

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



FONCTIONS D'AMBIGUITE DES SIGNAUX TRANPOSES EN FREQUENCE

MM. Georges BONNET, Alfred FORSTER

Laboratoire GESSY - Centre Universitaire de Toulon et du Var - Château Saint Michel - 83130 - LA GARDE

RESUME

Les pouvoirs de résolution attachés à un filtre adapté multi-doppler sont essentiellement déterminés par la fonction d'ambiguïté du signal utilisé. Ils sont donc élevés dans la mesure où ce signal est très riche (durée, largeur de bande et fréquence moyenne ou porteuse élevées) ce qui se traduit par un filtre de réalisation complexe.

Néanmoins n'intervient au niveau du traitement que l'écart différentiel absolu (conditionné par la richesse du signal) entre la réponse percussionnelle du filtre (à l'image du signal utilisé) et le signal à traiter déduit du signal de départ par homothétie et translation dans le temps. Le résultat du traitement (quant aux résolutions) est donc indépendant, dans une certaine plage, de la richesse apparente liée à la fréquence moyenne des signaux réellement convolués pourvu que l'écart différentiel de départ soit maintenu. Une simplification dans la réalisation des filtres multi-doppler peut donc résulter du déplacement des bandes spectrales (du filtre et du signal traité) appelé "transposition" dans la mesure où ce dernier n'entraîne que des faibles pertes de résolution. L'étude détaillée, décrite ici de l'évolution des fonctions d'ambiguïté et des résolutions en fonction de la transposition, pour les différents types de signaux, fixe les modalités à respecter.

Les quelques paramètres simples relatifs à l'amplitude complexe du signal analytique associé au signal qui interviennent dans cette classification sont :

- la durée efficace du signal (il utilise la densité temporelle d'énergie du signal),
- la largeur spectrale efficace du signal (il utilise la densité spectrale d'énergie du signal),
- le produit "temps-fréquence" moyen (il utilise la densité du signal dans le plan temps-fréquence).

SUMMARY

The resolution capabilities of a suitable multi-doppler filter are principally determined by the ambiguity function of the signal applied. Therefore it is the greater as the signal is a large one (having wide pulse, bandwidth and mean frequency or carrier band), which results in a sophisticated filter.

However, in the processing, what matters is only the absolute differential gap (proportional to the signal characteristics above) between filter impulse response (similar to the signal applied) and the signal to be processed which is taken from the initial signal by homothety and time delay. The result of processing (regarding resolutions) is therefore independent, over a determined range, from the mean frequency of really convolved signals, provided the initial differential gap be maintained. Therefore a simpler multi-doppler filter design can result from the translation of spectrum bands (of filter and signal processed), if it causes only small loss of resolution.

The detailed discussion of the evolution of ambiguity functions, and of the resolutions depending upon translation, for signals of various types, determines some important parameters :

- the efficient pulse width (using power time density of the signal),
- the efficient spectrum width of the signal (using power spectrum density of the signal),
- the mean product : time frequency (using signal density in the time-frequency space).

Liste des symboles

t variable temps
 t_1 instant de début du signal
 t_2 instant de fin du signal
 $\Delta t = t_2 - t_1$ largeur temporelle du signal ou durée du signal
 t_0 instant intermédiaire entre t_1 et t_2
 θ décalage temporel entre locale et porteuse
 ν variable fréquence
 ν_1 borne ou fréquence inférieure du spectre
 ν_2 borne ou fréquence supérieure du spectre
 ν_0 fréquence intermédiaire entre ν_1 et ν_2
 $\Delta \nu = \nu_2 - \nu_1$ largeur spectrale du signal ou largeur de bande du signal
 ν_L fréquence locale
 F_1 fréquence moyenne du spectre de l'amplitude complexe
 F_2 fréquence efficace du spectre de l'amplitude complexe ou épanouissement spectral
 T_1 instant moyen de l'amplitude complexe
 T_2 instant efficace de l'amplitude complexe ou épanouissement temporel
 K_1 partie imaginaire du produit "temps fréquence" moyen de l'amplitude complexe
 K_2 partie réelle du produit "temps fréquence" moyen de l'amplitude complexe
 $\omega = 2\pi\nu$ fréquence angulaire ou pulsation
 $\omega_1 = 2\pi\nu_1$ fréquence angulaire ou pulsation
 $\omega_2 = 2\pi\nu_2$ fréquence angulaire ou pulsation
 $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ fréquence angulaire ou pulsation
 $\omega_L = 2\pi\nu_L$ fréquence angulaire ou pulsation
 $\Omega_1 = 2\pi F_1$ fréquence angulaire ou pulsation
 $\Omega_2 = 2\pi F_2$ fréquence angulaire ou pulsation
 $R_2 = 2\pi K_2$ R_e du produit "temps pulsation" moyen
 $R_1 = 2\pi K_1$ J_m du produit "temps pulsation" moyen
 $\psi_{AA} = \rho e^{i\phi}$ fonction d'ambiguïté de l'amplitude complexe
 $\rho = |\psi_{AA}|$ $\rho_0 = |\psi_{AA}(0,0)|$ maximum absolu de $|\psi_{AA}|$
 $\phi = \text{argument de } \psi_{AA}$
 $S(t)$ signal
 $s(\nu)$ spectre du signal
 $A(t) = G e^{i\tilde{\phi}}$ amplitude complexe du signal
 $Z(t)$ signal analytique
 $G = |A|$
 $\tilde{\phi} = \text{argument de } A$
 $\sqrt{1+\xi} S[(1+\xi)(t-\tau)]$ signal écho
 τ décalage de temps
 $1+\xi$ coefficient de compression de temps
 ξ coefficient "Doppler"
 $f = \xi \nu_0$ fréquence "Doppler"
 $\Omega = 2\pi f = \xi 2\pi\nu_0 = \xi \omega_0$ pulsation Doppler
 $\Delta\tau$ largeur à mi-hauteur de Γ_{SS} suivant l'axe τ ou résolution temporelle
 $\Delta\Omega, \Delta\xi$ largeur à mi-hauteur de Γ_{SS} respectivement suivant les axes Ω et ξ ou résolution "Doppler"

$\delta\tau$ plage de fluctuation ou d'incertitude de τ due à la transposition
 $\delta\Omega, \delta\xi$ plage de fluctuation ou d'incertitude de Ω, ξ due à la transposition
 Δ^a_τ plage d'ambiguïté sur τ
 $\Delta^a_\Omega, \Delta^a_\xi$ plage d'ambiguïté Doppler

Fonctions d'ambiguïté des signaux transposés en fréquence

1. Introduction

Considérons le signal physique $S(t)$, fonction de carré sommable, supposé réel $S(t) = S^*(t)$ et centré. Ce signal sera dénommé "signal non transposé".

