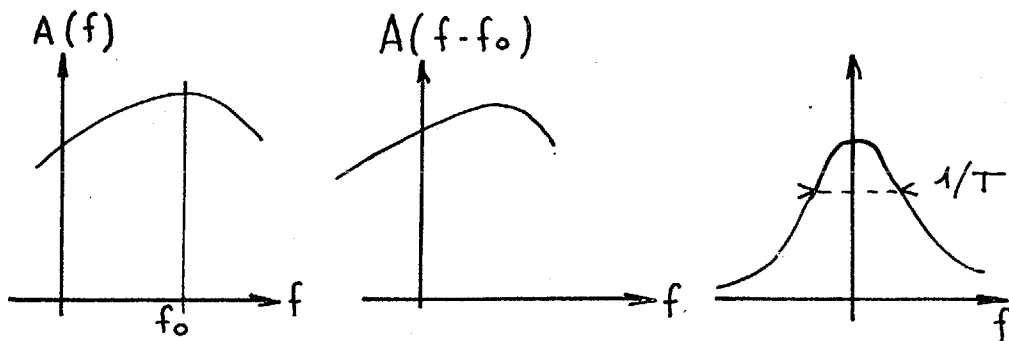


Figure 1

TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTESApplication au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

Le premier est celui de $X(u)$ décalé de la fréquence f , donc quelconque a priori. Le deuxième est centré autour de la fréquence nulle et sa largeur à mi-puissance est de l'ordre de $\frac{1}{T}$.

Le spectre de \bar{D}_f^V est l'autocorrélation du spectre de l'intégrale de (9). Sa largeur à mi-puissance est donc de l'ordre de $\frac{1}{T}$, ce qui impose une valeur de T_d voisine de $\frac{T}{2}$. Il est inutile d'augmenter cette cadence, le spectre de l'information de sortie étant pratiquement limité à $\frac{1}{T}$. L'estimation de $D(f)$ peut être améliorée par l'intégration de $\bar{D}_f^V(t)$, ce qui diminue la fluctuation de la valeur mesurée, mais sa finesse d'analyse est limitée par la durée T de mesure de $\bar{D}(f, t)$.

4. CORRELATION DE DEUX SIGNAUX4.1. Généralités

La fonction de corrélation $\Psi(\tau)$ de deux signaux $X_1(t)$ et $X_2(t)$, supposés d'énergie finie, s'écrit :

$$(10) \quad \Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(u) X_2(u + \tau) du$$

La fonction $\Psi(\tau)$ est une mesure de la ressemblance de $X_1(u)$ et $X_2(u)$ au sens de l'erreur quadratique moyenne $\epsilon(\tau)$. En effet, celle-ci peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \epsilon(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [X_1(u) - X_2(u + \tau)]^2 du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [X_1(u)]^2 du + \int_{-\infty}^{+\infty} [X_2(u)]^2 du \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(u) X_2(u + \tau) du \end{aligned}$$



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales et des fonctions de corrélation

$$\epsilon(\tau) = E_1 + E_2 - 2\psi(\tau)$$

où E_1 et E_2 sont les énergies de $X_1(u)$ et $X_2(u)$

On voit donc que $\epsilon(\tau)$ est une fonction linéaire de $\psi(\tau)$. En particulier si les deux signaux sont identiques à un décalage temporel τ_0 près, la fonction $\epsilon(\tau)$ s'annule pour $\tau = \tau_0$ et donc $\psi(\tau)$ passe par un maximum pour cette valeur.

Le calcul de $\psi(\tau)$ peut s'effectuer en passant par l'intermédiaire des spectres de $X_1(t)$ et $X_2(t)$.

En effet, soient $\chi_1(f)$, $\chi_2(f)$ et $\phi(f)$ les transformées respectives $X_1(t)$, $X_2(t)$ et $\psi(t)$. On sait que :

$$(10) \quad \phi(f) = \chi_1(f)\chi_2(f)$$

d'où :

$$(11) \quad \psi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_1(f)\chi_2(f) \exp(2\pi j f \tau) df$$

Comme pour l'analyse spectrale, la fonction de corrélation est calculée sur une durée finie T et la fonction $\psi(\tau)$ est remplacée par :

$$(12) \quad C(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u+t) X_1(u) X_2(u+\tau) du$$

Le problème de la cadence minimale d'échantillonnage de $C_\tau(t)$ se résout de la même façon que précédemment. En effet, $C_\tau(t)$ est le produit de corrélation de la fonction $p(u)$ par la fonction $X_1(u) X_2(u+\tau)$. Il en résulte donc que le spectre

TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

de $C_T(t)$ est le produit du spectre de $p(u)$ par celui de $X_1(u) X_2(u+\tau)$, (la variable étant u). Or, la largeur à mi-puissance du premier est de l'ordre de $\frac{1}{T}$. Il en résulte donc que le pas minimum d'échantillonnage est de l'ordre de $\frac{T}{2}$. (Fig. 2)

