



## TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1<sup>er</sup> au 5 juin 1971CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE.

**RESUME** Un canal dépendant d'un paramètre inconnu se définit par une relation de la forme :

$$y = f(x, \alpha)$$

où  $f$  est une fonction certaine,  $x$  une entrée,  $y$  une sortie.  $\alpha$  est un paramètre inconnu. Si nous substituons à  $\alpha$  une variable aléatoire  $Z$ , le canal devient un canal classique et on peut évaluer sa capacité. On définit alors la capacité comme le minimum (en  $Z$ ) de cette capacité. La distribution de  $Z$  est supposée soumise à certaines restrictions. Si par exemple  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $\alpha(t)$  sont des fonctions de temps, on peut astreindre  $\alpha(t)$  à être un processus de MARKOV de fonction de corrélation temporelle imposée (liée à la variabilité expérimentale des conditions temporelles d'une transmission.)

**SUMMARY**

CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE.

1. ALEATOIRE ET INCERTAIN.

En matière de décision, les notions d'aléatoire et d'incertain voisinent souvent, et on parle de décision "devant l'aléatoire", de décision "devant l'incertain". Ce sont de toutes manières des décisions devant l'ignorance, et aléatoire et incertain ne sont que des formes d'ignorances partielles, voisines, mais non immédiatement réductibles l'une à l'autre. Les problèmes de décision ne sont pas limités à des problèmes économiques ou humains ; l'interprétation d'un signal reçu est une décision, lorsqu'on le transforme de manière à lui donner une signification.

La récente théorie des systèmes, considérée d'un point de vue tout-à-fait général, permet de formaliser d'une manière claire le problème de décision.

2. SYSTEMES GENERAUX.

Rappelons que l'élément constitutif d'un système est un "module". Le module est caractérisé par deux ensembles  $X$  et  $Y$ , dont les éléments génériques sont désignés par  $x$  et  $y$  respectivement. Il existe entre ces éléments une relation  $R(x, y)$ , ce qui est schématisé par la figure (1) :

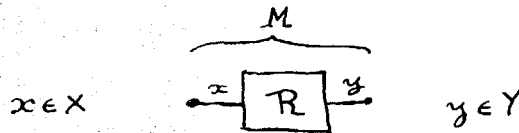


FIGURE (1)

Le module  $M$  est constitué par deux ensembles  $X$  et  $Y$ , et une relation  $R$  entre les éléments des ensembles.

Le module est supposé connu uniquement par l'intermédiaire de  $R$  ; ce qui signifie que l'on ne peut pas intervenir à l'intérieur du module. On ne peut intervenir que sur  $X$  et  $Y$ , en opérant par exemple des restrictions sur ces ensembles.



CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des systèmes est de reconnaître si une des deux interprétations :

$y$  est fonction de  $x$

$x$  est fonction de  $y$ ,

est plus justifiée que l'autre, ou si aucune n'est justifiée, ceci pris d'ailleurs dans un sens très élastique. Si une des hypothèses est justifiée, on figurera le module sous la forme figurée en (2).



FIGURE (2)

A gauche  $x$  pilote  $y$ , à droite  $y$  pilote  $x$ .

Dans un problème de transmission on sait a priori de quel côté se trouve l'émission et de quel côté se trouve la réception. Ce qui revient par exemple à choisir l'interprétation du côté gauche de la figure, où  $y$  est fonction de  $x$ . Il est à remarquer que cela ne signifie pas que  $y$  est fonction univoque de  $x$ . Il faut, pour discuter la conception que l'on se fait de la transmission, imaginer que le module est suivi d'un autre module  $N$ , avec une liaison de la forme figurée en Figure (3).

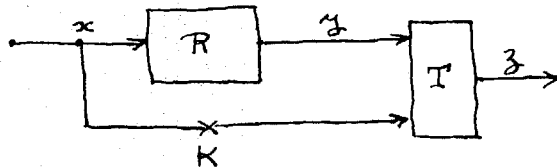


FIGURE (3)

Le module  $M$  est suivi du module  $N$  où entrent  $x$  et  $y$ .

En  $K$  une coupure est possible.

Il faut en effet supposer, pour pouvoir discuter quelque chose que :

$x$  a une influence en aval,

CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE

$y$  peut être utilisé en aval,

si  $x$  est connu en aval,  $y$  n'est plus intéressant en lui-même.