Soit $s(\nu) \rightleftharpoons S(t)$ sa transformée de Fourier.

Nous avons pour le spectre la propriété suivante :

$$s(\nu) = s^*(-\nu) = s^*(\nu) \text{ propriété d'hermiticité et } s(0)=0$$

Soit $s^+(\nu) = s(\nu) \delta^-(\nu)$ la partie positive du spectre prenons une fréquence ν_0 arbitraire positive appartenant à $s^+(\nu)$ et définissons une fonction $a(\nu)$ telle que :

$$\frac{1}{2} a(\nu - \nu_0) = s^+(\nu) = s(\nu) \delta^-(\nu)$$

il vient :

$$s(\nu) = \frac{1}{2} a(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2} a^*(-\nu - \nu_0)$$

Par suite $S(t) \rightleftharpoons s(\nu)$ peut s'écrire :

$$S(t) = \frac{1}{2} e^{i2\pi\nu_0 t} A(t) + \frac{1}{2} e^{-i2\pi\nu_0 t} A^*(t) = R_e [A(t) e^{i2\pi\nu_0 t}]$$

avec $A(t) \rightleftharpoons a(\nu)$

$$\text{Posons } Z(t) = A(t) e^{i2\pi\nu_0 t}$$

$Z(t)$ est appelé "signal analytique de $S(t)$ "

$A(t)$ est appelé "amplitude complexe de $S(t)$ "

ν_0 est appelée "fréquence porteuse"

En conclusion :

$$S(t) = \frac{1}{2} [Z(t) + Z^*(t)]$$

$$S(t) = R_e Z(t) \quad R_e = \text{partie réelle}$$

2. Fonction d'ambiguïté de $S(t)$ signal non transposé

2.1 Définition de la fonction d'ambiguïté $\Gamma_{SS}(\tau, \xi)$ du signal

La définition choisie suivante est bien adaptée aux problèmes de télécommunications, notamment à ceux rencontrés dans le domaine sonar.

$$\Gamma_{SS}(\tau, \xi) = \sqrt{1+\xi} \int S(t) S^*[(1+\xi)(t-\tau)] dt$$

c'est l'intercorrélacion du signal et d'un signal écho défini comme $\sqrt{1+\xi} S[(1+\xi)(t-\tau)]$

2.2 Expression de $\Gamma_{SS}(\tau, \xi)$ à partir de la fonction d'ambiguïté associée au signal analytique $Z(t)$

Comme $S(t) = \frac{1}{2} [Z(t) + Z^*(t)]$, la fonction d'ambiguïté du signal non transposé $S(t)$ peut se mettre sous la

forme suivante :

$$\Gamma_{SS}(\tau, \xi) = \frac{1}{2} [R_e \Gamma_{ZZ}(\tau, \xi) + R_e \Gamma_{ZZ^*}(\tau, \xi)] \quad \text{car } Z^* = Z^*$$

faisant intervenir des fonctions d'ambiguïté calculées



FONCTIONS D'AMBIGUITE DES SIGNAUX TRANSPPOSES EN FREQUENCE

à partir du signal analytique $Z(t)$

2.3 Expression de $\Gamma_{ZZ}(\tau, \xi)$ utilisant l'amplitude complexe $A(t)$

Le calcul conduit à l'expression suivante :

$$\Gamma_{ZZ}(\tau, \xi) = e^{i2\pi v_0 (1+\xi)\tau} \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \int A(t) A^*[(1+\xi)(t-\tau)] e^{-i2\pi v_0 \xi t} dt$$

Posons :

$$\psi_{AA}(\tau, \xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} e^{i2\pi v_0 \xi \tau} \int A(t) A^*[(1+\xi)(t-\tau)] e^{-i2\pi v_0 \xi t} dt$$

Signalons que dans le cas où le signal possède un spectre étroit autour d'une fréquence centrale v_0 , cette fonction coïncide au facteur de phase près avec la fonction d'ambiguïté de Woodward :

$$\psi(\tau, f) = \int A(t) A^*(t-\tau) e^{-i2\pi f t} dt \quad \text{avec } f = v_0 \xi$$

En utilisant ψ_{AA} nous obtenons :

$$\Gamma_{ZZ}(\tau, \xi) = e^{i2\pi v_0 \tau} \psi_{AA}(\tau, \xi)$$

2.4 Expression de $\Gamma_{ZZ}(\tau, \xi)$ à partir de $A(t)$

Le calcul donne :

$$\Gamma_{ZZ}(\tau, \xi) = e^{i2\pi v_0 (1+\xi)\tau} \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \int A^*(t) A^*[(1+\xi)(t-\tau)] \dots e^{-i2\pi v_0 t} e^{-i2\pi v_0 \xi t} dt$$

2.5 Cas pratique des signaux de largeur de bande finie

Supposons que $S(t)$ a un spectre $s(v)$ tel que :

- a) $s^+(v) = 0$ pour $v = 0$ (signal centré)
 b) $s^+(v) \equiv s^+(v) \pi_{v_1, v_2}(v)$ bande limitée

$$\pi_{v_1, v_2}(v) = 1 \quad v_1 \leq v \leq v_2 \\ = 0 \quad \text{ailleurs} \quad \text{donc :}$$

$$\frac{v_1 + v_2}{2} \geq \frac{v_2 - v_1}{2} \quad (\text{configuration de bande})$$

$$\text{Posons } v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \Delta v = v_2 - v_1$$

$$\text{Prenons pour porteuse } v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Le calcul de $\Gamma_{ZZ}(\tau, \xi)$ montre que :

$$\Gamma_{ZZ}(\tau, \xi) = 0 \quad \text{si } v_0 \geq \frac{\Delta v}{2}$$

Cette condition n'est pas autre chose que la condition b) que le signal $S(t)$ est censé vérifier.