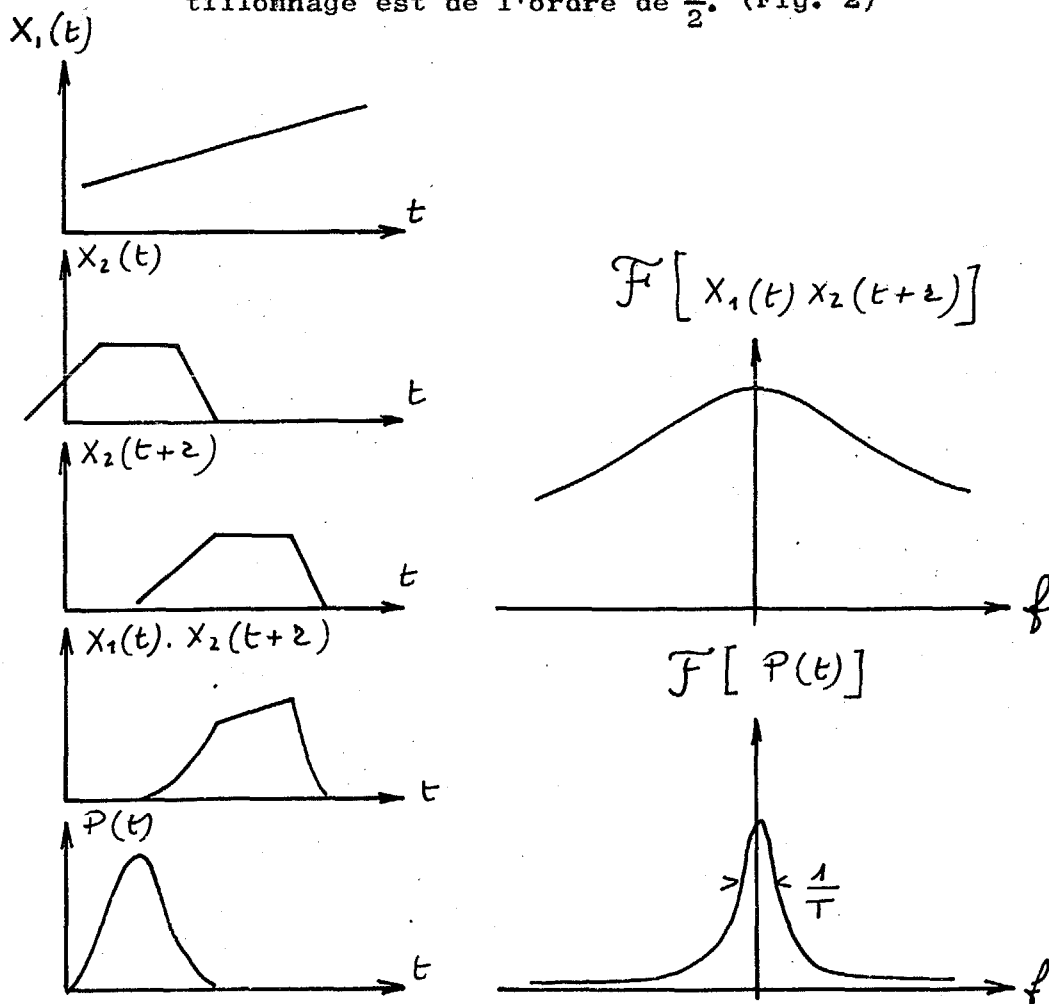


Figure 2



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales et des fonctions de corrélation

Si on s'intéresse maintenant à la fonction $C_t(\tau)$, il suffit de réécrire (12) sous la forme :

$$C_t(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [p(u+t) X_1(u)] X_2(u+\tau) du$$

et on voit que $C_t(\tau)$ apparaît comme la corrélation de $X'_1(u) = p(u+t) X_1(u)$ par $X_2(u)$ la variable étant u . Le spectre de cette corrélation est donc égal au produit des spectres de $X'_1(u)$ et $X_2(u)$. On voit alors aisément que la cadence minimum d'échantillonnage est celle de $X_1(u)$.

4.2. Emploi de la T.F.D. pour le calcul de la corrélation

A partir des relations définissant la TFD directe et inverse et des relations d'orthogonalité (4), on peut montrer aisément que si X_n et Y_n sont deux séries de N échantillons, on peut calculer exactement les échantillons Z_s définis par la relation :

$$(13) \quad Z_s = \sum_{n=0}^{N-1} X_n Y_{n-s}$$

dans laquelle tous les indices sont pris modulo N , en passant par les TFD des séries X_n et Y_n . L'algorithme est alors le suivant :

$$(14) \quad \begin{array}{l} X_n \xrightarrow{\text{TFD}} A_K \\ Y_n \xrightarrow{\text{TFD}} B_K \end{array} \quad (A_K \ B_K^*) \xrightarrow{\text{TFD}^{-1}} Z_s$$

Ces relations (13) et (14) sont les homologues de (10) et (11) définies sur des signaux



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

continus. Mais il faut noter que les indices de (13) sont pris modulo N . Ceci vient de la périodicité des signaux X et Y supposée implicitement par le calcul de la T.F.D.

On se rend compte aisément, fig. 3, et le calcul détaillé le confirme, que si l'un des signaux s_1 ou s_2 a une durée T_1 inférieure à T , représentant N_1 échantillons avec $N_1 < N$, le calcul de corrélation de s_1 avec s_2 effectué à l'aide de la TFD fournira $N - N_1$ points exacts. Il est pratique, mais non indispensable de limiter le nombre d'échantillons de l'un des signaux à $\frac{N}{2}$.