De sorte que la question qui se pose est de prendre une décision lorsqu'il y a une coupure en  $K$ , et que par conséquent  $z$  n'est plus lié à  $x$  que par l'intermédiaire de  $y$ . Pour lutter contre la coupure en  $K$  il faut essayer de reconstituer  $x$  à partir de  $y$ . C'est donc une fonction de  $y$  que nous cherchons bien que le module  $M$  fasse dépendre  $y$  de  $x$ .

Ceci n'est évidemment possible que si  $T(x, y, z)$ , relation entre entrées et sorties du second module, a une certaine relation avec la relation  $R$ . Si cela est possible, il y a une certaine "adaptation" de  $R$  et de  $T$ , ce que nous exprimerons par :

$R$  adapté à  $T$ .

3. ADAPTATION.

Jusqu'ici nous avons été vagues sur la signification des relations  $R$  et  $T$ .

Si ce sont des relations fonctionnelles de la forme

$$(1) \begin{cases} y = f(x) \\ z = \varphi(x, y) \end{cases}$$

l'adaptation s'exprime par le fait que :

$$(2) \{y = f(x') = f(x'')\} \Rightarrow \{\varphi(x', y) = \varphi(x'', y)\}$$

CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE

Dans cette expression nous mettons entre accolades une proposition, et nous avons au milieu une implication logique. Nous voyons que si nous connaissons  $y$ , nous pouvons reconstituer  $z$  en résolvant en  $\xi$  l'équation

$$(3) \quad y = f(\xi)$$

en choisissant une quelconque des solutions de cette équation, et en donnant à  $z$  la valeur :

$$(4) \quad z = \varphi(\xi, y)$$

La valeur de  $(z)$  d'après (1), est indépendante de la solution choisie parmi celles, en  $\xi$ , de (3). Pour être rigoureux encore faut-il que cette équation ait une solution. Si elle n'en a pas il y a une erreur quelque part, et  $y$ , fourni au module  $N$  est absurde puisqu'aucun  $x$  ne peut l'avoir produit.

Si maintenant  $R(x, y)$  et  $T(x, y, z)$  sont des relations au sens classique, c'est-à-dire si ce sont des parties des ensembles

$$X \times Y \quad X \times Y \times Z$$

la situation, quoique plus compliquée, peut encore se caractériser.

Soient  $\rho(x, y)$  et  $\tau(x, y, z)$  les fonctions booléennes, ne prenant par conséquent que les valeurs 0 et 1, et définies que  $X, Y, Z$ .  $\rho(x, y) = 1$  signifie que  $x$  et  $y$  sont effectivement dans la relation  $R$ , et  $\tau$  joue le même rôle pour  $T$ .

L'adaptation se traduit alors par le fait que

$$(5) \quad \left\{ \rho(x', y) \cdot \rho(x'', y) \right\} \Rightarrow \left\{ \tau(x', y, z) = \tau(x'', y, z) \right\}$$

ce qui signifie que si  $x'$  et  $x''$  sont en relation avec  $y$ , les couples

CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE

$x/y$  et  $x''/y$  sont simultanément en relation avec  $z$ , ou non.

On remarquera que le choix de  $\mathbb{T}$ , pour être adapté, fait intervenir une restriction éventuelle sur  $x$ , et un décodage de  $y$ . Lorsque la relation (5) est satisfaite, on peut en effet substituer à  $\tau(x, y, z)$  une relation  $\theta(y, z)$ , et on peut restreindre  $x$ , en ne choisissant que des valeurs de  $x$  qui donnent des  $y$  différents.

4. INTRODUCTION DE L'ALEATOIRE.

Où pouvons-nous faire intervenir l'incertain ou l'aléatoire ? L'aléatoire est le plus simple à formaliser. La première relation  $\mathbb{R}$  sera caractérisée par une matrice de transitions :

$$(1) \quad p_{x,y} = \text{Prob} \{y \text{ si } x\}$$

La seconde relation peut être prise certaine. Si elle est aléatoire, en effet, on ne peut compter sur son caractère aléatoire pour corriger l'aléatoire de  $\mathbb{R}$ .