Nous avons donc pour ces signaux :

$$\Gamma_{SS}(\tau, \xi) = \frac{1}{2} R_e \Gamma_{ZZ}(\tau, \xi) \\ = \frac{1}{2} R_e [e^{i2\pi v_0 \tau} \cdot \psi_{AA}(\tau, \xi)]$$

3. Transposition de fréquence

Considérons le processus ci-dessous de modification de l'écho, appelé "transposition de fréquence"

et dont le résultat sera le signal écho transposé.

- multiplication du signal écho par un signal local sinusoïdal, de fréquence v_L , de phase aléatoire ϕ_L
- filtrage passe-bande isolant les composantes de fréquence centrale $\pm |v_0 - v_L|$ du spectre dédoublé par la locale.

Dans le but d'alléger l'exposé suivant, nous n'envisagerons que les transpositions caractérisées par une locale de fréquence $0 \leq v_L \leq 2v_0$ et par un filtrage isolant les bandes spectrales les plus voisines de $v=0$. Ce genre de transposition sera appelée transposition vers les basses fréquences.

On peut écrire successivement :

$$\text{Signal écho } \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} S[(1+\xi)(t-\tau)] \rightleftharpoons \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} s\left(\frac{v}{1+\xi}\right) e^{-i2\pi v \tau}$$

$$\text{Signal local } \cos[2\pi v_L(t-\tau) - \phi_L] \quad v_L \text{ arbitraire } \phi_L = 2\pi v_L \theta \\ \theta \text{ arbitraire}$$

Multiplication du signal écho par le signal local

$$\frac{1}{\sqrt{1+\xi}} s\left(\frac{v}{1+\xi}\right) \cos[2\pi v_L(t-\tau) - \phi_L] \rightleftharpoons \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} s\left(\frac{v}{1+\xi}\right) e^{-i2\pi v \tau} \dots$$

$$\dots * \left[\frac{1}{2} \delta(v - v_L) e^{-i2\pi v_L(\tau + \theta)} + \frac{1}{2} \delta(v + v_L) e^{i2\pi v_L(\tau + \theta)} \right]$$

convolution

Le spectre de ce signal peut encore s'écrire :

$$\frac{e^{-i\phi_L}}{2\sqrt{1+\xi}} s\left[\frac{v-v_L}{1+\xi}\right] e^{-i2\pi(v-v_L)\tau} + \frac{e^{i\phi_L}}{2\sqrt{1+\xi}} s\left[\frac{v+v_L}{1+\xi}\right] e^{-i2\pi(v+v_L)\tau}$$

En développant ce spectre à l'aide de :

$$s(v) = \frac{1}{2} a(v - v_0) + \frac{1}{2} a^*(-v - v_0)$$

on obtient :

$$\frac{e^{-i2\pi v_L(\tau + \theta)}}{4\sqrt{1+\xi}} a^*\left[\frac{-v+v_L}{1+\xi} - v_0\right] e^{-i2\pi(v-v_L)\tau} \dots$$

$$\dots + \frac{e^{i2\pi v_L(\tau + \theta)}}{4\sqrt{1+\xi}} a\left[\frac{v+v_L}{1+\xi} - v_0\right] e^{-i2\pi(v+v_L)\tau}$$

$$+ \frac{e^{-i2\pi v_L(\tau + \theta)}}{4\sqrt{1+\xi}} a\left[\frac{v-v_L}{1+\xi} - v_0\right] e^{-i2\pi(v-v_L)\tau} \dots$$

$$\dots + \frac{e^{i2\pi v_L(\tau + \theta)}}{4\sqrt{1+\xi}} a^*\left[\frac{-v-v_L}{1+\xi} - v_0\right] e^{-i2\pi(v+v_L)\tau}$$

Filtrage : si $v_L \geq \frac{\Delta v}{2} (1+\xi)$, on peut toujours par un filtrage passe-bande adéquat isoler les deux premiers termes. Supposons cette condition réalisée et donnons au filtre un gain de 2.

Le signal filtré constituant le signal écho transposé que nous écrirons $\sqrt{1+\xi} \hat{S}_\theta(t-\tau, \xi)$ est alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\xi} \hat{S}_0(t-\tau, \xi) &= \sqrt{1+\xi} R_e \left[A[(1+\xi)(t-\tau)] e^{i2\pi\nu_0(1+\xi)(t-\tau)} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots e^{-i[2\pi\nu_L(t-\tau-\theta)]} \right] \\ &= \sqrt{1+\xi} R_e \left[Z[(1+\xi)(t-\tau)] e^{-i[2\pi\nu_L(t-\tau-\theta)]} \right] \\ &\dots = \sqrt{1+\xi} R_e \hat{Z}_0(t-\tau, \xi) \end{aligned}$$

$$I_{ZZ}(\tau, \xi) = e^{i2\pi[(\nu_0 - \nu_L)\tau + \nu_L\theta]} \psi_{AA}(\tau, \xi)$$

4.5 Expression de $I_{ZZ}(\tau, \xi)$ à partir de A(t)

$$\begin{aligned} I_{ZZ}(\tau, \xi) &= e^{i2\pi[(\nu_0(1+\xi) - \nu_L)\tau - \nu_L\theta]} \int A^*(t) \dots \\ &\dots A^*[(1+\xi)(t-\tau)] e^{-i2\pi\nu_0\xi t} e^{-i2\pi[2(\nu_0 - \nu_L)]t} dt \end{aligned}$$

4.6 Cas pratique des signaux de largeur de bande finie. Transposition partielle.

Supposons que S(t) vérifie les conditions de 2.5.

Prenons $\nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$, posons $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$

si $\nu_L \leq (\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2})(1 + \frac{\xi}{2})$ (transposition partielle)

ou $\nu_L > (\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2})(1 + \frac{\xi}{2})$

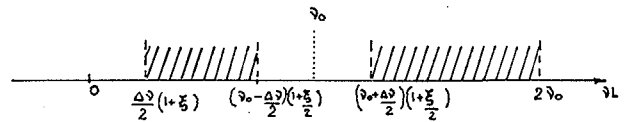
Le calcul donne $I_{ZZ}(\tau, \xi) = 0 \quad \forall \tau$

Si cette condition sur ν_L est réalisée l'expression de I_{SS} se réduit donc à :

$$\begin{aligned} I_{SS} &= \frac{1}{2} R_e \left[I_{ZZ}(\tau, \xi) \right] \\ &= \frac{1}{2} R_e \left[e^{i2\pi[(\nu_0 - \nu_L)\tau + \nu_L\theta]} \psi_{AA}(\tau, \xi) \right] \end{aligned}$$

