

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75

---



ECHANTILLONNAGE OPTIMAL POUR L'ESTIMATION DE SYMBOLES EN  
PRESENCE D'INTERFERENCES.

Odile MACCHI

Loïc GUIDOUX

Université de Paris-Sud- Bâtiment 210  
91405 ORSAY

Société T.R.T.  
5 avenue Réaumur - 92 LE PLESSIS ROBINSON

---

## RESUME

Pour estimer les données d'une suite présentant des interférences, on utilise le plus souvent un filtre numérique traitant les échantillons de l'onde observée à la cadence d'émission des données. Celui-ci est choisi pour minimiser l'erreur quadratique moyenne mais l'instant d'échantillonnage est fixé indépendamment, préalablement à cette minimisation.

Nous considérons ici une minimisation globale de l'erreur portant à la fois sur l'échantillonnage et sur le filtre numérique.

Dans les systèmes de transmission réels, les données sont quantifiées. On utilise la connaissance a priori des divers niveaux pour réaliser itérativement le filtrage optimal en l'absence de connaissances a priori sur le canal qui produit les interférences ; nous pouvons ainsi adapter automatiquement l'instant d'échantillonnage et les coefficients du filtre pour minimiser l'erreur quadratique moyenne entre la donnée vraie et son estimée.

## SUMMARY

The estimation of a data sequence with intersymbol interferences is usually performed by a digital filter which operates on the observed sampled signal at the emitted data rate. The filter is such that the mean quadratic error between the real data and its estimation is minimum ; however, previously to that minimization, the sampling time is chosen independently.

Here we consider an overall error minimization, which takes altogether the timing and the digital filtering into account.

In practical transmission systems, the data have discrete levels and this a priori knowledge is used to perform the optimal filtering iteratively, in the absence of knowledge on the channel that produces interferences. Thus we can adapt automatically the sampling time as well as the filter coefficients in order to minimize the mean quadratic error.



I - INTRODUCTION

A - Modèle étudié

Soit  $a_j, j \in \mathbb{Z}$  une suite de symboles (ou données) qui sont des variables aléatoires réelles, centrées, non corrélées, de variance  $a^2$ . Ces données sont transmises par les amplitudes successives d'impulsions identiques décalées dans le temps avec un pas  $\Delta$  ( $1/\Delta$  est appelé la cadence d'émission) et le signal émis vaut

$$(1) \quad e(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j g(t - j\Delta).$$

L'impulsion  $g(t)$  est choisie pour qu'il n'y ait pas d'interférences entre symboles : si

$$(2) \quad g(k\Delta) = \delta_{0,k} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

alors

$$(3) \quad e(j\Delta) = a_j,$$

de sorte qu'en échantillonnant aux instants  $j\Delta$ , on retrouve les symboles sans erreur.

Dans le canal de transmission, le signal émis (1) subit un filtrage, et un bruit  $B(t)$  stationnaire, centré s'y ajoute. L'onde observée est donc

$$(4) \quad X(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j S(t - j\Delta) + B(t),$$

où la fonction  $S(t)$  résulte du filtrage de  $g(t)$  par le canal. Si l'on échantillonne  $X(t)$  aux instants  $\tau + j\Delta$ , il vient

$$(5) \quad X(\tau + j\Delta) = a_j S(\tau) + \sum_{k \neq j} a_k S(\tau + (j-k)\Delta) + B(\tau + j\Delta).$$

A la différence de (3) on ne retrouve pas la donnée  $a_j$ . Le deuxième terme de (5) est le bruit d'interférences, toujours présent, (même en l'absence du bruit additif  $B(\tau + j\Delta)$ ), si la cadence est élevée.

Le modèle (4) décrit de nombreuses situations de communication : transmission de données sur lignes téléphoniques, sur câbles, et dans le futur, sur fibres optiques [1]-[4]. La fonction  $S(t)$  est appelée généralement réponse du canal en bande de base.