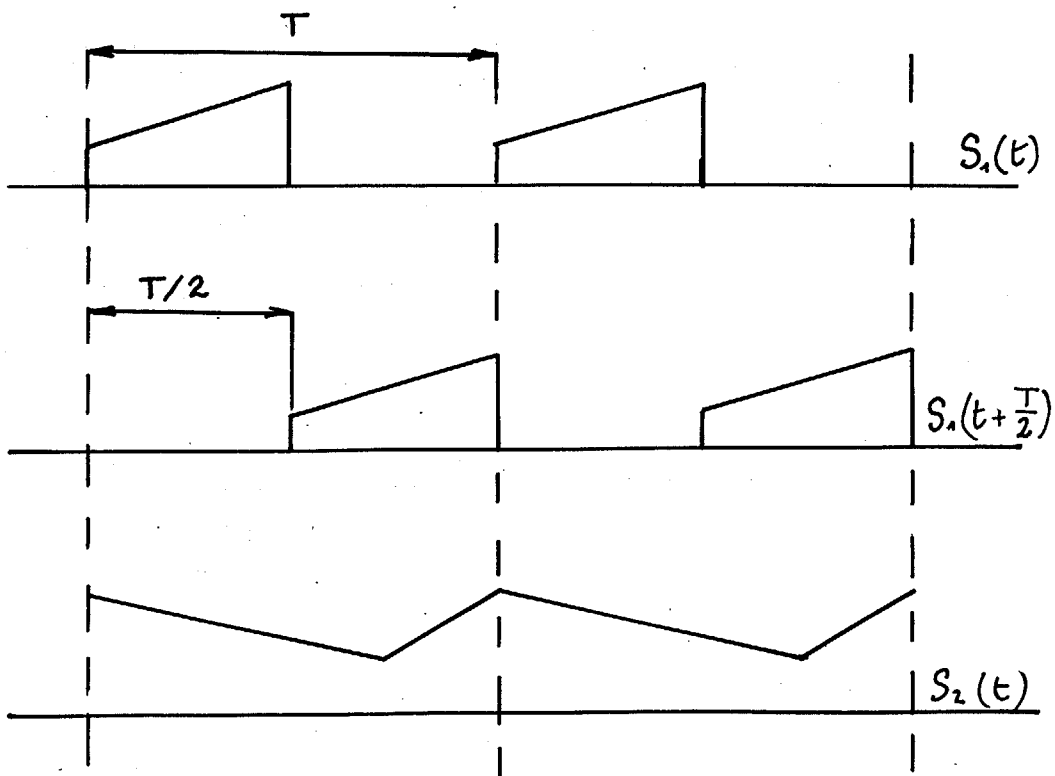


Figure 3



TRANSFORMATION DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales et des fonctions de corrélation

Le nombre de points de corrélation exact est alors également de $\frac{N}{2}$. Il faut bien remarquer que ces points de corrélation sont absolument exacts et que le passage par la TFD n'introduit aucune erreur à condition de limiter convenablement le nombre d'échantillons de l'un des signaux.

5. FILTRAGE DIGITAL OU CORRELATION PAR UNE COPIE

Certains problèmes impliquent la comparaison d'un signal se déroulant dans le temps avec un signal fixe appelée copie, c'est-à-dire, qu'il faut effectuer la corrélation d'un signal $X_1(t)$ par une copie $X_2(u)$:

$$(15) \quad Y(t) = \int_{-T}^0 X_1(t+u) X_2(u) du$$

$Y(t)$ est un signal qui se déroule dans le temps. Le calcul de $Y(t)$ peut s'effectuer par l'intermédiaire des T.F., suivant le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{l} X_1(t) \xrightarrow{\text{TF}} X_1(f) \\ X_2(t) \xrightarrow{\text{TF}} X_2(f) \\ X_1^*(f) X_2(f) \xrightarrow{\text{TF}^{-1}} Y(t) \end{array}$$

Il semble à priori, qu'un Transformateur de Fourier traitant des signaux de durée T ne puisse effectuer que la corrélation d'un signal $X_1(t)$ de durée limitée. En fait, il n'en est rien et la durée de $X_1(t)$ n'est pas limitée.

En effet, on a vu au § 4.2, que l'on peut calculer $\frac{N}{2}$ points exacts de corrélation à partir de $\frac{N}{2}$ points représentatifs de $X_2(t)$ et de N points de $X_1(t)$. Il suffit alors d'effectuer un calcul de corrélation en renouvelant à chaque fois $\frac{N}{2}$ points de $X_1(t)$ pour calculer de façon exacte les échantillons de $Y(t)$.



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

6. TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE (FFT) - GRAPHE UTILISE

Nous ne nous étendrons pas sur les algorithmes de FFT, le sujet ayant été abondamment traité dans la littérature [2], [3]. Rappelons brièvement que le calcul de la TFD par l'algorithme FFT consiste à prendre des séries de $N = 2^p$ échantillons que l'on combine linéairement deux à deux. On obtient de la sorte N nouveaux échantillons, cette opération étant dénommée itération. Au bout de p itérations, les N échantillons représentent la TFD de la série originale. Cette opération est symbolisée par un graphe, Fig. 4, où les échantillons (8 dans le cas présent) sont les noeuds, les flèches indiquant les combinaisons linéaires utilisées.