En résumé

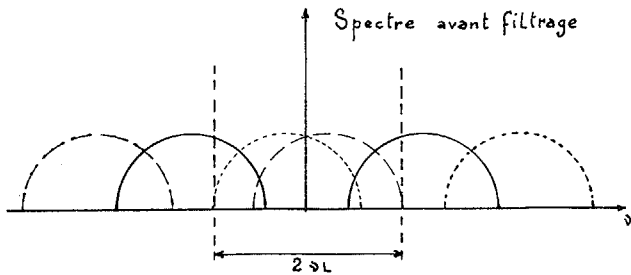
Si ν_L appartient aux intervalles hachurés sur l'axe fréquentiel représenté ci-dessous, I_{SS} représente l'intercorrélacion de deux signaux SS de fréquence centrale $|\nu_0 - \nu_L|$ inférieure à ν_0 et prend la forme simple précédente



La plage en-dessous de ν_0 n'est utilisable que si la largeur de bande du signal est telle que $\Delta\nu \leq \nu_0$. Il convient donc d'utiliser lorsque $\nu_0 < \Delta\nu \leq 2\nu_0$ la plage au-dessus de ν_0 .

Le cas intéressant, en pratique, est celui où à performances comparables, la fréquence centrale des signaux corrélés est la plus petite possible.

Cette fréquence centrale ne pourra toutefois être inférieure à $\nu \frac{\Delta\nu}{2}$ ce qui correspond à la transposition partielle maximale sans chevauchement de bandes spectrales la seule envisageable dans ce mécanisme de transposition asynchrone en temps réel d'un écho éventuellement noyé dans un bruit.



Si la phase aléatoire de la locale par rapport à la porteuse de l'écho est nulle (c'est-à-dire si $\theta = 0$) nous dirons que l'écho a été transposé de façon synchrone.

4. Fonction d'intercorrélacion bidimensionnelle du signal transposé

4.1 Définition du signal analytique et du signal transposé

Le signal transposé se déduit de S(t) par une transposition synchrone d'amplitude ν_L . Il s'écrit $\hat{S}(t, 0)$ avec :

$$\hat{S}(t, 0) = R_e \left[Z(t) e^{-i2\pi\nu_L t} \right] = R_e \left[\hat{Z}(t, 0) \right]$$

Dans cette expression $\hat{Z}(t, 0)$ représente le signal analytique transposé.

4.2 Définition de la fonction d'intercorrélacion bidimensionnelle

Posons $I_{SS}(\tau, \xi) = \sqrt{1+\xi} \int \hat{S}_0(t, 0) \cdot \hat{S}_0^*(t-\tau, \xi) dt$

C'est l'intercorrélacion entre le signal transposé de façon synchrone avec le signal écho transposé.

4.3 Expression de $I_{SS}(\tau, \xi)$ à partir de la fonction d'intercorrélacion du signal analytique transposé

$$I_{SS}(\tau, \xi) = \frac{1}{2} \left[R_e \left[I_{ZZ}(\tau, \xi) \right] + R_e \left[I_{ZZ}^*(\tau, \xi) \right] \right]$$

4.4 Expression de $I_{SS}(\tau, \xi)$ utilisant l'amplitude complexe A(t)

Le calcul conduit à l'expression suivante :



5. Etude comparative de I_{SS} et Γ_{SS} en fonction de v_L et θ lorsque les SS conditions des paragraphes 2.5 et 3, 4.6 sont remplies.

Nous avons donc :

$$I_{SS} = \frac{1}{2} R_e \left[e^{i[(\omega_0 - \omega_L)\tau + \phi_L]} \cdot \psi_{AA}(\tau, \xi) \right]$$

$$\text{et } \Gamma_{SS} = \frac{1}{2} R_e \left[e^{i\omega_0 \tau} \cdot \psi_{AA}(\tau, \xi) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \psi_{AA} &= \sqrt{1+\xi} \int A(t) A^*(t-\tau) e^{-i2\pi v_0 \xi(t-\tau)} \dots \\ &\dots = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \int a(v) a^*\left(\frac{v-v_0 \xi}{1+\xi}\right) e^{i2\pi v \tau} dv \end{aligned}$$

en introduisant le module et la phase de ψ_{AA}

$$\psi_{AA} = \rho(\tau, \xi) e^{i\phi(\tau, \xi)}$$

$\rho(0,0) = \rho_0 = \int AA^* dt = \int aa^* dv$ représente l'énergie de $A(t)$; $\phi(0,0) = 0$, les expressions précédentes deviennent :

$$I_{SS} = \frac{1}{2} \rho \cos[(\omega_0 - \omega_L)\tau + \phi_L + \phi]$$

$$\Gamma_{SS} = \frac{1}{2} \rho \cos[\omega_0 \tau + \phi]$$

- ρ joue le rôle d'une enveloppe d'un terme pseudopériodique.

- Pour Γ_{SS} le maximum absolu de ρ coïncide avec un maximum du cosinus. $\Gamma_{SS}(0,0)$ est donc un maximum absolu.

- Pour I_{SS} le maximum absolu de ρ ne coïncide pas avec un SS maximum du cosinus pour toutes les valeurs de la phase aléatoire de la locale. Ceci entraîne :

- une fluctuation du niveau maximum atteint par I_{SS} qui se traduit par une diminution de la probabilité^{SS} de détection de l'écho,
- une incertitude sur la détermination de l'instant d'arrivée et du coefficient Doppler de l'écho, c'est-à-dire une perte de résolution.

Dans la mesure où le maximum de ρ n'est pas trop éloigné du maximum du cosinus le plus proche (pour toutes les valeurs de ϕ_L) l'intercorrélacion des signaux transposés (comme définie précédemment) donne lieu à des résolutions équivalentes à celles attachées à l'intercorrélacion des signaux non transposés.

5.1 Evolution de $\psi_{AA}(\tau, \xi)$ au voisinage de l'origine

Le développement de ψ_{AA} limité au 2e ordre en τ (retard) et $\Omega = 2\pi v_0 \xi$ (pulsation Doppler) au voisinage de $\tau=0$ et $\Omega=0$ est :

$$\begin{aligned} \psi_{AA}(\tau, \Omega) &\approx \rho_0 \left[\left(1 - \frac{\tau^2 \Omega^2}{2} - \frac{\Omega^2}{2} T_2^2 + \tau \Omega R_2 \right) \dots \right. \\ &\left. \dots + i(\tau \Omega_1 - \frac{\Omega}{\omega_0} R_2 - \Omega T_1 - \tau \Omega R_1) \right] \end{aligned}$$

(Dans ce développement les termes en $\tau \frac{\Omega}{\omega_0}$ et $\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}$ ont été négligés respectivement devant ceux en $\tau \Omega$ et Ω^2 en tant qu'infiniment petits d'ordre supérieur).

