

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



1/1

NICE du 16 au 21 JUIN 75

CONDITIONS POUR QU'UNE FONCTIONNELLE CAUSALE, LINEAIRE OU NON,  
D'UN PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS, SOIT MARKOVIENNE

A. BLANC-LAPIERRE

Université de Paris-Sud - Ecole Supérieure d'Electricité  
[Laboratoire des Signaux et Systèmes (C.N.R.S.-E.S.E.)]

## RESUME

Soient :  $N(t)$  un processus à accroissements indépendants de type très général et  $X(t) = \mathcal{C}\{N(t)\}$  une fonctionnelle certaine causale de  $N(t)$  exprimée par un développement de Volterra :

$$X(t) = \mathcal{C}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^t R_1(t; \theta_1) dN(\theta_1) \\ + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t R_2(t; \theta_1, \theta_2) dN(\theta_1) dN(\theta_2) + \dots$$

On recherche les conditions à imposer à  $\mathcal{C}$  pour que, pour le processus  $N(t)$  donné,  $X(t)$  soit markovien. Sous réserve d'hypothèses peu restrictives pour les applications, on montre que, pour que  $X(t)$  soit markovien : [i] lorsque la fonctionnelle  $\mathcal{C}$  est linéaire, il faut et il suffit qu'elle se ramène, par changement certain convenable de  $t$ , à un filtre linéaire causal à réponse exponentielle combiné à des multiplications par des fonctions certaines de  $t^{(+)}$  [tout au moins, ceci est-il vrai à condition d'exclure une complication de ce schéma analysée en détail dans le texte] , [ii] dans le cas général -  $\mathcal{C}$  non linéaire - il faut que  $X$  soit, presque sûrement, égal à une fonction certaine -dépendant du temps- d'une fonctionnelle linéaire de  $N(t)$  conforme à [i].

Applications à certaines équations différentielles stochastiques et à l'étude des fonctions de corrélation de fonctions aléatoires stationnaires markoviennes.

(+) Dans le cas linéaire, on précise les résultats donnés au Colloque GRETSI 1971 (page 128).

## SUMMARY

Let there be two random functions :  $N(t)$  with independent increments and  $X(t) = \mathcal{C}\{N(t)\}$  a causal functional defined by the following Volterra expansion :

$$X(t) = \mathcal{C}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^t R_1(t; \theta_1) dN(\theta_1) \\ + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t R_2(t; \theta_1, \theta_2) dN(\theta_1) dN(\theta_2) + \dots$$

It is shown that, under reasonable assumptions, for  $X$  to be markovian, [i] for  $\mathcal{C}$  linear, it is necessary and sufficient that  $\mathcal{C}$  can be reduced, by a non-random change of  $t$ , to a causal linear filter with exponential response combined with multiplications by non-random functions of  $t^{(+)}$ , [this result holds but for the case of a possible complication thoroughly analyzed in the text], [ii] in the general case, that is for  $\mathcal{C}$  non-linear, it is necessary that  $X$  be,  $\forall t$ , a non-random function of a causal linear functional consistent with [i].

Applications to stochastic differential equations and to the study of correlation functions of stationary markovian processes.

(+) This result completes the content of a previous paper (Colloque GRETSI 1971 - p. 128).



CONDITIONS POUR QU'UNE FONCTIONNELLE CAUSALE, LINEAIRE OU NON,  
D'UN PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS, SOIT MARKOVIENNE

1. INTRODUCTION.

De nombreux problèmes concrets (physique, mécanique, automatique, traitement du signal ...) introduisent des fonctions aléatoires (f.a.)  $X(t)$  résultant de l'excitation de systèmes macroscopiques déterministes  $S$  par des fluctuations microscopiques  $\delta$ . Dans ce qui suit,  $\delta$  interviendra par une f.a.  $N(t, \omega)$  ( $-\infty < t < +\infty$ ), réelle, centrée [ $E \{N(t, \omega)\} \equiv 0$ ;  $E$  : espérance mathématique], définie sur l'ensemble  $\Omega$  des épreuves  $\omega$ . Le système  $S$ , non aléatoire, associe à chaque  $N(t, \omega)$  une f.a.  $X(t, \omega)$  supposée réelle.  $S$  est donc défini par une fonctionnelle  $\mathcal{C}$  non aléatoire, que nous supposerons causale, c'est-à-dire telle que la valeur de  $X$  à un instant  $t$  quelconque ne dépende que du comportement de  $N$  pour  $\theta < t$  :

$$X(t, \omega) = \mathcal{C} \{t ; N(\theta, \omega) \mid [\theta < t]\} \quad (1-1)$$