B - Le problème de l'estimation des symboles

Le problème de l'estimation de la suite des variables  $a_j$  sur la base de l'observation (4) a été étudié par divers auteurs. En particulier Forney [5] a montré que si le bruit  $B(t)$  est gaussien et blanc et si le signal  $S(t)$  est de durée  $[0, \theta]$  finie, la

suite des échantillons de sortie du filtre  $\mathcal{F}$  adapté à  $S(t)$  aux instants  $\theta + j\Delta$  constitue un résumé exhaustif pour l'estimation de la suite des données  $a_j$ . Puisque le bruit est gaussien, l'estimateur optimal qui suit l'échantillonneur est linéaire par rapport à ces échantillons. Il est donc de la forme

$$(6) \quad \tilde{a}_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Y(k\Delta + \theta) \cdot f(j, k),$$

où  $Y(t)$  est la sortie du filtre  $\mathcal{F}$ , et où les coefficients  $f(j, k)$  sont évalués de manière à minimiser l'erreur quadratique moyenne (E.Q.M.) entre  $\tilde{a}_j$  et la donnée vraie  $a_j$ . A cause de la stationnarité de la statistique des données  $a_j$  et du bruit en sortie de  $\mathcal{F}$ , il est facile de voir que  $f(j, k)$  n'est fonction que de  $j - k$ . D'où la forme de l'estimateur optimal

$$(7) \quad \tilde{a}_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Y(\theta + k\Delta) h_{j-k}.$$

Le schéma de cet estimateur est donné sur la figure 1.

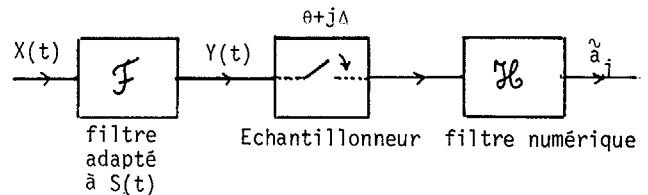


Figure 1 : Estimateur optimal de la suite des  $a_j$ .

La formule (7) représente un filtrage numérique que nous désignerons par  $\mathcal{H}$ , de la suite des échantillons  $Y(\theta + j\Delta)$ .

C - Réalisation pratique

Dans la pratique, la fonction  $S(t)$  caractéristique du canal est inconnue ou mal connue et, à l'entrée de l'estimateur, on remplace le filtre adapté  $\mathcal{F}$  par un filtre  $\mathcal{R}$  de gain à peu près rectangulaire dans la bande de fréquence estimée du signal  $S(t)$ .

Alors il n'est plus possible de préciser l'instant d'échantillonnage qui conserve aux échantillons leur caractère de résumé exhaustif. Cet instant, que nous désignerons dorénavant par  $\tau$ , devient un paramètre du système d'estimation. En outre, toute réalisation pratique du filtre numérique  $\mathcal{H}$ , ne pourra comporter qu'un nombre fini de coefficients non nuls. Soit

$$(8) \quad h_k = 0 \quad \text{si } |k| > N.$$

Le filtrage  $\mathcal{H}$  est alors représenté par le vecteur  $\vec{H}$ .



Ainsi l'estimateur optimal de la figure 1 doit être remplacé dans la pratique par l'estimateur de la figure 2, dans laquelle les  $(2N + 2)$  paramètres  $(\vec{H}, \tau)$  sont à optimiser. Nous désignerons sous le terme d'égaliseur l'ensemble échantillonneur - filtre numérique.

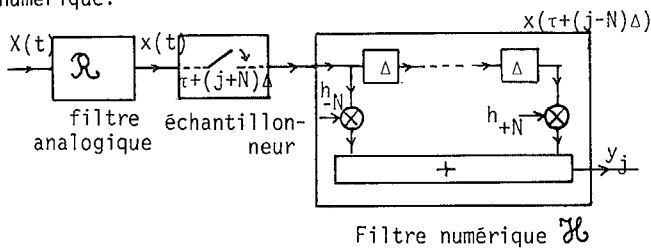


Figure 2 : Estimateur réalisable de la suite des  $a_j$ .

Le système de la figure 2 a été étudié par de nombreux auteurs. Cependant dans tous ces articles, l'optimisation réalisée sur l'égaliseur est partielle car l'instant  $\tau$  est fixé indépendamment de l'E.Q.M.

$$(9) \quad \epsilon = E ((y_j - a_j)^2)$$

sur des critères assez variés, et le choix de  $\tau$  n'est jamais discuté explicitement. Cet instant une fois fixé, les auteurs recherchent une minimisation de (9), en agissant sur le vecteur  $\vec{H}$ . Une telle procédure est évidemment sous-optimale.