Les coefficients intervenant dans l'expression précédente se déterminent à partir de l'amplitude complexe $A = G \cdot e^{i\Phi}$ du signal comme indiqué dans le tableau suivant :

$$T_1 = \frac{\int AA^* t dt}{\int AA^* dt}$$

$$\Omega_1 = 2\pi \frac{\int aa^* v dv}{\int aa^* dv}$$

$$R_1 = R_e \frac{\int A \frac{dA^*}{dt} t dt}{\int AA^* dt} = -\frac{1}{2} \quad \text{car fonction de carré sommable}$$

$$R_2 = -I_m \frac{\int A \frac{dA^*}{dt} t dt}{\int AA^* dt} = \frac{\int \frac{d\phi}{dt} \cdot G^2 t dt}{\int G^2 dt}$$

$$T_2^2 = \frac{\int AA^* t^2 dt}{\int AA^* dt}$$

$$\Omega_2^2 = 4\pi^2 \frac{\int aa^* v^2 dv}{\int aa^* dv} = \Omega_\phi^2 + \Omega_G^2 \quad \text{avec :}$$

$$\Omega_G^2 = \frac{\int \left[\frac{dG}{dt}\right]^2 dt}{\int G^2 dt}$$

$$\Omega_\phi^2 = \frac{\int \left[\frac{d\phi}{dt}\right]^2 G^2 dt}{\int G^2 dt}$$

Remarques :

Faisons dès à présent quelques commentaires sur les coefficients définis ci-dessus :

$$- T_2 = \sqrt{\frac{\int AA^* t^2 dt}{\int AA^* dt}} \quad \text{est la durée efficace ou}$$

épanouissement temporel de l'amplitude complexe. Il utilise la densité temporelle d'énergie.

$$- F_2 = \sqrt{\frac{\int aa^* v^2 dv}{\int aa^* dv}} \quad \text{est la largeur spectrale}$$

efficace ou épanouissement spectral de l'amplitude complexe. Il utilise la densité spectrale énergétique.

$$- K_2 = R_e \frac{\iint a(t,v) t \cdot v dt dv}{\iint |a(t,v)|^2 dt dv} = \frac{\iint \varepsilon(t,v) t \cdot v dt dv}{\iint \varepsilon(t,v) dt dv}$$

est le produit "temps-fréquence" moyen de l'amplitude complexe. Il utilise la pseudo-densité d'énergie

$\epsilon(t, \nu)$ dans le plan temps-fréquence.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t, \nu) &= A(t) a^*(\nu) e^{-i2\pi\nu t} & \epsilon(t, \nu) &= R_e \mathbf{a}(t, \nu) \\ \int \mathbf{a}(t, \nu) dt &= a(\nu) a^*(\nu) & \int \mathbf{a}(t, \nu) d\nu &= A(t) A^*(t) \\ \int \int \mathbf{a}(t, \nu) dt d\nu &= \int a(\nu) a^*(\nu) d\nu = \int A(t) A^*(t) dt = \rho_0 & & \\ &= \text{Energie du signal} & & \end{aligned}$$

- Majoration générale (inégalité de Schwartz)

$$\Omega_2^2 T_2^2 \geq R_1^2 + R_2^2 \geq \frac{R_1^2}{4}$$

L'égalité a lieu dans le cas d'une amplitude gaussienne sans modulation de phase

$$[\Omega_G^2 + 0] T_2^2 = R_1^2 + 0 = \frac{1}{4}$$

gaussien

- Modulation d'amplitude seule $R_2 = 0$ $\Omega_\phi = 0$
- Modulation de phase paire $R_2 \neq 0$ $\Omega_\phi \neq 0$
- Modulation de phase impaire $R_2 = 0$ $\Omega_\phi \neq 0$
- Modulation de fréquence linéaire impaire

$$\begin{aligned} R_2^2 &= \Omega_\phi^2 T_2^2 \\ \Omega_2^2 T_2^2 - R_2^2 &= \Omega_G^2 T_2^2 \geq 1/4 = \frac{1}{4} \text{ si profil d'amplitude } \\ &\quad \text{Gaussien} \end{aligned}$$

- Modulation de fréquence linéaire paire $R_2 = 0$

En déplaçant l'origine des temps en $t_0 + T_1$ et en prenant comme nouvelle fréquence centrale du signal $\nu_0 + F_1$, on peut toujours définir l'amplitude complexe telle que :

$$\Omega_1 = 0 \quad \text{et} \quad T_1 = 0$$

Compte-tenu de cela et pour simplifier les notations, nous écrirons à partir de maintenant :

$$\Omega_2 \rightarrow \Omega \quad T_2 \rightarrow T \quad R_2 \rightarrow R \quad R_1 \rightarrow -\frac{1}{2}$$

L'expression réduite de $\psi_{AA}(\tau, \Omega)$ devient donc :

$$\psi_{AA} = \rho_0 \left[\left(1 - \frac{\tau^2}{2} \Omega^2 - \frac{\Omega^2}{2} T^2 + \tau \Omega R\right) + i \left(\frac{-\Omega}{\omega_0} R + \frac{\tau \Omega}{2}\right) \right]$$

On en déduit alors les développements limités de ρ et ϕ qui s'écrivent :

$$\rho \approx \rho_0 \left(1 - \frac{\tau^2}{2} \Omega^2 - \frac{\Omega^2}{2} T^2 + \tau \Omega R\right)$$

$$\phi \approx -\Omega \frac{R}{\omega_0} + \frac{\tau \Omega}{2}$$

5.2 Evolution de Γ_{SS} au voisinage de l'origine. Résolutions temporelle et Doppler. Ambiguïté Retard-Doppler.

$$\text{Nous avons } \Gamma_{SS} = \frac{1}{2} \rho \cos[\omega_0 \tau + \phi]$$

Comme $\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} < 1$, ρ peut être considéré comme l'enveloppe d'un terme pseudo-périodique. Les résolutions temps et Doppler sont alors principalement déterminées par la forme de $\rho(\tau, \Omega)$.