Nous admettons que  $\mathcal{C}$  peut s'explicitier par un développement de Volterra (1) :

$$X(t) = \sum_{m, q. K=1}^{\infty} X_K(t) \quad (1-2)$$

avec :

$$X_K(t) = \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t R_K(t; \theta_1, \dots, \theta_K) dN(\theta_1) \dots dN(\theta_K) \quad (1-3)$$

On suppose les  $R_K$  "symétrisés" par rapport à  $[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]$  (toujours possible). Cette représentation de  $S$  présente une grande généralité. Elle recouvre, en particulier, les systèmes constitués par une succession de filtrages linéaires et d'opérations non linéaires instantanées (tout au moins sous des conditions très générales).  $S$  est invariant au cours du temps si tous les  $R_K$  le sont. Le système  $S_1$ , linéaire, invariant au cours du temps, et à réponse exponentielle :

$$R_1(\tau) = \exp[-(\tau/a)] \text{ avec } a > 0, \tau = t - \theta > 0 \quad (1-4)$$

jouera un grand rôle dans la suite. Pour  $N$  à accroissements stationnaires [ $E \{ [dN(\theta)]^2 \} = \rho_0 d\theta$ ], on a alors :

$$C_X(\tau) = E \{ X(t) X(t-\tau) \} = [(\rho_0 a/2)] \exp\{-|\tau/a|\} \quad (1-5)$$

La question traitée ici est la suivante : quelles conditions faut-il imposer à  $S$ , c'est-à-dire à  $\mathcal{C}$ , pour que  $X(t)$  soit markovien ? Précisons : il ne s'agit pas d'imposer à  $S$  des conditions assurant le caractère markovien à  $X$ ,  $\forall$  la f.a.  $N(t)$ , mais de lui imposer des conditions assurant ce caractère pour la f.a.  $N(t)$  fixée. Plus exactement - ceci sera important pour les systèmes non linéaires - nous viserons à

assurer ce caractère pour cette f.a.  $N(t)$  et pour tous ses "multiples certains"  $\lambda N(t)$  [ $\lambda$  nombre certain  $\neq 0$  quelconque]. Nous verrons d'ailleurs que les conditions alors imposées à  $S$  assurent le caractère markovien de  $X$ ,  $\forall N$ . Les f.a.  $N(t)$  seront largement quelconques ; en particulier, nous ne supposerons pas  $N(t)$  gaussien. De même  $S$  sera très général : ni invariant dans le temps, ni linéaire. Nous traiterons cependant d'abord le cas linéaire (§ 2) pour lequel nous préciserons des résultats antérieurs et auquel, d'une certaine façon, on peut ramener le cas non linéaire (§ 3). Le § 4 sera consacré à diverses applications.

Précisons maintenant les notations essentielles et les hypothèses de départ.

NOTATIONS : Pour distinguer, dans  $X(t)$ , les contributions des  $dN(\theta)$  correspondant respectivement à :  $\theta \leq t < t'$  et à  $t < \theta' \leq t'$ , posons :

$$X_K(t') = \sum_{k_\alpha, k_\beta}^{k_\alpha + k_\beta = K} C_{k_\alpha, k_\beta}^{k_\alpha} X_{k_\alpha, k_\beta}(t, t') \quad (1-6)$$

avec :

$$X_{k_\alpha, k_\beta}(t, t') = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t R_{k_\alpha, k_\beta}(t; \theta_1, \theta_{k_\alpha}, \theta_1, \theta_{k_\beta}) dN(\theta_1) \dots dN(\theta_{k_\alpha}) dN(\theta_1) \dots dN(\theta_{k_\beta}) \quad (1-7)$$

$$\dots \int_{-\infty}^t R_K[t'; \theta_1, \dots, \theta_{k_\alpha}, \theta_1, \dots, \theta_{k_\beta}] dN(\theta_1) \dots dN(\theta_{k_\alpha}) dN(\theta_1) \dots dN(\theta_{k_\beta})$$

où  $k_\alpha$  et  $k_\beta$  [ $k_\alpha + k_\beta = K$ ] sont des entiers  $\geq 0$ , non nuls simultanément. On désignera par  $X(t, t')$  la valeur de  $X(t')$  conditionnellement lorsque tous les  $dN(\theta')$  [ $t < \theta' \leq t'$ ] sont nuls. D'autre part, nous poserons  $\omega = \omega_t^- \omega_t^+$  [ $\omega_t^- \in \Omega_t^-$ ;  $\omega_t^+ \in \Omega_t^+$ ;  $\Omega = \Omega_t^- \Omega_t^+$ ] où  $\omega_t^-$  et  $\omega_t^+$  concernent respectivement les  $dN(\theta)$  passés [ $\theta \leq t$ ] ou futurs par rapport à  $t$ . Les épreuves  $\omega_t^-$  et  $\omega_t^+$  sont indépendantes.