II - EXPRESSION DE L'ERREUR

L'égaliseur réalisable optimal au sens de l'E.Q.M., est défini par l'ensemble  $(H_*, \tau_*)$  des coefficients  $\vec{H}_*$  du filtre numérique et de l'instant d'échantillonnage  $\tau_*$  pour lesquels l'erreur (9) est minimale.

Soient respectivement  $x(t)$ ,  $s(t)$  et  $b(t)$  les réponses du filtre  $\mathcal{R}$  aux fonctions  $X(t)$ ,  $S(t)$ , et  $B(t)$ . D'après (4)

$$(10) \quad x(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j s(t - j\Delta) + b(t).$$

Introduisons les grandeurs suivantes :

- le vecteur observation  $\vec{x}_k(\tau)$  constitué par les échantillons présents dans  $\mathcal{H}$  à l'instant  $k\Delta$  d'estimation de  $a_k$  :

$$(11) \quad \vec{x}_k^T(\tau) = (x(\tau + (k+N)\Delta), \dots, x(\tau + k\Delta), \dots, x(\tau + (k-N)\Delta)),$$

- le vecteur signal à l'instant  $k$ , défini de manière analogue

$$(12) \quad \vec{s}_k^T(\tau) = (s(\tau + (k+N)\Delta), \dots, s(\tau + k\Delta), \dots, s(\tau + (k-N)\Delta)).$$

et le vecteur bruit  $\vec{b}_k(\tau)$ ,

- la matrice  $((2N+1), (2N+1)) \mathcal{Y}(\tau)$ , dite matrice de pseudo-corrélation du canal, dont le terme  $(i, j)$  est égal à la corrélation discrète des échantillons de la réponse  $s(t)$  du canal

$$(13) \quad s_{ij}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(\tau + (n-i)\Delta) s(\tau + (n-j)\Delta),$$

- la matrice  $\mathcal{R}_b$  de corrélation de  $(2N+1)$  échantillons successifs du bruit  $b(t)$ . Celle-ci est indépendante de  $\tau$  à cause de la stationnarité du bruit,

- la matrice dite "de corrélation de l'entrée" ainsi définie

$$(14) \quad \mathcal{A}(\tau) = \mathcal{Y}(\tau) + \frac{1}{a^2} \mathcal{R}_b.$$

Sous des hypothèses extrêmement générales explicitées dans [4], cette matrice est inversible. En particulier tel est le cas lorsque le bruit  $B(t)$  est blanc, et que le module du gain du filtre d'entrée  $\mathcal{R}$  peut être considéré comme constant dans la bande de fréquences  $[-\frac{1}{2\Delta}, +\frac{1}{2\Delta}]$  et nul en dehors. Ce cas est fréquemment invoqué par les auteurs. On a

$$(15) \quad \mathcal{R}_b = \sigma_b^2 \mathcal{I},$$

où  $\mathcal{I}$  est la matrice identité et  $\sigma_b^2$  est la puissance des échantillons  $b(\tau + j\Delta)$ , qui sont alors non corrélés.

Avec ces notations (10) devient

$$(16) \quad \vec{x}_k(\tau) = \sum_j a_j \vec{s}_{k-j}(\tau) + \vec{b}_k(\tau),$$

et la sortie de l'égaliseur s'écrit

$$(17) \quad y_j = \vec{x}_j^T(\tau) \cdot \vec{H}.$$

En introduisant (17) dans l'expression (9) de l'E.Q.M. il vient

$$(18) \quad \epsilon(\vec{H}, \tau) = \vec{H}^T E(\vec{x}_j(\tau) \vec{x}_j^T(\tau)) \vec{H} - 2\vec{H}^T E\{a_j \vec{x}_j(\tau)\} + a^2.$$

Reportant alors (16) dans (18) et utilisant la non corrélation des données, on trouve aisément

$$(19) \quad \epsilon(\vec{H}, \tau) = a^2 \{1 - 2\vec{H}^T \vec{S}_0^T(\tau) + \vec{H}^T \mathcal{A}(\tau) \vec{H}\}.$$

Cette expression fait apparaître la dépendance de l'E.Q.M. en fonction des paramètres  $\vec{H}$  et  $\tau$  de l'égaliseur.