Au troisième ordre près les courbes d'égale valeur $K\rho_0$ de l'enveloppe ρ ont pour équations dans le plan τ, Ω :

$$\tau^2 \Omega^2 + \Omega^2 T^2 - 2 \tau \Omega R = 2(1-K)$$

$$\text{avec } K = \frac{\rho}{\rho_0} \in [0, 1]$$

Ce sont des ellipses puisque $R^2 - \Omega^2 T^2 < -\frac{1}{4} < 0$

Les axes principaux de l'ellipse font avec les axes de coordonnées τ, Ω un angle α donné par :

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2R}{T^2 - \Omega^2}$$

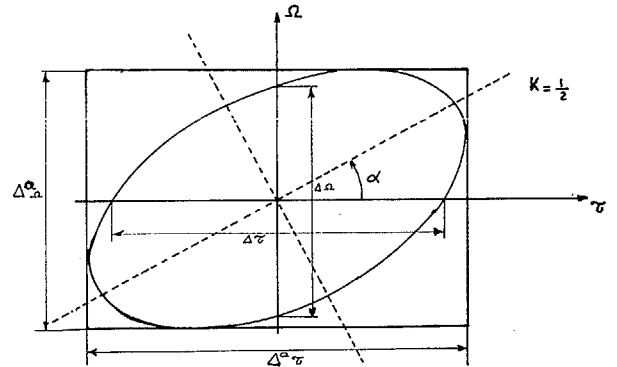
(Dans le plan τ, ξ l'angle α pour valeur :

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2K \nu_0}{\nu_0^2 T^2 - F^2})$$

Les résolutions temps-Doppler attachées à Γ_{SS} sont définies à partir de la courbe de niveau $\frac{\rho}{2}$ (mi-hauteur de ρ d'équation.

$$\tau^2 \Omega^2 + \Omega^2 T^2 - 2 \tau \Omega R = 1$$

et appelée ellipse de résolution.



- Résolution temps intrinsèque $\Delta\tau$

C'est la largeur à mi-hauteur de la coupe à pulsation Doppler Ω nulle de ρ

$$\Delta\tau = \frac{2}{\Omega} = \frac{1}{\pi F}$$

- Résolution Doppler intrinsèque $\Delta\Omega$

C'est la largeur à mi-hauteur de la coupe à retard τ nul de ρ

$$\Delta\Omega = \frac{2}{T} \quad \Delta\xi = \frac{1}{\pi \nu_0 T}$$

$$\Delta\Omega \Delta\tau = \frac{4}{\Omega T} \leq B \quad (= \text{si modulation d'amplitude gaussienne})$$

L'ambiguïté retard-pulsation Doppler (ou temps-fréquence) due à l'existence du coefficient R se traduit dans les problèmes de détection par une incertitude sur τ et Ω que nous appellerons respectivement résolution temps d'ambiguïté $\Delta^a\tau$ et résolution Doppler d'ambiguïté $\Delta^a\Omega$.

Ce sont les largeurs suivant τ et Ω du rectangle circonscrit à l'ellipse de résolution. En posant $\cos \phi = \frac{R}{\Omega T}$

$$\Delta^a\Omega = \frac{2}{T \sin \phi} = 2 \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 T^2 - R^2}} \quad \Delta^a\xi = \frac{1}{\pi \nu_0} \frac{F}{\sqrt{F^2 T^2 - K^2}}$$



$$\Delta^a_\tau = \frac{2}{\sqrt{2} \sin \phi} = 2 \frac{T}{\sqrt{2} T^2 - R^2}$$

$$\Delta^a_\Omega \cdot \Delta^a_\tau = 4 \frac{\sqrt{2} T}{\sqrt{2} T^2 - R^2} \leq 16 \sqrt{2} T$$

Lorsque $R = 0$ les résolutions d'ambiguïté coïncident avec les résolutions intrinsèques ($\alpha=0, \phi=0$). On dit que l'ambiguïté est nulle. A résolutions intrinsèques données les résolutions d'ambiguïté sont d'autant plus grandes (c'est-à-dire l'ambiguïté forte) que R^2 est grand. L'ambiguïté maximale (à Ω et T donnés, tels que $\sqrt{2} T > \frac{1}{2}$) a lieu pour un signal d'enveloppe G gaussienne, modulé linéairement en fréquence de façon impaire où $\sqrt{2} T^2 - R^2$ atteint sa valeur minimale $1/2$.

5.3 Fluctuations du niveau maximum de I_{SS} et incertitudes retard-Doppler en fonction de la transposition.

Pour l'étude de la valeur du maximum absolu de $|I_{SS}|$ et de sa position dans le plan τ, Ω il suffit de considérer un intervalle de variation de ϕ_L de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Avec une très bonne approximation ce maximum absolu se trouve sur la droite d'équation

$$(\omega_o - \omega_L) \tau - \frac{R}{\omega_o} \Omega + \phi_L = 0$$

dont les points correspondent à la valeur 1 de $\cos[(\omega_o - \omega_L) \tau + \phi(\tau, \Omega) + \phi_L]$ compte-tenu du développement limité de $\phi(\tau, \Omega)$ [le terme $\frac{1}{2} \tau \Omega$ est négligeable devant $(\omega_o - \omega_L) \tau$]. On est donc ramené à un problème d'intersection d'une droite avec des ellipses. La valeur relative et la position du maximum absolu de $|I_{SS}|$ sont alors données respectivement par le coefficient SS_K de l'ellipse tangente à la droite et les coordonnées du point de tangence. Le calcul donne pour un ϕ_L donné :

$$|I_{SS}|_{Max} = \frac{1}{2} \rho_o \left[1 - \frac{1}{2} \phi_L^2 \frac{\frac{\sqrt{2} R^2}{(\omega_o - \omega_L)^2}}{1 + \frac{R^2}{\sqrt{2} T^2 - R^2} \left[\frac{\sqrt{2} R^2}{\omega_o (\omega_o - \omega_L)} - 1 \right]^2} \right] u[(\omega_o - \omega_L) \tau]$$

$$\text{et } \Omega_T = \phi_L \frac{R \sqrt{\frac{2}{\omega_o}} - (\omega_o - \omega_L)}{T^2 \sqrt{2} - R^2} \cdot u[(\omega_o - \omega_L) \tau]$$

$$\tau_T = \phi_L \frac{\left[\frac{R^2}{\omega_o} - (\omega_o - \omega_L) T^2 \right]}{T^2 \sqrt{2} - R^2} u[(\omega_o - \omega_L) \tau]$$