HYPOTHESES : En plus des hypothèses  $H_1$  relatives aux convergences impliquées par (1-2) et (1-3), nous faisons les suivantes :

Hypothèse  $H_2$  : Soient  $\Delta_1 \subset \Omega$ , de probabilité  $> 0$ ,  $[t_0 - T, t_0]$  un intervalle de longueur  $T > 0$ ,  $\lambda$  un nombre réel  $\neq 0$ , et  $\Delta_2 \subset \Omega$  [ $\Delta_1, \Omega, [t_0 - T, t_0], \lambda$ ] le sous-ensemble de  $\Omega$  dont les  $\omega$  se déduisent de ceux de  $\Delta_1 \subset \Omega$  en multipliant les  $dN(\theta)$  par  $\lambda$  pour  $\theta \in [t_0 - T, t_0]$  et par 1 pour  $\theta \notin [t_0 - T, t_0]$ . Selon  $H_2$ , la probabilité de  $\Delta_2 \subset \Omega$  [ $\Delta_1 \subset \Omega, [t_0 - T, t_0], \lambda$ ] est  $> 0$ . Cette hypothèse paraît,



CONDITIONS POUR QU'UNE FONCTIONNELLE CAUSALE, LINEAIRE OU NON,  
D'UN PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS, SOIT MARKOVIENNE

à première vue, fortement restrictive : elle exclut par exemple, le cas où  $N(t)$  est constitué par des sauts poissonniens, tous d'amplitude +1. En fait, il n'y a pas là de restriction sérieuse. On peut en effet, toujours considérer un tel modèle comme limite de cas où les sauts ont des amplitudes réparties sur  $-\infty, +\infty$  avec tendance, à la limite, vers l'existence d'une masse de probabilité +1 sur cette valeur 1.

Hypothèse  $H_3$  : Dire que  $X(t)$  est markovien, c'est affirmer que, pour  $X(t_0)$  fixé, il y a indépendance entre les événements relatifs à  $X$  respectivement futurs  $[t > t_0]$  ou passés  $[t < t_0]$ . L'hypothèse  $H_3$  a pour but de nous permettre de remplacer l'énoncé ci-dessus par le suivant : dire que  $X(t)$  est markovien, c'est affirmer que, pour  $X(t_0)$  fixé, il y a indépendance entre les événements relatifs à  $X(t)$  futurs et les événements passés relatifs à  $N(t)$ . Une condition suffisante, pour qu'il en soit ainsi, est qu'il y ait  $\forall t$ , identité à une complétion près, entre les deux  $\sigma$ -algèbres correspondant aux événements qui, pour  $\theta < t$ , sont respectivement relatifs à  $X(\theta)$  et à  $N(\theta)$  (condition  $H_3'$ ).  $H_3'$  est, en particulier, vérifiée si la correspondance  $N \rightarrow X$  peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle en  $X$  où  $N$  ne figure que par l'existence, au second membre, de la distribution aléatoire  $[dN(t)/dt][X(t)$  est alors évidemment markovien]. Un cas particulier important est celui de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\Delta X(y) = A\{X(t), t\} \Delta t + B\{X(t), t\} \Delta N(t) \quad (1-8)$$

On peut d'ailleurs assurer  $H_3$  de façon moins stricte que par  $H_3'$ .

## 2. - SYSTEMES LINEAIRES.

### 2.1. Résultats préliminaires.

Rappelons ici divers résultats de (2). Dans le cas où  $X(t)$  est markovien :

-( $\alpha$ ) Il existe une fonction certaine  $\phi(t, t')$  telle que, presque sûrement (p.s.), on ait :

$$X(t, t') = \phi(t, t') X(t) \quad \text{pour } t' > t \quad (2-1)$$

-( $\beta$ )  $\phi(t, t'') = \phi(t, t') \phi(t, t'')$   $[t \leq t' \leq t'']$  et  $\phi(t, t) = 1$  (2-2)

-( $\gamma$ )  $\text{cov. } X = \Gamma_X(t, t') = E\{|X(t)|^2\} \phi(t, t')$  pour  $t \leq t'$  (2-3)

-( $\delta$ )  $\phi(t, t') = \{R_1[t', t] / R_1[t, t]\}$  pour  $t \leq t'$  (2-4)

-( $\epsilon$ )  $\Delta X(t) = A(t) X(t) \Delta t + \Delta N(t) R_1(t, t)$  (2-5)

avec :

$$A(t) = \frac{\partial \phi(t, t')}{\partial t'} \Big|_{(t'=t)} = \frac{\partial \phi(s, t)}{\partial t \cdot \phi(s, t)} \quad \forall s < t \quad (2-6)$$