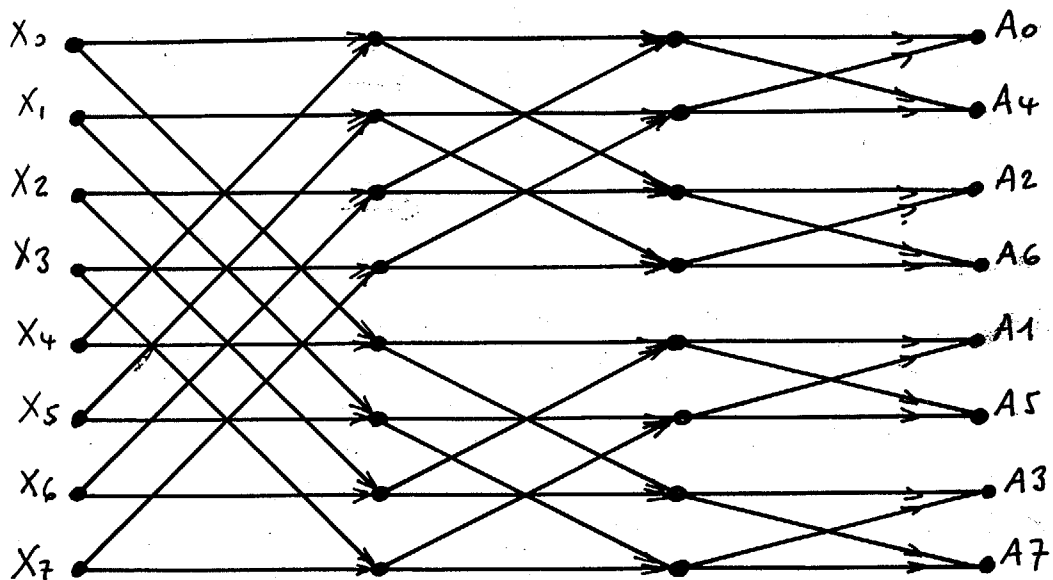


Figure 4



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

Le nombre de calculs à effectuer est de $2 N \log_2 N$ et le nombre de multiplications est égal à $N \log_2 N$. Un calcul suivant la méthode classique demande N^2 multiplications. Le gain de temps est donc très important et croît avec N comme $\frac{N}{\log_2 N}$. Cependant, les quantités A_K calculées ne sont pas disposées dans l'ordre naturel $A_0 A_1 \dots A_{N-1}$. Les résultats $A'_0, A'_1 \dots A'_i \dots A'_{N-1}$, sont donnés dans l'ordre binaire inverse, c'est-à-dire, que si on écrit l'indice i en numération binaire :

$$i = a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 \dots + a_p 2^p + a_{N-1} 2^{N-1} \quad a_p = 1 \text{ ou } 0$$

$$A'_i = A_j, \text{ avec :}$$

$$j = a_{N-1} 2^0 + a_{N-2} 2^1 + \dots + a_0 2^{N-1}$$

D'autre part, on constate sur la Fig. 4, que le graphe n'est pas régulier ; chaque itération diffère des autres, non seulement par les coefficients appliqués aux échantillons, mais encore par les adresses de ceux-ci.

Ceci n'est pas gênant lorsque l'algorithme est calculé sur un ordinateur employant des mémoires à accès aléatoires. Par contre, il est pratiquement impossible d'utiliser des mémoires circulantes où on a seulement accès au premier des échantillons contenus dans la mémoire.

Aussi, les graphes classiques ont été modifiés. Celui qui a été choisi est représenté Fig. 5. Il est régulier. La séquence d'adresse à générer est la même à chaque itération.



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

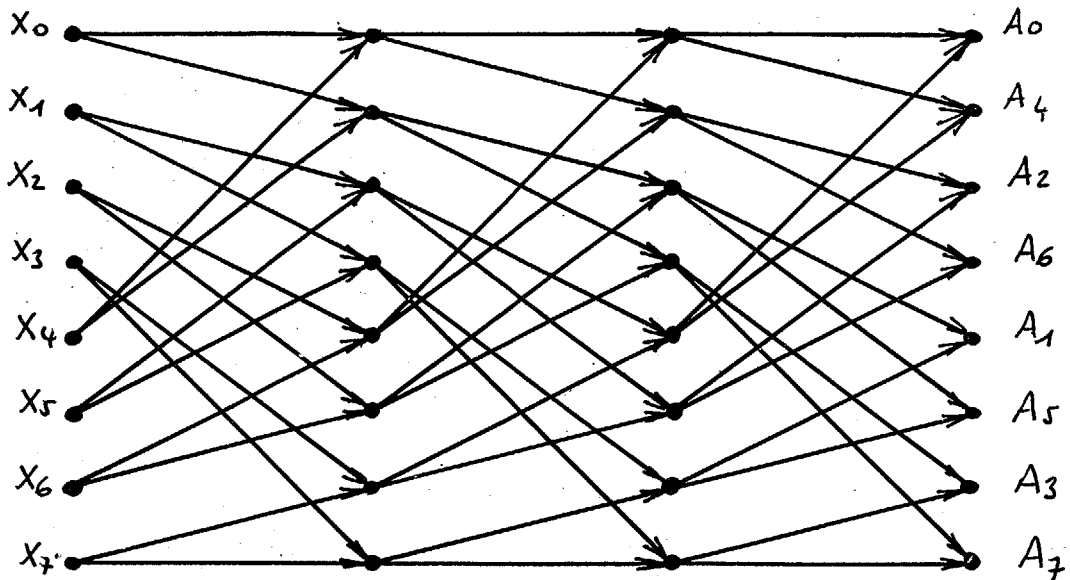


Figure 5

De plus, pour chaque calcul élémentaire, on combine deux échantillons dont les adresses sont distantes de $\frac{N}{2}$ et les résultats ont des adresses voisines.

On montrera au paragraphe suivant que ceci permet d'effectuer aisément les calculs à l'aide de mémoires circulantes. On peut cependant remarquer que cette façon de procéder conduit à l'emploi de mémoires dont la capacité totale est de $2N$ mots, mais nous verrons qu'il est possible d'effectuer simultanément deux transformées de Fourier, l'une directe et l'autre inverse avec la même quantité de mémoires. Ceci est particulièrement avantageux dans le cas du calcul de fonctions de corrélation ou de convolution.