Dans la plage de variation de ϕ_L à considérer $|I_{SS}|_{Max}$ fluctue entre les deux valeurs suivantes $1 - \frac{\pi^2}{8} u[(\omega_o - \omega_L) \tau] < |I_{SS}|_{Max} \leq 1$ $i_{SS}^{\wedge} = \frac{I_{SS}}{1/2 \rho_o}$

- et ses coordonnées Ω_T et τ_T balayent (suivant une droite) les plages $-\Omega_{T_{Max}}, +\Omega_{T_{Max}}$ et $-\tau_{T_{Max}}, +\tau_{T_{Max}}$

dont les largeurs sont appelées plages d'incertitudes de

transposition. On a : $\delta \Omega = \pi u[(\omega_o - \omega_L) \tau] \cdot \frac{|R| |(\omega_o - \omega_L) - \frac{\sqrt{2} R^2}{\omega_o}|}{T^2 \sqrt{2} - R^2}$
 $\delta \tau = \pi u[(\omega_o - \omega_L) \tau] \cdot \frac{|(\omega_o - \omega_L) T^2 - \frac{R^2}{\omega_o}|}{T^2 \sqrt{2} - R^2}$

Critère pratique

Compte-tenu de la condition impérative sur v_L $|v_o - v_L| \geq \frac{\Delta v}{2}$ et du fait que la largeur de bande limitée utile Δv_u du signal (non forcément à bande limitée) peut être approchée à $\frac{4 \sqrt{2} \Omega}{2 \pi}$, on est amené à adopter le critère pratique suivant $|(\omega_o - \omega_L) \tau| \geq 2 \sqrt{2}$

Si ce critère est vérifié nous avons une double majoration pour u dont la deuxième est indépendante de la nature du signal $u[(\omega_o - \omega_L) \tau] \leq \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{R^2}{\sqrt{2} T^2 - R^2} \frac{9}{16}} \leq \frac{1}{4}$

$$\text{Dans tous les cas } 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4} u[(\omega_o - \omega_L) \tau] \geq 0,7$$

En conclusion : "Si $|(\omega_o - \omega_L) \tau|$ est choisi tel que le critère est vérifié, la perte maximale éventuelle de niveau ne dépasse pas $\sim 3\text{dB}$ (1) La chute éventuelle est de 3 dB pour un signal d'ambiguïté nulle transposé au maximum".

De plus : - si l'ambiguïté est nulle, l'incertitude de transposition sur la fréquence Doppler est nulle et l'incertitude de transposition sur τ est inférieure à la résolution temps intrinsèque

$$\delta \Omega = 0 \quad \delta \tau = \pi \frac{1}{|(\omega_o - \omega_L) \tau|} \leq \frac{\pi}{2 \sqrt{2}} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \Delta \tau$$

- si l'ambiguïté est forte ($T \sqrt{2}$ voisin de R ce qui entraîne $\frac{T^2 \sqrt{2} R^2}{\sqrt{2} T^2 - R^2}$ et $\frac{R^2}{\sqrt{2} T^2 - R^2}$ grand) la perte éventuelle de niveau est négligeable, et l'on a $\delta \tau \approx \frac{T^2}{|R|} \delta \Omega$. Le calcul donne $\delta \Omega < 2 \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{2}}{|R|} \sim \frac{2}{T} \Delta \tau, \delta \tau < 2 \frac{\pi \sqrt{2} T^2}{3 R^2} \sim \frac{2}{\sqrt{2}} \Delta \tau$

Les incertitudes de transposition sont inférieures aux résolutions intrinsèques.


4.4 Exemples d'application

Les formules précédentes donnent immédiatement les résultats qui suivent. Néanmoins il convient de signaler ici que l'amplitude complexe qui intervient dans le calcul résulte de la limitation à Δv de l'amplitude complexe théorique à spectre non borné.

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t-t') \sin \frac{\pi \Delta v t'}{\pi \Delta v t'} dt$$

- Théorique

- Signal d'enveloppe gaussienne à modulation linéaire impaire de fréquence



$$S(t) = e^{-\frac{t^2}{(T/2)^2}} \sin \left[\omega_o t + \frac{\omega}{2T} t^2 \right]$$

ω est 2π fois l'excursion de la fréquence instantanée.

$$\Omega_G = \frac{2}{T}; T = \frac{T}{4}; \Omega_\phi = \frac{\omega}{4}; \Omega_G = \frac{\omega T}{8}; \sqrt{2} = \frac{\omega}{4 \sqrt{1 + \frac{64}{\omega^2 T^2}}}$$

$$R = \frac{\omega T}{16}; \Delta \tau = \frac{8}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{64}{\omega^2 T^2}}}; \Delta \Omega = \frac{8}{T}; \Delta \xi = \frac{8}{\omega_o T}; \Delta^a_\tau = T$$

$$\Delta^a_\Omega = \omega \sqrt{1 + \frac{64}{\omega^2 T^2}}; \Delta^a_\xi \approx \frac{\Delta \Omega}{\omega_o} \quad \text{Le critère général } |(\omega_o - \omega_L) \tau| \geq 2 \sqrt{2} \text{ donne :}$$

(1) quelle que soit la nature du signal considéré.

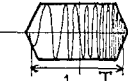


$$[\dot{I}_{SS}^{\text{Max Minimum}}] = 1 - 0,3 \frac{1}{1 + \frac{36}{16^3} \omega^2 T^2}$$

Si la modulation de phase est prépondérante

($\omega T \gg 8$) on a $\omega \approx \omega_0$. Si $\omega T \gg 8$; $|\omega_0 - \omega_L| \gg \frac{\omega}{2}$; $(\dot{I}_{SS}^{\text{Max}}) \approx 1$;
 $\delta \Omega < 2 \frac{\pi}{3} \frac{4}{T}$; $\delta \tau < 2 \frac{\pi}{3} \frac{4}{\omega}$; $\omega \approx \frac{\omega}{4}$; $\Delta \tau \approx \frac{8}{\omega}$; $\Delta \Omega^a \approx \frac{\omega}{\omega}$; $\Delta \frac{a}{\epsilon} \approx \frac{\omega}{\omega_0}$