### 2.2. Réduction de $\phi$ à la forme exponentielle par changement d'horloge certain.

Posons :  $\underline{X}(t) = \{X(t) / \sigma_X(t)\}$   
avec :  $\sigma_X^2(t) = E\{|X(t)|^2\}$   $[\underline{X}$  normé] (2-7)

$\underline{\phi}$ , relative à  $\underline{X}$ , a les propriétés de  $\phi$  avec, en plus  $|\underline{\phi}(t, t')| \leq 1$   $(\forall t \text{ et } t')$  (2-8)

$\underline{\phi}$  définit, sur l'axe des  $t$ , une mesure additive positive  $\underline{\psi}$  telle que la contribution à  $\underline{\psi}$  de l'intervalle  $[t_1, t_2]$  ( $t_1 < t_2$ ) soit égale à :

$$\underline{\psi}(t_1, t_2) = -\text{Log} \{ \underline{\phi}(t_1, t_2) \} \quad (2-9)$$

Soient :  $\mathcal{J}$  la partie de l'axe des  $t$  qui ne contribue pas à  $\underline{\psi}$  et  $\mathcal{Y}$  celle qui supporte  $\underline{\psi}$ .  $\forall t_1$  et  $t_2$  ( $[t_1, t_2] \in \mathcal{J}$ ), on a  $\underline{\phi}(t_1, t_2) = 1$ . De (2-4) et (2-7), on déduit, pour  $t_1 < t_2$  :

$$\begin{aligned} R_1(t_2, t_1) &= \frac{R_1(t_1, t_1)}{\sigma_X(t_1)} \sigma_X(t_2) \underline{\phi}(t_1, t_2) \\ &= r_1(t_1) r_2(t_2) \underline{\phi}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (2-10)$$

Pour l'étude de  $\underline{\phi}$ , donc de  $R_1$ , on pourra se borner à  $\mathcal{Y}$  c'est-à-dire, supprimer provisoirement  $\mathcal{J}$  de l'axe des temps. Introduisons alors, dans  $\mathcal{Y}$ , le temps  $t'$ , variant de façon continue lorsque  $t$  décrit  $\mathcal{Y}$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ , et tel que, dans tout intervalle de temps  $t$  complètement  $\in \mathcal{Y}$ , on ait  $dt = dt'$ . On voit que pour tout  $t' \in \mathcal{Y}$  on a  $\underline{A}(t') < 0$ . Faisons alors le changement d'horloge certain et monotone, défini par  $d\theta' = -\underline{A}(t') dt'$ . On tire de (2-6) :

$$\underline{\phi}(\theta'_1, \theta'_2) = \exp[-(\theta'_2 - \theta'_1)] \quad \forall \theta'_1 \leq \theta'_2 \quad (2-11)$$

Il reste à repasser de  $\underline{\phi}(\theta'_1, \theta'_2)$  d'abord à  $\underline{\phi}(t'_1, t'_2)$ , puis à  $\underline{\phi}(t_1, t_2)$ .

$\underline{\phi}(t'_1, t'_2)$  se déduit de  $\exp\{-(\theta'_2 - \theta'_1)\}$  par un changement d'horloge  $t' \rightarrow \theta'$  uniquement astreint à être défini sans ambiguïté ( $t' =$  fonction monotone de  $\theta'$ ). Il faut, ensuite, passer de  $\underline{\phi}(t'_1, t'_2)$  à  $\underline{\phi}(t_1, t_2)$  donc réintroduire  $\mathcal{J}$  sur l'axe des  $t$ . Cela se fait aisément en se rappelant que, si l'intervalle d'un seul tenant  $[t_1, t_2] \in \mathcal{J}$ , on a  $\underline{\phi}(t_1, t_2) = 1$  ( $t_1 < t_2$ ). La figure (2-1) visualise le résultat de la réintroduction des intervalles de  $\mathcal{J}$ .



CONDITIONS POUR QU'UNE FONCTIONNELLE CAUSALE, LINEAIRE OU NON,  
D'UN PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS, SOIT MARKOVIENNE

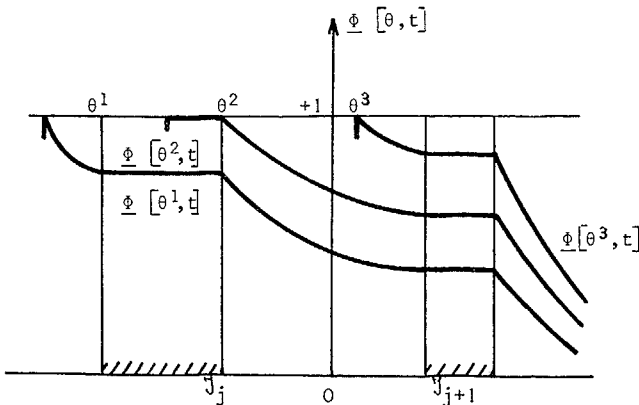


Fig. (2-1)