L'estimateur optimal  $(H_*, \tau_*)$  est donc solution des équations obtenues en annulant le gradient de (19), soient les deux équations

$$(20) \quad \nabla_{\vec{H}} \epsilon(\vec{H}, \tau) = 2 a^2 (-\vec{S}_0^T(\tau) + \mathcal{A}(\tau) \vec{H}) = \vec{0},$$

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \epsilon(\vec{H}, \tau) = 2 a^2 \vec{H}^T (-\vec{S}'_0(\tau) + \frac{1}{2} \mathcal{Y}'(\tau) \vec{H}) = 0.$$



L'équation (20) est celle qui définit le filtrage optimal  $\vec{H}(\tau)$  lorsque l'instant d'échantillonnage  $\tau$  est fixé. Elle admet toujours une solution unique qui correspond effectivement au minimum de  $\epsilon(\vec{H}, \tau)$  pour cette valeur de  $\tau$ . En éliminant  $\vec{H}$  entre (20) et (21), on obtient l'équation vérifiée par  $\tau_*$ ,

$$(22) \quad \vec{S}_0^T(\tau) \vec{A}^{-1}(\tau) [\vec{S}_0^T(\tau) - \frac{1}{2} \vec{U}^T(\tau) \vec{A}^{-1}(\tau) \vec{S}_0^T(\tau)] = 0.$$

Cette équation est non linéaire en  $\tau$ , et peut avoir plusieurs solutions, ne correspondant pas nécessairement au minimum de l'erreur. L'égaliseur mettant en oeuvre cette optimisation est décrit dans les références [6] et [9].

### III - REALISATION ADAPTATIVE DE L'EGALISEUR

#### A - Egaliseur d'échantillonnage fixe

Pour une valeur de  $\tau$  fixée, on montre aisément que le filtrage optimal  $\vec{H}(\tau)$  solution de (20) peut être atteint de manière algorithmique en utilisant l'équation récursive

$$(23) \quad \vec{H}_{j+1}(\tau) = \vec{H}_j(\tau) - \mu \nabla_{\vec{H}} \epsilon(\vec{H}_j(\tau), \tau),$$

pourvu que  $\mu$  soit positif et assez petit. D'après (18) (23) s'écrit aussi

$$(24) \quad \vec{H}_{j+1}(\tau) = \vec{H}_j(\tau) - 2\mu E\{(\vec{x}_j^T(\tau) \vec{H}_j(\tau) - a_j) \vec{x}_j(\tau)\}.$$

La grandeur

$$(25) \quad e_j = \vec{x}_j^T(\tau) \cdot \vec{H}_j(\tau) - a_j = y_j(\tau) - a_j$$

est l'erreur d'estimation entre la sortie  $y_j(\tau)$  de l'égaliseur à l'instant  $j\Delta$ , et la donnée vraie  $a_j$ . Il est possible de démontrer (cf [4]), que l'algorithme stochastique

$$(26) \quad \vec{H}_{j+1}(\tau) = \vec{H}_j(\tau) - \mu \vec{x}_j(\tau) \cdot e_j$$

déduit de (24) en supprimant la moyenne d'ensemble, converge vers le vecteur de filtrage optimal  $\vec{H}(\tau)$ . Cette convergence a lieu en moyenne et avec une variance limite arbitrairement petite pourvu que  $\mu$  soit assez faible [7].

Dans le contexte de communications envisagé ici, les variables aléatoires  $a_j$  ne peuvent prendre qu'un nombre fini de niveaux discrets. Le système de décision comporte donc à la suite de l'estimateur de la figure 2, un organe de comparaison à des seuils intermédiaires entre ces niveaux. Dès que le vecteur de filtrage  $\vec{H}_j$  est rendu assez proche de l'optimalité par un système d'acquisition, l'estimateur fonctionne correctement et la décision  $\hat{a}_j$  est égale à la donnée vraie  $a_j$  avec une probabilité très proche

de 1. Dans ce cas, l'erreur d'estimation  $e_j$  est connue : c'est la différence entre l'estimation  $y_j(\tau)$  et la décision  $\hat{a}_j$ . L'algorithme d'adaptation (26) peut donc être poursuivi, sans connaître a priori la donnée émise  $a_j$ . On a obtenu une version autoadaptative de l'égaliseur optimal pour une valeur donnée  $\tau$  de l'instant d'échantillonnage.