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

7. ARCHITECTURE DU TRANSFORMATEUR DE FOURIER

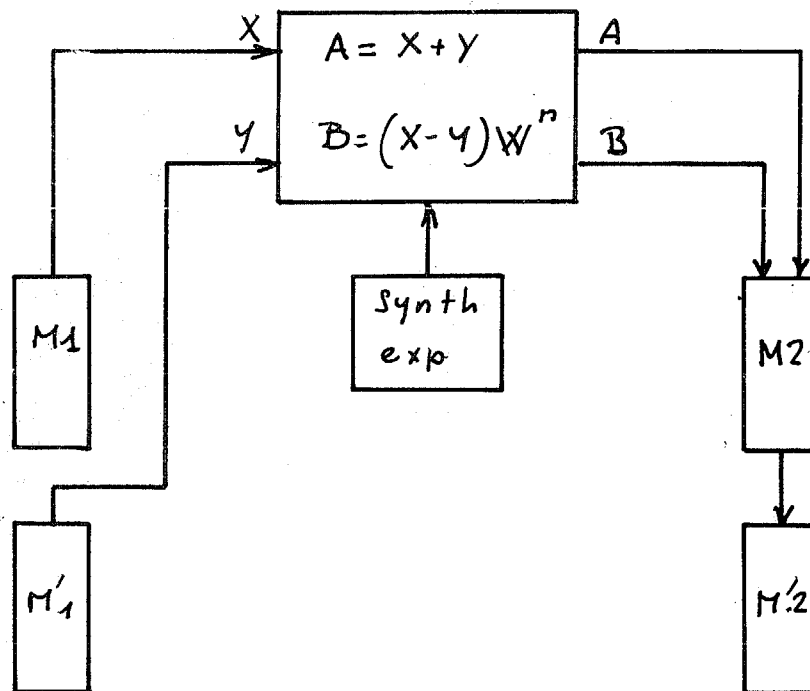


Figure 6

La Fig. 6 donne le schéma synoptique de l'appareil qui découle directement du graphe établi précédemment. Les échantillons de b bits sont supposés enregistrés dans l'ordre naturel dans le bloc mémoire M_1, M_1' ; Les deux échantillons X et Y sont introduits dans une unité arithmétique qui effectue les calculs :

$$A = X + Y \quad B = (X - Y) W^n$$

conformément au graphe décrit précédemment. Les quantités A et B sont introduites dans le registre M_2 , l'un à la suite de l'autre. Les registres M_2 et M_2' sont mis en série.



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales et des fonctions de corrélation

On effectue de la sorte par simple décalage $\frac{N}{2}$ opérations, la quantité W^n étant fournie par un synthétiseur conformément au graphe.

A la fin de ce calcul, les registre M_1 et M'_1 sont vides. M_2 et M'_2 sont pleins. Il suffit de permuter M_1 , M'_1 et M_2 , M'_2 (ce qui s'effectue pratiquement à l'aide d'interrupteurs logiques) et on peut effectuer de la même manière l'itération suivante.

Au bout de $\log_2 N$ itérations, on dispose de la Transformée de Fourier Discrète des N mots d'entrée, les voies de sortie étant données dans l'ordre inverse binaire

La Fig. 7 donne le deuxième graphe utilisé dans l'appareil. Il est en fait identique au précédent, mais les calculs sont effectués en sens inverse. A partir de N mots introduits dans l'ordre binaire inverse, il délivre dans l'ordre naturel N mots représentant la Transformée de Fourier Discrète des N échantillons précédents. A partir de ce graphe, la Fig. 8 donne le schéma synoptique de l'appareil correspondant. On retrouve les éléments précédents, mais les liaisons des mémoires avec l'unité de calcul ont été inversées et cette dernière effectue les calculs :

$$A = X + Y \cdot W^n \qquad B = X - Y \cdot W^n$$

La suite des opérations est identique à celle donnée pour le graphe précédent.