Là intervient donc la théorie de l'information, qui revient à dire : l'adaptation est possible lorsque le nombre des valeurs possibles de  $z$  a pour logarithme, de base 2, la quantité :

$$(2) \quad I = \text{Max}_{p_x} \sum_{x,y} p_x p_{x,y} \log \frac{p_{x,y}}{q_y}$$

$$\text{avec} \quad q_y = \sum_x p_x p_{x,y}$$

La restriction des valeurs de  $x$  se fait donc par l'intermédiaire du choix des probabilités  $p_x$ . Mais si nous considérons la transmission d'une seule valeur de  $x$ , ceci ne prend un sens que si cela revient en fait à restreindre le champ de  $x$ , c'est-à-dire  $X$ ,

CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE

de manière que le logarithme, de base 2, du cardinal de  $X$ , soit

$$(3) \quad H = - \sum h_x \log h_x \sim I$$

Tout compte fait, les probabilités  $h_x$  ne servent que d'intermédiaire de calcul.

5. INTRODUCTION DE L'INCERTAIN.

Essayons de voir comment peut intervenir l'incertain. Remarquons que si  $\mathcal{R}$  n'est pas biunivoque la transmission est incertaine même si  $\mathcal{R}$  est parfaitement connue. Cela revient à examiner le schéma de la figure 4.

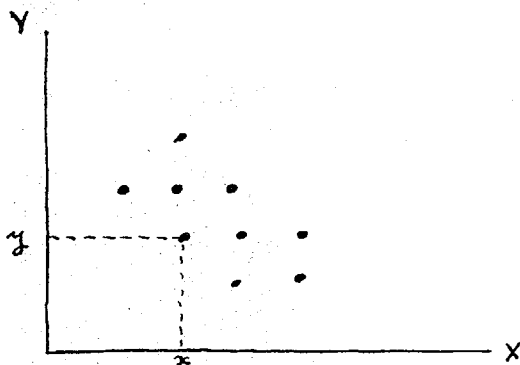


FIGURE (4)

Les points noirs caractérisent les groupes compatibles,  $X$  et  $Y$  sont deux ensembles finis. On caractérise par un point noir les couples compatibles.

Sur le couple compatible  $(x, y)$  mentionné sur la figure on observe qu'il y a 2 autres valeurs possibles de  $x$  (pour ce même  $y$ ) et deux autres valeurs possibles de  $y$  (pour ce même  $x$ ). Bien que le nuage de points soit parfaitement connu, l'incertitude subsiste dans les relations entre  $x$  et  $y$ ; peut-on alors préciser cette notion d'incertitude? MASEROVICZ a remarqué que l'on peut considérer  $\mathcal{R}(x, y)$  comme exprimant une application

$$y = f(x, \alpha)$$



CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE

$\alpha$  représentant un paramètre inconnu (par exemple le rang, parmi les valeurs possibles de  $\gamma$  associées à  $x$ , de la valeur considérée). Si  $(\alpha)$  est l'ensemble des valeurs de  $\alpha$  possibles, le cardinal de  $(\alpha)$  dépend de  $x$ . Sur la figure (3) on voit qu'il peut prendre les valeurs 1, 2, 3 suivant le cas. Lorsque ce cardinal est indépendant de  $x$ , l'incertitude en  $\gamma$  est alors, en ce sens, constante.

Un cas particulier intéressant est, celui où l'incertitude est constante, aussi bien en  $x$  qu'en  $\gamma$ , et est la même dans les deux sens. Cela signifie que dans la matrice des relations figurée en (4) il existe dans chaque ligne un même nombre  $\nu$  de points noirs, et également un nombre constant  $\nu$  de points noirs dans chaque colonne. La matrice est alors la superposition de  $\nu$  matrices de permutation. L'incertitude est alors bien expliquée. Il revient au même alors de considérer  $R(x, \gamma)$  ou de supposer que le passage de  $x$  à  $\gamma$  est biunivoque, par l'intermédiaire d'une matrice de permutations  $P_\alpha$ ,  $\alpha$  étant un indice inconnu. Cet indice peut être considéré comme "l'état" du module.

6. LIAISON POSSIBLE ENTRE INCERTAIN ET ALEATOIRE.

En général, une interprétation aussi directe n'est pas possible. On peut alors chercher à se ramener à un modèle informationnel. Posant a priori que la transmission se fait de  $x$  vers  $\gamma$ , et en posant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,\gamma} &= 1 && \text{si le couple } x, \gamma \text{ est compatible} \\ \varepsilon_{x,\gamma} &= 0 && \text{si le couple } x, \gamma \text{ est incompatible,} \end{aligned}$$

on peut considérer une matrice de transitions compatibles avec ces hypothèses, ce qui conduit donc aux équations :

$$h_{x,\gamma} = h_{x,\gamma} \varepsilon_{x,\gamma} \quad \sum_{\gamma} h_{x,\gamma} = 1$$



CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE

et le flux d'informations associé à cette matrice de transitions et des probabilités d'entrée, c'est-à-dire :

$$J = \sum_{x,y} p_x p_{x,y} \log \frac{p_{x,y}}{q_y} \quad q_y = \sum_x p_x p_{x,y}$$

On fait appel à la notion de jeu, en admettant que l'un des joueurs (le transmetteur) rend  $J$  maximum en jouant sur les  $p_x$ , tandis qu'un autre (la nature) rend  $J$  minimum en jouant sur les  $p_{x,y}$ . Ceci nous conduit à considérer :

$$I = \text{Max}_{p_x} \text{Min}_{p_{x,y}} J$$

Si nous appelons  $v_x$  l'incertitude sur  $y$  lorsque  $x$  est donné, c'est-à-dire

$$v_x = \sum_y \varepsilon_{x,y}$$

le minimum sera obtenu pour :

$$p_{x,y} = \frac{\varepsilon_{x,y}}{v_x}$$

et nous aurons maintenant à chercher le maximum en jouant sur les  $p_x$ . Cela revient à poser :

$$I_x = \sum_y p_{x,y} \log \frac{p_{x,y}}{q_y} \quad q_y = \sum_x p_x p_{x,y} = \sum_x \frac{p_x \varepsilon_{x,y}}{v_x}$$

et à résoudre

$$I = \sum_x p_x I_x$$

$$I_x \leq I$$

On est amené à un système linéaire par rapport aux  $\log q_y$  de la forme :

$$\sum_y \varepsilon_{x,y} \log q_y = v_x [I - \log v_x]$$

les seules équations intervenant étant celles où  $p_x > 0$ .

CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE

Lorsque la matrice contient le même nombre de 1 par ligne et par colonne, soit  $\nu$  et qu'il y ait  $n$  lignes et  $n$  colonnes, on retrouve naturellement :

$$I = \log \frac{n}{\nu}$$

$\nu$  est le nombre d'états du système.

Dans le cas général, le logarithme du nombre d'états du système est l'entropie conditionnelle de  $x$ , moins  $I$ , étant entendu que l'on a résolu le problème de jeu proposé.

En d'autres termes nous définissons la capacité par un Maxi-Mini dans le champ des relations certaines connues.

Comment peut-on réduire l'entropie d'entrée ? Il faut remarquer que cette réduction ne peut se faire qu'en excluant certains messages.

Par exemple, lorsque l'on décide, en transmission binaire, de répéter trois fois chaque signal à transmettre, cela revient à exclure certaines séquences.

La loi à laquelle obéissent cinq variables booléennes consécutives est :

$$\{x_n = x_{n+1} = x_{n+2}\} \vee \{x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3}\} \vee \{x_{n+2} = x_{n+3} = x_{n+4}\}$$

Ceci peut constituer une restriction à une chaîne de MARKOV quadruple, qui astreint au triplement. La définition est homogène, en ce sens que l'origine des triplements n'est pas imposée. C'est le signal que l'on obtiendrait avec pertes de synchronisation sporadiques.

Le signal de bruit, qui est constitué par des erreurs changeant 1 en 0 ou inversement, peut être éliminé s'il y a au plus une erreur par triplet. Ceci n'est pas réaliste parce que les erreurs ignorent la formation des triplets. Si on dit que deux erreurs sont au moins



CAPACITE D'UN CANAL DEPENDANT D'UN PARAMETRE INCONNU.

Prof. J.A. VILLE

---

distantes de 3 (c'est-à-dire séparées par une séquence sans erreur de longueur minimale 2) on obtient une restriction dans une chaîne de MARKOV.

Lorsque l'origine de la synchronisation est inconnue, il serait nécessaire, pour choisir les triplets à utiliser, de faire une étude statistique des erreurs décelées.

Une mauvaise formation de triplets conduit à des erreurs plus nombreuses qu'une bonne formation. Dans le cas d'une erreur sur trois signaux, la discrimination devient impossible, ou pénible. Il est donc bon de faire sur l'erreur une hypothèse moins sévère, par exemple l'existence entre deux erreurs consécutives d'une séquence de longueur minimale quatre. On se trouve alors avoir affaire à une chaîne de MARKOV avec restrictions, et le jeu de Maxi-Mini évoqué plus haut peut être joué.

---