#### B - Egaliseur à double échantillonnage

A cause de la non linéarité en  $\tau$  de l'équation (22) définissant  $\tau_*$ , l'égaliseur optimal  $(\vec{H}_*, \tau_*)$  n'est pas nécessairement atteint par un algorithme du gradient du type (23), ce qui empêche sa réalisation adaptative. Pour lever cette difficulté, considérons un égaliseur à double échantillonnage, c'est-à-dire de pas  $\frac{\Delta}{2}$ . Le vecteur observation comporte alors deux parties analogues à (11)

$$(27) \quad \vec{x}_j^1(\tau) = (x(\tau+(j+N)\Delta), \dots, x(\tau+j\Delta), \dots, x(\tau+(j-N)\Delta))$$

que nous appellerons voie directe, et la voie décalée de  $\frac{\Delta}{2}$

$$(28) \quad \vec{x}_j^2(\tau) = (x(\tau+(j+N)\Delta - \frac{\Delta}{2}), \dots, x(\tau+j\Delta - \frac{\Delta}{2}), \dots, x(\tau+(j-N)\Delta - \frac{\Delta}{2})).$$

Si l'instant d'échantillonnage choisi  $\tau$ , n'est pas trop éloigné de l'optimalité  $\tau_*$ , alors on peut interpoler linéairement  $x(\tau_* + k\Delta)$ , à l'aide des deux voies :

$$(29) \quad x(\tau_* + k\Delta) = a_* x(\tau + k\Delta) + b_* x(\tau + k\Delta - \frac{\Delta}{2}).$$

Ainsi l'estimateur optimal  $(\vec{H}_*, \tau_*)$  peut être approximativement réalisé à l'aide des deux voies décalées. D'après (17), (27)-(29)

$$(30) \quad y_j = a_* \vec{H}_*^T \cdot \vec{x}_j^1(\tau) + b_* \vec{H}_*^T \cdot \vec{x}_j^2(\tau).$$

Le filtrage numérique que traduit la formule (30) est réalisé à l'aide de deux filtres numériques placés respectivement sur la voie directe et sur la voie décalée, et dont les coefficients sont proportionnels. Cette contrainte de proportionnalité exprime l'interpolation  $\tau_*$  réalisée par l'égaliseur au voisinage des deux instants d'échantillonnage  $\tau$  et  $\tau - \frac{\Delta}{2}$ . Si l'on abandonne la contrainte, on perd peut-être l'interprétation de l'égaliseur à double échantillonnage comme estimateur à échantillonnage optimal, mais on ne peut que diminuer l'erreur quadratique moyenne (9), en jouant en même temps sur les  $(4N+2)$  coefficients des deux voies. Soient respectivement  $c_{-N}, \dots, c_0, \dots, c_N$  et  $b_{-N}, \dots, b_0, \dots, b_N$  ces coefficients et soient  $\vec{c}$



et  $\vec{B}$  les vecteurs correspondants. L'égaliseur à double échantillonnage réalise

$$(31) \quad y_j = \vec{C}^T \cdot \vec{x}_j^1(\tau) + \vec{B}^T \cdot \vec{x}_j^2(\tau) = \vec{D}^T \cdot \vec{x}_j(\tau).$$

Dans le dernier membre de (31), le vecteur de filtrage regroupe les filtrages  $\vec{C}$  et  $\vec{B}$  sur les deux voies, et le vecteur observation  $\vec{x}_j(\tau)$  regroupe les deux observations décalées (27) et (28).

L'optimisation se fait en recherchant les vecteurs  $\vec{C}_*$  et  $\vec{B}_*$  qui minimisent l'erreur quadratique moyenne. Il n'y a plus d'optimisation sur  $\tau$  : celle-ci a été reportée dans la structure mutuelle des deux voies décalées. Or (31) et (17) sont exactement semblables ; dans ces conditions les résultats du paragraphe III-A s'appliquent. Cela signifie que l'égaliseur à double échantillonnage optimal  $\vec{D}_* = (\vec{C}_*, \vec{B}_*)$  peut être construit de manière adaptative comme limite de l'algorithme (26) (ou de celui qui s'en déduit en remplaçant la donnée vraie  $a_j$  par la décision prise  $\hat{a}_j$ ). Cet égaliseur autoadaptatif est décrit en détail en [9]. Il est schématisé sur la figure 3.