$\phi$  étant connu, on repasse à  $R_1(t_2, t_1)$  en utilisant (2-10) c'est-à-dire en multipliant  $\phi$  par deux fonctions certaines arbitraires  $r_1(t_1)$  et  $r_2(t_2)$  :

$$R_1(t_2, t_1) = r_1(t_1) \phi(t_1, t_2) r_2(t_2) \quad [t_1 < t_2] \quad (2-12)$$

La multiplication par  $r_1(t)$  à l'entrée, ne détruit ni l'indépendance ni le caractère centré des  $dN(\theta)$  ; de même, ni la multiplication par  $r_2(t)$ , à la sortie, ni le changement certain et monotone du temps ne perturbent le caractère markovien de  $X$ . Nous avons donc établi ce que devait nécessairement être la structure de  $S$ , supposé linéaire, pour que  $X(t)$  soit markovien. Réciproquement, il est évident que, si  $S$  a une telle structure,  $X(t)$  sera bien markovien. Il s'agit donc d'une condition sur  $S$  nécessaire et suffisante. Naturellement, dans le passage  $[t' \rightarrow \theta']$ , la densité  $\rho[t'] = \rho[t]$  pour  $t \in \mathcal{J}$ , qui intervient dans l'expression de la variance  $E\{\Delta N^2(t')\} = \rho[t'] \Delta t'$ , doit être remplacée par  $\rho(\theta') = \rho(t') [dt'/d\theta']$ .

Le processus  $X(t)$  sera stationnaire si sont remplies les conditions suivantes :  $A(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $r_1(t)$  et  $r_2(t)$  sont des constantes et  $\mathcal{J}$  n'existe pas. Alors, la fonction de corrélation de  $X(t)$  sera de type exponentiel. Pour les processus considérés, c'est le seul type de fonction de corrélation compatible avec le caractère markovien.

2.3. Le résultat fondamental pour  $S$  linéaire.

A - Sous réserve que soit évitée la complication due à l'existence possible d'un domaine  $\mathcal{J}$ , de mesure non nulle en  $t$ , nous avons donc établi le théorème suivant :

THEOREME 1 : La condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle linéaire causale considérée soit markovienne est que, par un changement certain d'horloge convenable, on puisse mettre  $R_1[t, \theta]$  sous la forme :

$$R_1[t, \theta] = \exp[-(t - \theta)] r_1[\theta] r_2(t) \quad t > \theta$$

où  $r_1(\theta)$  et  $r_2(t)$  sont deux fonctions certaines arbitraires.

$S$  est alors la succession des trois opérations non aléatoires :  $M_1$  = multiplication, à l'entrée des  $dN(\theta)$  par  $r_1(\theta)$ ,  $\mathcal{F}$  = filtrage linéaire causal à réponse exponentielle, puis  $M_2$  = multiplication, à la sortie, par  $r_2(t)$ .

B - On a vu, par ailleurs, comment il fallait modifier l'énoncé précédent pour tenir compte de l'existence d'un domaine  $\mathcal{J}$ .

3. - SYSTEMES S QUELCONQUES (LINEAIRES OU NON).

Soit  $K_0$  l'indice le plus bas figurant dans (1-2). Si  $K_0 > 1$ , ce développement n'a pas de composante linéaire  $X_1$ . Cela n'empêche évidemment pas de construire des fonctionnelles causales, linéaires, homogènes et, éventuellement, markoviennes des  $dN(\theta)$ .

3.1. Lemme 1.

Si  $X(t)$  est markovien, alors :  $[i] X_{K_0}(t)$  l'est aussi ; de plus,  $[ii]$  il existe une fonction  $\phi_{K_0}(t, t')$  telle que, p.s. :

$$X_{K_0}[t, t'] = X_{K_0}[t] \phi_{K_0}[t, t'] \quad (3-1)$$

Démonstration :  $[i]$  - On part d'une f.a. à accroissements indépendants bien définie  $N(t)$  et on veut assurer le caractère markovien de  $X$  pour  $N(t)$  et ses "multiples certains"  $N_\lambda(t) = \lambda N(t)$  [ $\lambda$  : nombre certain  $\neq 0$ ]. Introduisons  $X_\lambda(t)$  construit suivant (1-2) et (1-3) à partir de  $N_\lambda(t)$  et  $X'_\lambda(t) = [1/\lambda] \circ X_\lambda(t)$ . Par hypothèse,  $X'_\lambda(t)$  est markovien. Le résultat s'obtient, sous des conditions très larges, par le passage à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ .

$[ii]$  - (3-1) s'obtient en raisonnant sur la fonctionnelle markovienne  $X_{K_0}(t)$  homogène et de degré  $K_0$  par rapport aux  $dN(\theta)$ , comme au § 2, dans le cas linéaire.

3.2. Lemme 2.

Si  $X(t)$  est markovien, il existe une fonctionnelle causale, linéaire et markovienne des  $dN(\theta)$ , soit  $X_1(t, \omega)$ , et une fonction certaine  $A_{K_0}(t)$  telles que l'on ait p.s. :

$$X_{K_0}(t) = A_{K_0}(t) [X_1(t, \omega)]^{K_0} \quad (3-2)$$



CONDITIONS POUR QU'UNE FONCTIONNELLE CAUSALE, LINEAIRE OU NON,  
D'UN PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS, SOIT MARKOVIENNE

Démonstration :

Appliqué à  $X_{K_0}(t)$ , le développement (1-6) donne :

$$X_{K_0}(t') = X_{K_0,0}[t,t'] \phi_{K_0}[t,t'] + \dots \\ + K_0 X_{1,K_0-1}[t,t'] + X_{0,K_0}[t,t'] \quad (3-3)$$

Le premier terme -qui n'est autre que  $X_{K_0}(t,t')$ - ne dépend que du passé  $[\theta \leq t]$ , le dernier que du futur  $[\theta' > t]$ . L'avant dernier possède la particularité d'être celui qui, parmi ceux liés aux passés, possède le degré le plus élevé par rapport aux  $dN(\theta')$   $[t < \theta' \leq t']$ . Selon (1-7), on peut écrire :

$$X_{1,K_0-1}(t,t') = \int_{-\infty}^t \zeta[\{dN(\theta')\}, K_0-1, t, t', \theta_1] dN(\theta_1) \quad (3-4)$$

où  $\zeta[\{dN(\theta')\}, K_0-1, t, t', \theta_1]$  est une fonctionnelle des  $dN(\theta')$   $[t < \theta' \leq t']$  homogène et de degré  $K_0-1$  par rapport à ces  $dN(\theta')$ , et dépendant de  $\theta_1$ . D'après le lemme 1,  $X_{K_0}(t)$  est markovien si  $X(t)$  l'est, lui-même. Ceci implique, pour  $X_{K_0}(t)$  fixé, l'indépendance vis-à-vis du passé  $dN(\theta)[\theta < t]$  (Cf. hypothèse  $H_3$ ) d'un événement quelconque concernant le futur de  $X_{K_0}$  par rapport à  $t$ . Utilisons alors l'hypothèse  $H_2$  appliquée à  $[t, t']$ . Elle nous permet, comme dans le cas linéaire, de réaliser, pour tous les  $dN(\theta')$   $[t < \theta' \leq t']$  une homothétie de rapport  $\lambda \neq 0$  sans tomber, de ce fait, dans des domaines  $\Delta\Omega_t^+$  de probabilité nulle. On conçoit alors que, pour des  $|\lambda|$  assez grands, et pour les  $dN(\theta)$   $[\theta < t]$  compatibles avec un  $X_{K_0}(t)$  fixé, la seule façon de rendre  $X_{K_0}(t')$  indépendant de tout autre renseignement passé consiste à faire en sorte que  $X_{1,K_0-1}[t, t']$  ne dépende des  $dN(\theta)$  passés qu'à travers  $X_{K_0}(t)$ .  $X_{K_0}(t)$  est une fonctionnelle homogène, de degré  $K_0$ , des  $dN(\theta)$  passés, indépendante des  $dN(\theta')$  futurs. Pour que les  $dN(\theta)$  passés n'interviennent dans (3-4), linéaire par rapport à eux, qu'à travers  $X_{K_0}(t)$  et ceci quels que soient les  $dN(\theta')$  futurs, il faut que  $\zeta[\{dN(\theta')\}, K_0-1, t, t', \theta_1]$  se factorise suivant  $\zeta'[\{dN(\theta')\}, K_0-1, t, t'] \zeta''(\theta_1, t, t')$  et que la fonctionnelle linéaire :

$$X_1''(t, t', \omega) = \int_{-\infty}^t \zeta''(\theta_1; t, t') dN(\theta_1) \quad (3-5)$$

soit telle que l'influence du passé qui se transmet à travers elle ne dépende que de  $X_{K_0}(t, \omega)$ . Ceci demande à être analysé de façon différentielle selon la parité de  $K_0$ .