- Impulsion rectangulaire à modulation linéaire impaire de fréquence (le temps de montée de l'impulsion ϵ variable est supposé petit devant T)

 Posons $S^2 = \frac{2}{3} \frac{T}{\epsilon}$; S est le coefficient d'augmentation de $\omega_G T$ par rapport à sa valeur $\frac{1}{2}$ du cas gaussien.

$$\omega_G \approx \sqrt{\frac{2}{\epsilon T}} = \frac{\sqrt{3} S}{T}; T \approx \frac{T}{2\sqrt{3}}; \omega_\phi \approx \frac{\omega}{2\sqrt{3}}; \omega_G = \frac{\omega T}{6S};$$

$$\omega \approx \frac{\omega}{2\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{36S^2}{\omega^2 T^2}}; R = \frac{\omega T}{12}; \Delta \tau = \frac{4\sqrt{3}}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{36S^2}{\omega^2 T^2}}};$$

$$\Delta \Omega = \frac{4\sqrt{3}}{T}; \Delta \tau^a = \frac{2T}{\sqrt{3}S}; \Delta \Omega^a = \frac{2\omega}{\sqrt{3}S} \sqrt{1 + \frac{36S^2}{\omega^2 T^2}}$$

Le critère général donne ($|\dot{I}_{SS}^{\text{Max Min}}|$) = ...

$$\dots 1 - 0,3 \frac{1}{(1 + \frac{\omega^2 T^2}{6^2 S^2} \frac{9}{16})}$$

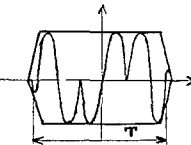
Si la modulation de phase est prépondérante, on

a $\omega \approx \omega_0$. Le temps de montée ϵ ne peut être alors inférieur à $\frac{\pi}{4\omega_0}$. Donc $\frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{\omega T}{6S} > \sqrt{\frac{\omega T \pi}{24}}$. Si la modulation de phase est forte ($\omega T \gg 8$) on a $|\omega_0 - \omega_L| > \frac{\omega}{\sqrt{3}}$; $(\dot{I}_{SS}^{\text{Max Min}}) \approx 1$;
 $\Delta \tau \approx \frac{4\sqrt{3}}{\omega}$; $\Delta \Omega^a \approx \frac{2\omega}{\sqrt{3}S}$; $\delta \Omega < 2 \frac{2\pi}{\sqrt{3}T}$; $\delta \tau < 2 \frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega}$

- Signal d'enveloppe Gaussienne ou rectangulaire à modulation linéaire de fréquence paire

Ce cas se déduit des précédents en considérant des termes d'amplitudes identiques et une modulation de phase de la forme $\phi(t) = \frac{\omega}{2T} t|t|$. On a alors $R = 0$. Toutes les valeurs des coefficients respectifs sont donc identiques à part celles qui font intervenir R. On a ainsi $\Delta \tau^a = 0$; $\Delta \Omega^a = 0$; $(|\dot{I}_{SS}^{\text{Max Min}}|) = 0,7$; $\delta \Omega = 0$;
 $\delta \tau \leq \frac{\pi}{2\omega}$

- Impulsion rectangulaire modulée binairement en phase (0, π) par un code pseudoaléatoire de N bits

 Ce signal peut être considéré comme un signal modulé en phase par le code $\frac{\pi}{2} C_{-1}^{+1}(t)$ Si ϵ est le temps de montée du code de modulation $C_{-1}^{+1}(t)$

celui de l'enveloppe du signal ϵ' est $\frac{\epsilon}{2}$
 $\omega_G = \sqrt{\frac{2}{\epsilon' T}}$; $T = \frac{T}{2\sqrt{3}}$; $\omega_\phi = \sqrt{\frac{N}{2}} \sqrt{\frac{2}{\epsilon' T}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

$$\frac{\omega_\phi}{\omega_G} = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \omega \approx \sqrt{\frac{2}{\epsilon' T}} \sqrt{\frac{\pi N}{2} + 1}; R \approx 0 \text{ pas d'ambiguité}$$

Si la modulation est forte ($N \gg 2$) ϵ' tend vers

$$\frac{T}{2N} \text{ et } \omega_\phi \text{ vers } \frac{N}{T}. \text{ Alors } |\omega_0 - \omega_L| > \frac{2N}{T}; \Delta \tau = \frac{2T}{N};$$

$$\Delta \Omega = \frac{4\sqrt{3}}{T}; (\dot{I}_{SS}^{\text{Max Min}}) = 0,7; \delta \Omega = 0; \delta \tau \leq \frac{\pi T}{2N}$$

5. Conclusion

Cette étude montre que le traitement de signaux (de bande relative inférieure à 1) par intercorrélation de leurs signaux transposés, conduit à des pertes de performances faibles. Cette technique est bien adaptée aux problèmes de détection et d'estimation de paramètres d'échos en temps réel. Elle apporte en particulier une simplification non négligeable dans la réalisation des corrélateurs optiques au niveau des films modèles sur lesquels l'inscription d'une porteuse élevée est illusoire.

Deux filtres adaptés optiques multi-Doppler à transposition ont été réalisés et font l'objet d'une description détaillée dans la conférence dont le titre est "Procédés optiques de convolution en temps réel".

MM. Alfred FORSTER, Alain GIULERI, André COUVE.

6. Bibliographie

Woodward P.M. Probability and information Theory Pergamon. Londres 1953

Persons C.E. Ambiguity functions of pseudo-random sequences. Proc. I.E.E.E. U.S.A. déc. 1966, 54, n° 13

BONNET G. Extension de la notion de fonction d'ambiguité à des signaux aléatoires Colloque GRETSI Nice 1967 page 35-48

GARAMPON G.

RIHAZECK A.W. I.E.E.E. Information Theorie Transactions 1968

ESCUDIE B. Représentation temps-fréquence dans l'analyse et la synthèse des signaux 6e Congrès International de Cybernétique 1972

MERMOZ H. Extension de la méthode du filtrage adapté au cas de plusieurs entrées pour l'optimilisation de la détection des signaux faibles. Thèse de Docteur es-Sciences appliquées. GRENOBLE 1964

SKENDEROFF Rôle de la fonction d'ambiguité dans les radars. Onde Electrique. Mai 1965 45. n° 458. p. 540 à 544.

MAX J. Méthodes et techniques de traitement du signal. Masson. Paris 1972