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

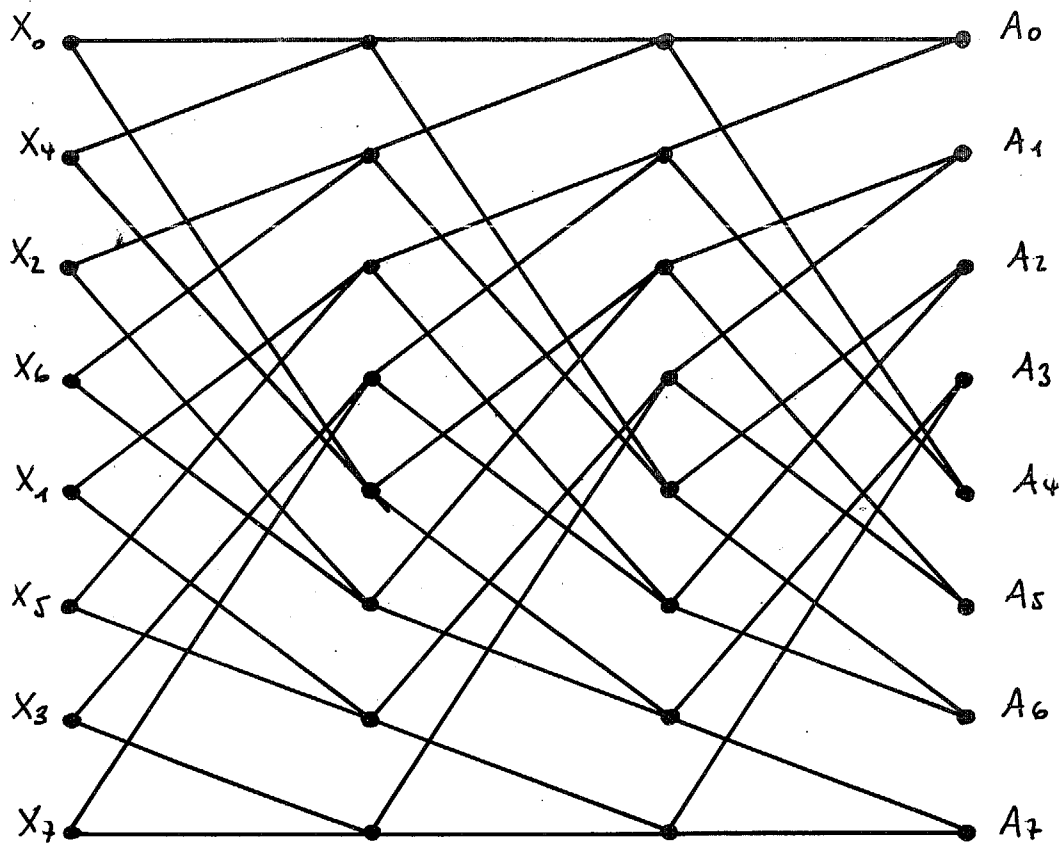


Figure 7

TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

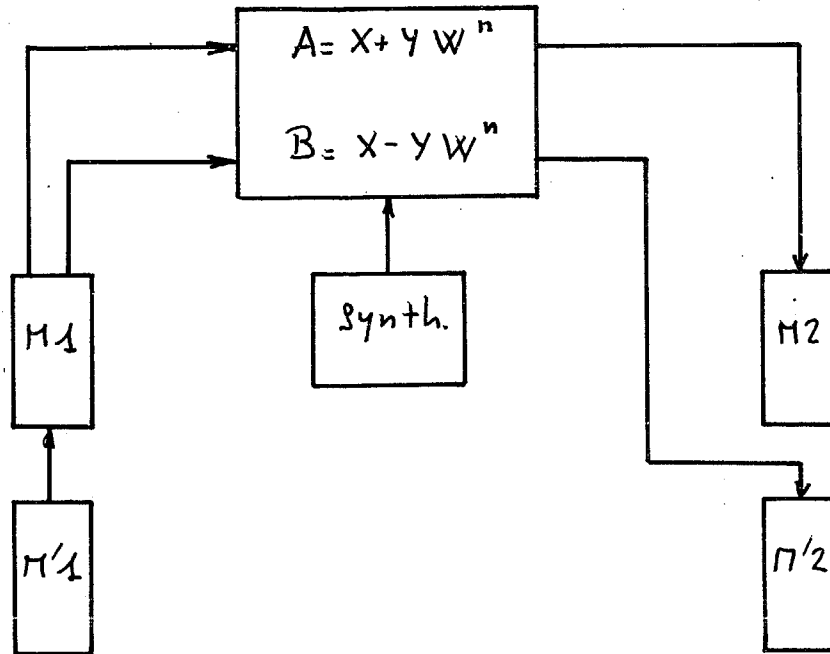


Figure 8

8. MISE EN OEUVRE SIMULTANEE DES DEUX GRAPHES

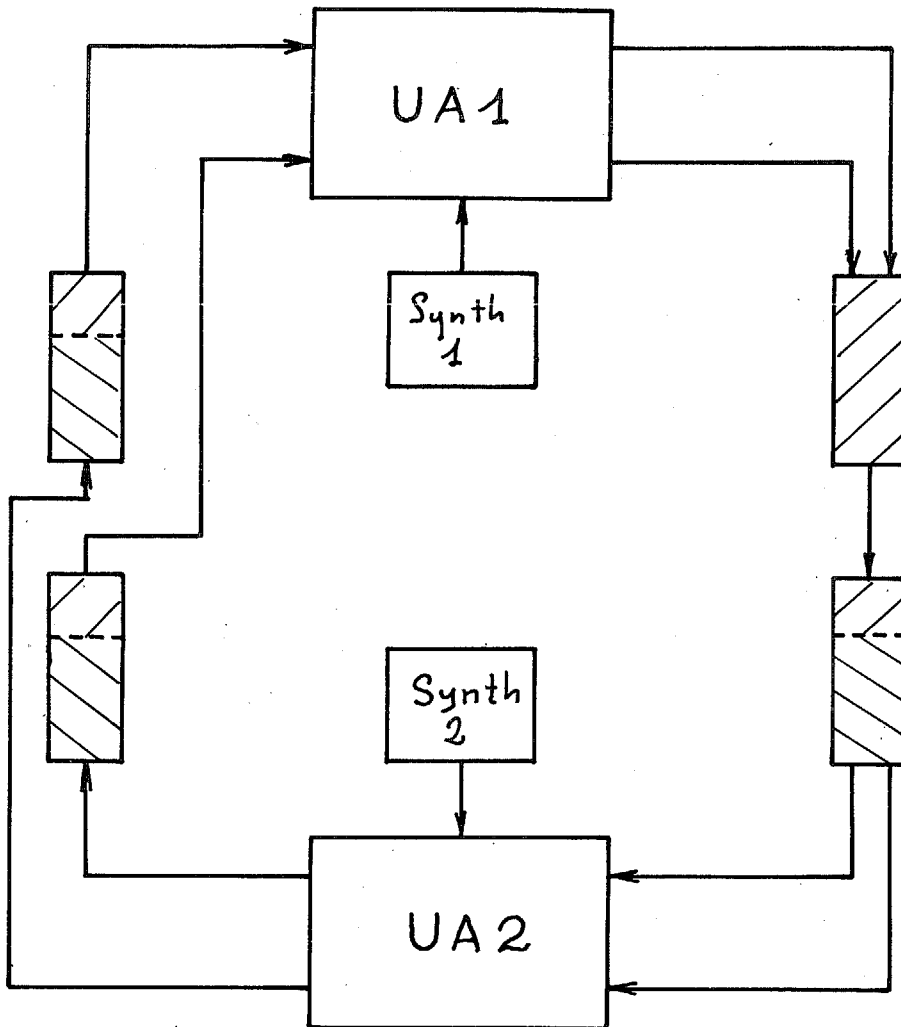
On a vu qu'au cours des deux calculs précédents, la moitié des mémoires ne contient aucune information. Il se trouve qu'on peut utiliser cette moitié pour effectuer simultanément l'autre calcul. L'architecture du calculateur prend alors la forme donnée Fig. 9.