a) Si  $K_0$  est impair, on déduit de ce qui précède que l'on a p. s. :

$$X_1(t) = \Lambda_{K_0}(t) \left[ \frac{-1/K_0}{X_{K_0}(t)} \right] \left[ \frac{1/K_0}{X_{K_0}(t)} \right] X_{K_0}(t) = \Lambda_{K_0}(t) [X_1(t)]^{K_0} \quad (3-6)$$

Le caractère bijectif de (3-6) assure que  $X_1(t)$  est markovien comme  $X_{K_0}(t)$ .  $[X_1(t) = X_1''(t, t)]$ .

b) Si  $K_0$  est pair,  $[X_{K_0}(t)]^{1/K_0}$  a deux déterminations, ce qui rend caduc le raisonnement ci-dessus : on peut cependant respecter le caractère markovien de  $X_{K_0}(t)$  avec  $K_0$  pair, mais seulement pour des  $N(t)$  ayant des propriétés particulières [invariantes pour le changement  $dN(\theta) \rightarrow -dN(\theta)$ ]. Alors (3-6) n'est plus valable que sous sa forme de droite et perd son caractère bijectif. Quoiqu'il en soit, (3-2) est démontré. On établit, par ailleurs, même pour  $K_0$  pair, le caractère markovien de  $X_1$  en montrant que si  $X_1$  n'était pas markovien, il en serait de même de  $X_{K_0}$ , d'où contradiction.

Remarque :

C'est à cause de la particularité du cas  $K_0$  pair, où pour certaines fonctions  $N$  particulières, la correspondance  $X_1 \rightarrow X_{K_0}$  peut ne pas avoir d'inverse définie sans que le caractère markovien de  $X_{K_0}$  soit mis en cause, que le théorème 2 ci-dessous, relatif au cas non linéaire, donne seulement une condition nécessaire alors que le théorème 1 du cas linéaire [ $K_0 = 1$ ] donnait une condition nécessaire et suffisante.

3.3. Lemme 3.

Si  $X(t)$  est markovien, il existe, pour  $K$  (quelconque)  $\geq K_0$ , une fonction certaine du temps  $\Lambda_K(t)$  telle que,  $X_1(t)$  étant la fonctionnelle linéaire causale introduite par le lemme 2, on ait p.s. :

$$X_K(t) = \Lambda_K(t) [X_1(t)]^K \quad (3-7)$$

3.3.1. Démonstration.

Le lemme 2 établissait (3-7) pour  $K = K_0$ . Si le lemme 3 n'était pas vrai, il existerait un entier  $p > 0$ , tel que (3-7) soit vérifié pour  $K_0, \dots, K_0 + (p-1)$  et pas pour  $K_0 + p$ . La démonstration consiste à prouver que c'est impossible.

[i]  $\{X_1, X_{K_0+p}\}$  est une f.a. vectorielle markovienne à deux dimensions (découle, mutatis mutandis, des mêmes idées que le lemme 1).

[ii] Un événement quelconque concernant le futur de  $X_{K_0+p}$  par rapport à  $t$  est donc indépendant des  $dN(\theta)$  passés  $[\theta \leq t]$ , pour  $X_{K_0+p}(t)$  et  $X_1(t)$  fixés.



[iii] En raisonnant alors sur  $X_{1,K_0+p-1}[t,t']$  du développement (3-3) de  $X_{K_0+p}[t']$ , comme au lemme 2, on achève la démonstration.

3.3.2. Théorème 2.

Pour que  $X(t)$ , causal, non linéaire, soit markovien, il faut qu'il existe une fonction certaine  $F\{X_1;t\}$  telle que l'on ait p.s. :

$$X(t) = F\{X_1(t,\omega) ; t\} \quad (3-8)$$

où  $X_1(t,\omega)$  est une fonctionnelle causale linéaire markovienne des  $dN(\theta)$ .

Noter que, pour des  $N$  particuliers,  $F$  peut ne pas avoir d'inverse bien défini sans que cela mette en cause le caractère markovien de  $X(t)$ . Exemple  $X = X_1^2$  pour des  $dN(\theta)$  à lois symétriques par rapport à  $dN(\theta) = 0$ . Naturellement, pour  $N(t)$  quelconque,  $F[X_1] = X_1^2$  ne convient pas. D'où le caractère seulement nécessaire et nullement suffisant de la condition du théorème 3.

Si  $X(t)$  ne comporte pas de domaine  $\mathcal{D}$ , alors, éventuellement, au prix d'un changement certain d'horloge convenable,  $S$  devra nécessairement être conforme au schéma de la figure (3-1) ci-dessous :

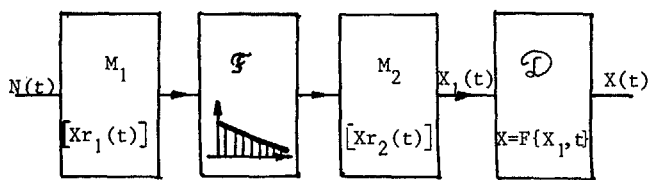


Fig. (3-1)

4. - EXEMPLES D'APPLICATIONS.