Il est facile de voir que  $\vec{D}_*$  est l'unique solution de

$$(32) \quad E\{\vec{x}_j(\tau) \vec{x}_j(\tau)^T\} \vec{D}_* = E\{a_j \vec{x}_j(\tau)\}.$$

La matrice de covariance du vecteur observation  $\vec{x}_j(\tau)$  est très semblable à la matrice  $\underline{A}(\tau)$ , (14), mais fait intervenir 4 sous matrices correspondant aux différents couplages des deux voies décalées. De même le vecteur  $E\{a_j \vec{x}_j(\tau)\}$  comprend 2 parties, le vecteur signal  $\vec{S}_0(\tau)$  et le vecteur signal obtenu en décalant l'échantillonnage de  $\Delta/2$ .

#### IV - RESULTATS ET CONCLUSION

D'après son principe même l'égaliseur à double échantillonnage à  $(4N+2)$  coefficients est très voisin de l'estimateur réalisable optimal - tant du point de vue de l'instant d'échantillonnage que des coefficients du filtre - Ce dernier n'ayant que  $2N+1$  coefficients. Il peut même lui être supérieur. Il a, naturellement l'inconvénient de nécessiter deux fois plus de coefficients, mais il a l'avantage important de pouvoir être construit de manière autoadaptative.

Le nombre de coefficients est une contrainte technologique importante. C'est pourquoi les performances de l'égaliseur à double échantillonnage, et celles d'un égaliseur classique (dont l'instant d'échantillonnage est fixé indépendamment de la procédure d'optimisation) ont été comparées, à nombre total de coefficients identique. Ce point est discuté en détail dans [6] et [8].

Il apparaît que si ce nombre est assez grand (supérieur à 15 par exemple), l'égaliseur à double échantillonnage est toujours supérieur à l'égaliseur classique, la supériorité étant plus ou moins marquée suivant la réponse  $s(t)$  du canal. En outre, pour le premier égaliseur, l'erreur quadratique moyenne résultante varie très peu avec l'instant d'échantillonnage choisi, tandis que pour le second, cette erreur peut varier beaucoup suivant le type de canal. Conformément à son principe, l'égaliseur à double échantillonnage fournit des performances indépendantes de l'instant d'échantillonnage.

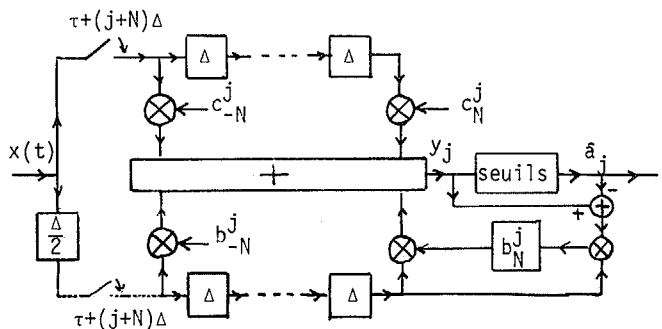


FIGURE 3 : Egaliseur autoadaptatif à double échantillonnage.



REFERENCES

- [1] LUCKY R.W., SALZ J., WELDONE J. : Principles of data communication (Mac Graw Hill), 1968.
- [2] GERSHO A. : "Adaptative equalization of highly dispersive channels for data transmission". B.S.T.J. p. 55-70, Janv. 1969.
- [3] PERSONICK S.D. : "Baseband linearity and equalization in fiber optic digital communication systems" . B.S.T. J. Vol 52, p. 1175-1194 Sept. 1973.
- [4] MACCHI C., JOUANNAUD J.P., MACCHI O. : "Récepteurs adaptatifs pour transmission de données à grand débit." Ann. des Télécom. Mai-Juin 1975
- [5] FORNEY G.D. : "Maximum likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interference." I.E.E.E. Trans. Inform. Theory, vol IT-18, p. 363-378, Mai 1972.
- [6] GUIDOUX L. : Egalisation autoadaptative de lignes téléphoniques. Thèse de docteur Ingénieur Université Paris XI - Orsay, 1974.
- [7] JOUANNAUD J.P., MACCHI C. : "Sur la variance limite d'un algorithme d'itération stochastique" C.R.A.S. à paraître.
- [8] GUIDOUX L., MACCHI O. : "Egalisation avec adaptation de l'instant d'échantillonnage". Cables et Transmissions. Juillet 1975.
- [9] Brevet d'invention pris par la société T.R.T. (Inventeur GUIDOUX) n° 7308476 du 9/3/73. Certificats d'addition n° 7323052 du 25/6/73 n° 7334829 du 28/9/73.