On effectue simultanément deux calculs de Transformée de Fourier, l'un direct, l'autre inverse en employant toutes les cases mémoires de l'appareil. Cette configuration est très intéressante dans le cas de la corrélation et permet de doubler la vitesse de calcul tout en simplifiant l'organisation du calcul et en optimisant la capacité de la mémoire.



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation



Mots appartenant à :

la T.F.D. 1 // //

la T.F.D. 2 \ \ \

Figure 9

On montre en outre que le résultat de la $i^{\text{ème}}$ itération peut-être interprété comme les TFD de $(p-i+1)$ signaux multiplexés et constitués des N points d'origine, chacun de ces signaux comprenant $N/(p-i+1)$ points.



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales et des fonctions de corrélation

Cette propriété permet de traiter simultanément plusieurs signaux.

9. PRECISION DES CALCULS

Au cours d'une itération, les composantes des termes de la série résultante peuvent atteindre des valeurs plus grandes que celles des composantes des termes de la série de départ.

Si l'on ne veut pas utiliser de virgule flottante (ce qui augmenterait le temps de calcul), on est alors conduit à surveiller d'éventuels dépassements de dynamique au cours de chaque itération et à recadrer la phrase complète en l'affectant d'une caractéristique unique pour tous les mots qui la constituent. Au cours de la dernière itération, une caractéristique globale du résultat est obtenue en ajoutant les caractéristiques élémentaires ce qui permet de reconstituer l'échelle de sortie.

Sur la figure 10 on a effectué successivement la Transformée de Fourier directe puis inverse d'un signal constitué d'une impulsion de largeur égale à 8 points avec les nombres de digits suivants :

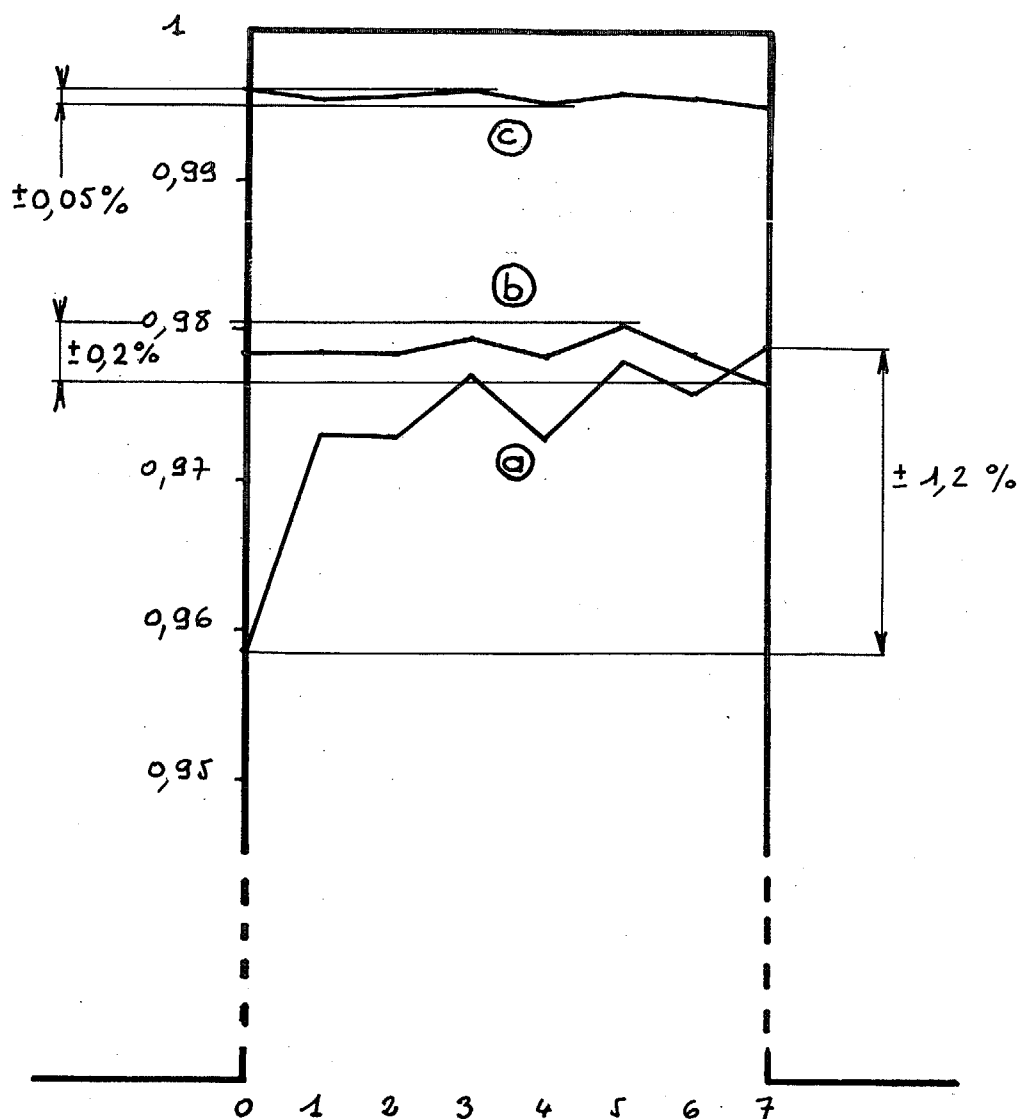
- courbe a) 12 bits pour l'information
9 bits pour les exponentielles
- courbe b) 12 x 10 bits
- courbe c) 12 x 12 bits

On voit que les fluctuations d'amplitude de l'impulsion reconstituée après cette double transformation varient de $\pm 1,2\%$ à $\pm 0,05\%$.