4.1. Fonctions de corrélation C admettant une f.a. markovienne (naturellement stationnaire).

Soit  $C(\tau)$  une fonction de corrélation (f.c) et  $Y(t)$  une f.a. admettant  $C$  comme f.c.  $[Y \in Y_C]$ . Il existe des  $C$  pour lesquelles aucun  $Y \in Y_C$  n'est markovien (2) (4). Quelles conditions faut-il donc imposer à  $C$  pour que, parmi les  $Y_C$ , au moins une soit markovienne (on écrira alors  $C \in M$ ) ? Si on se limitait aux  $Y$  gaussiens centrés, la seule f.c.  $\in M$  serait l'exponentielle. Ce qui précède montre que, sous les hypothèses faites, les f.a. stationnaires markoviennes  $X$  construites, de façon causale, à partir de  $N$  sont des fonctions certaines d'une f.a. markovienne  $X_1$  issue de la même fonction  $N$  (Cf. (3-8)).  $X_1(t)$  aura une f.c. exponentielle et, à cause de la stationnarité,  $t$  ne figurera pas explicitement dans  $F$ . Supposons  $F\{X_1\}$  développable en série, on aura :

$$X(t) = a_1 X_1(t) + a_2 X_1^2(t) + \dots \quad (4-1)$$

La f.c. de  $X(t)$  sera donc une série d'exponentielle  $\exp\{-k[\tau/a]\}$  [ $k$  entier  $\geq 0$ ].

4.2. Lien avec les équations différentielles stochastiques.

On aura souvent :

$$X(t+\Delta t) - X(t) = G\{X(t) ; t, \Delta t ; \Delta N(t)\} \quad (4-2)$$

$[\Delta N(t) = N(t+\Delta t) - N(t) ; G =$  fonction certaine caractérisant  $S$ ].  $[\Delta t > 0]$ , soit, sous réserve de possibilité de dérivations et de conditions de convergence :

$$\Delta X(t) = A\{X(t), t\} \Delta t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k\{X(t), t\} \Delta N^k(t) \quad (4-3)$$

La f.a.  $X(t)$  ainsi engendrée est nécessairement markovienne. Sous des conditions assez générales,  $X(t)$  se mettra pour  $t > 0$ , sous une forme dérivée de (3-8) par l'adjonction d'un terme certain  $X_0(t, x_0)$ , fonction de la valeur initiale  $X(0) = x_0$ , et dans laquelle les  $R_k$  dépendront, eux aussi, de  $x_0$ . Alors, le théorème 2 permettra de dire qu'il existe une fonctionnelle linéaire et homogène, causale et markovienne des  $dN(\theta)$   $[0 < \theta \leq t]$ , soit  $X_1(t, x_0)$ , et une fonction certaine  $F\{X_1;t\}$  telles que l'on ait :

$$X(t, x_0) - X_0(t, x_0) = F\{X_1(t, x_0) ; t\} \quad (4-4)$$

Bibliographie

- (1) Kada Allab - Application de l'analyse fonctionnelle à l'identification des systèmes non linéaires à entrées-sorties déterministes ou aléatoires. Thèse de Doctorat de 3ème Cycle. Mathématiques Appliquées - Paris VI (1970).  
Voir aussi divers articles de G. Borget et P. Faure et notamment : Algorithmes de factorisation approchée utilisant les fonctions orthogonales - R.A.I.R.O. n° juillet 1973 - J-2, p. 25-44.
- (2) A. Blanc-Lapierre - Modèles statistiques et traitement du signal. Mémoire et caractère markovien. Comptes Rendus du Colloque National sur le traitement du signal, Nice, 1er au 5 juin 1971, p.128.
- (3) J.L. Doob - Stochastic Processes. 7ème édition, 1967, John Wiley and Sons.
- (4) A. Blanc-Lapierre - Quelques résultats et problèmes de la théorie des fonctions aléatoires liés à des questions introduites par la physique, le traitement du signal et l'automatique. Communication présentée au "Symposium Jerzy Neyman" Varsovie (5-11 avril 1974).

N.B. : Une partie importante de ce travail a été faite en collaboration avec A. Tortrat. Les résultats développés ici sont d'ailleurs résumés dans "Fonctionnelles linéaires ou non linéaires de processus aléatoires à accroissements indépendants et caractère markovien" par A. Blanc-Lapierre et A. Tortrat, C.R.A.S., séance du 3.2.1975.