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation



- Ⓐ 12 x 9 bits
- Ⓑ 12 x 10 bits
- Ⓒ 12 x 12 bits

figure 10



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

10. FONCTIONS REALISEES PAR L'APPAREIL

A partir du Transformateur de Fourier dont on a décrit le principe et l'architecture générale, on a conçu un appareil qui réalise trois fonctions principales en temps réel.

Analyse spectrale.

Filtrage numérique (corrélation d'un signal avec une copie)

Corrélation en temps réel de deux signaux.

10.1. Analyse spectrale

Dans cette fonction, on réalise l'analyse spectrale d'un signal d'entrée qui peut être introduit par l'appareil sous forme digitale ou analogique. L'appareil délivre la Transformée de Fourier ou la densité spectrale de tranches de signaux comportant 1.024 échantillons. Cette analyse est renouvelée tous les 512 points de façon à assurer un bon échantillonnage de la fonction de sortie (voir § 3). Pour cela, l'appareil comprend une mémoire d'acquisition qui est organisée de façon à pouvoir acquérir des échantillons à cadence régulière, tout en délivrant en sortie à grande vitesse des séries de 1.024 échantillons.

Le signal analogique est démodulé par deux signaux à fréquence pure en quadrature de façon à le transformer en signal complexe.

Le temps de calcul d'une Transformée de Fourier est de 5ms. Le spectre est délivré dans l'ordre binaire inverse. Ceci ne présente pas d'inconvénient car on fournit une tension de balayage



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

pour oscilloscope qui permet de visualiser le spectre sous forme normale. D'autre part, si l'appareil est couplé avec un calculateur universel, on fournit en même temps que le spectre l'adresse des raies.

Un intégrateur multicanaux peut être placé à la sortie de l'appareil de façon à mettre en évidence les caractéristiques stationnaires du signal.

10.2. Filtrage numérique

Dans cette fonction, l'appareil effectue la corrélation d'un signal continu par une copie. Celle-ci est fournie à l'appareil sous sa forme temporelle (analogique ou digitale). L'analyseur en calcule la Transformée de Fourier et effectue ensuite la corrélation par l'intermédiaire de celle-ci. La sortie analogique ou digitale représente donc le filtrage du signal par la copie (On peut également effectuer une convolution du signal continu par une réponse impulsionnelle de filtre).

Pratiquement, l'appareil comporte la même mémoire d'acquisition que dans la fonction analyse spectrale. Il comprend également une mémoire où l'on stocke la Transformée de Fourier de la copie. Une mémoire de sortie est introduite de façon à restituer de façon continue la fonction de corrélation calculée,

10.3. Corrélation

Dans cette fonction, l'appareil effectue la corrélation de deux signaux se déroulant dans le temps.



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

La mémoire d'acquisition reçoit en alternance les échantillons des deux signaux. On calcule alors simultanément deux Transformées de Fourier à 512 points. Celles-ci se trouvent alors l'une à la suite de l'autre dans les mémoires de calcul (c'est une propriété du graphe employé). On effectue ensuite leur produit et on calcule une Transformée inverse. Le résultat peut être intégré dans un intégrateur multicanaux.

10.4. Possibilité de calcul des transformations de Walsh-Hadamard

Les algorithmes étudiés ainsi que le matériel proposé pour leur mise en oeuvre s'avèrent d'un usage très général en ce qu'ils permettent le calcul d'autres types de décompositions orthogonales que celles de Fourier et en particulier des décompositions de Walsh-Hadamard. Dans ce dernier cas, le synthétiseur est même réduit à sa plus simple expression puisque les opérations élémentaires à effectuer sont de la forme :

$$\begin{cases} A = X + Y \\ B = X - Y \end{cases}$$

11. TABLEAU DES PERFORMANCES DU TRANSFORMATEUR DE FOURIER

Le tableau suivant résume les performances du système décrit. Ces performances sont liées aux deux caractéristiques principales suivantes :

et Nombre de points : 1.024
Temps de calcul : 5.000 μ s



TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation ϕ

<u>ANALYSE SPECTRALE</u>	
- Temps réel	
- Nombre de raies	: 1.024
- Bande maximale	: 102.400 Hz
- Temps de calcul	: 5 ms
- Recouvrement	: moitié
- Pondération de la fenêtre d'entrée	: optionnelle
<u>CONVOLUTION (Filtrage Digital)</u>	
- Sortie continue à la fréquence d'échantillonnage de l'entrée	: < 102.400 Hz
- Renouvellement de la copie	: sur signal extérieur en 5 ms
- B T	: < 512
<u>CORRELATION</u>	
- Temps réel	
- Fréquence d'échantillonnage à l'entrée	: 51.200 Hz
- Nombre de points pour chaque fonction de corrélation calculée	: 256
- B T	: < 256

T : durée du signal en secondes

B : largeur de bande en Hz

TRANSFORMATEUR DE FOURIER RAPIDE A MEMOIRES CIRCULANTES

Application au calcul des densités spectrales
et des fonctions de corrélation

- BIBLIOGRAPHIE -

- [1] - J.W. COOLEY, P.A.W. LEWIS, P.D. WELCH,
The Finite Fourier Transform,
IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics,
Vol. AU-17, n° 2, June 1969, pp 77-85.
- [2] - J.W. COOLEY, P.A.W. LEWIS, P.D. WELCH,
What is the Fast Fourier Transform,
G.AE Subcommittee on Measurement Concepts,
IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics,
Vol. AU-15, n° 2, June 1967, pp 45-55.
- [3] - J.W. COOLEY, P.A.W. LEWIS, P.D. WELCH,
Application of the Fast Fourier Transform
to Computation of Fourier Integrals,
Fourier series and Convolution integral,
IEEE Trans, on Audio and Electroacoustics,
Vol. AU-15, n° 2, June 1967, pp.79-84..
-