

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



Méthode pratique de calcul de la densité spectrale de puissance de signaux codés

Practical evaluation method of power spectra of digital coded signals

J.C. BIC

D. DUPONTEIL

Centre National d'Etudes des Télécommunications  
38/40, Rue du Général Leclerc - 92131 - ISSY-les-MOULINEAUX

## RESUME

La connaissance de la répartition en fréquence de la puissance des signaux numériques codés est un facteur important de la conception des codages binaire à signal.

Les impératifs peuvent être, par exemple, de s'affranchir de composante continue et de concentrer le maximum de puissance dans une certaine bande.

L'article expose un moyen pratique, facile à mettre en oeuvre sur calculateur numérique, de calcul de la densité spectrale de puissance de signaux codés.

La description de la procédure de codage binaire à signal par un graphe facilite le calcul ; certaines propriétés des chaînes de Markov permettent alors d'obtenir fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance. En fin d'article, on rappelle comment étendre ces résultats à une porteuse modulée en phase par un signal numérique.

## SUMMARY

Knowledge of power spectra of coded digital signals is one of the most important point in the design of pulse sequences corresponding to binary messages. There may be, e.g., a need for suppressing d.c. components and for concentrating the power in a given bandwidth.

This paper proposes a versatile and easy to program method for computing power spectra of digital signals. The pulse sequence is described by a graph and by the related probability matrix. Properties of Markov chains are used to calculate the autocorrelation function and the power spectrum. The method may be used in the case of a digitally phase modulated carrier.



INTRODUCTION

Le développement des techniques numériques de transmission a entraîné l'apparition de nombreux types de codages binaire à signal. Il est alors important de connaître la répartition en fréquence de la puissance transmise.

Le but de cet article est de montrer comment peut se faire le calcul de la densité spectrale de puissance continue ainsi que du spectre de raies d'un train numérique codé. Ce train est formé d'impulsions, se produisant à des instants périodiques, qui peuvent être de formes différentes.

Le codage est décrit à l'aide d'un graphe représentant les différents états possibles du signal numérique et les transitions entre ces états. Une chaîne de Markov y est associée. Des résultats rappelés en annexe, concernant les chaînes de Markov finies régulières et périodiques nous permettent d'exprimer, sous forme simple à exploiter numériquement, les résultats recherchés. Le calcul fait alors intervenir la représentation matricielle ainsi que le comportement asymptotique de la chaîne.

Les résultats obtenus pour des signaux numériques en bande de base peuvent être utilisés dans le calcul de densité spectrale de puissance de porteuse modulée en phase par des signaux numériques.

Quelques exemples sont traités sous forme de figures à la fin de l'article.

I - PRESENTATION DU PROBLEME -

Ce paragraphe sera constitué de généralités concernant le calcul proprement dit de la densité spectrale de puissance d'un signal numérique et concernant les signaux numériques eux-mêmes.

1. Calcul de la densité spectrale de puissance :

Le calcul de la densité spectrale de puissance d'un processus stationnaire se fait normalement par l'intermédiaire de celui de la fonction d'autocorrélation de ce même processus. Il suffira de prendre avec certaines précautions la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $R(\tau)$ . En particulier, il faudra distinguer dans  $R(\tau)$  :

a) une fonction continue tendant vers 0 quand  $\tau$  tend vers l'infini, terme possédant une transformée de Fourier au sens des fonctions.

b) une composante périodique de période  $LT$  ( $L$  nombre entier), dans le cas où  $R(\tau)$  ne tend pas

vers zéro à l'infini, qui fera apparaître des raies dans le spectre aux fréquences  $f_n = \frac{n}{LT}$ . (cette composante périodique peut se limiter à une composante continue).

La transformation de Fourier étant une opération linéaire, la densité spectrale de puissance sera la superposition du spectre continu et du spectre de raies.

2. Signal numérique :

D'un point de vue général, transmission d'un signal numérique signifie émission à instants périodiques, ( $T$  sera la période et  $\frac{1}{T}$  la fréquence numérique) d'un signal électrique élémentaire (qu'on appellera aussi impulsion) choisi parmi  $N$ .

L'impulsion relative à l'instant  $kT$  (une origine des temps étant choisie) sera notée  $x^k(t)$ . A celle-ci est associée une variable aléatoire  $X^k$  pouvant prendre l'une des  $N$  valeurs possibles  $1, \dots, N$ , la valeur possible  $i$  de  $X^k$  étant transmise au moyen du signal  $x_i(t - kT)$ .

$$X^k = \begin{cases} 1 \longrightarrow x^k(t) = x_1(t - kT) \\ \vdots \\ i \longrightarrow x^k(t) = x_i(t - kT) \\ \vdots \\ N \longrightarrow x^k(t) = x_N(t - kT) \end{cases}$$

Le signal numérique  $X(t)$  sera représenté par :

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^k(t)$$

La fonction d'autocorrélation de  $X(t)$  sera notée  $R(\tau)$ . Du fait même que le processus aléatoire, dont on cherche la densité spectrale de puissance, est un signal numérique il s'introduit une non-stationnarité inhérente à ce type de processus. En effet, l'écriture

$$R(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \sum_{k,l} E[x^k(t)x^l(t+\tau)]$$
 nous

montre que nous avons affaire à une fonction de  $t$  périodique et de période  $T$ . Cela tient au fait qu'on privilège un certain instant sur l'axe des temps (origine des temps), et la définition de la fonction d'autocorrélation  $R(\tau)$  comme la moyenne sur une période  $T$  de la fonction  $R(t, t+\tau)$  s'introduit naturellement (1).

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T E[X(t)X(t+\tau)] dt$$



Méthode pratique de calcul de la densité spectrale de puissance de signaux codés.

Practical evaluation method of power spectra of digital coded signals.

### 3. Représentation du signal numérique par un graphe :

Au signal numérique est associée une chaîne de Markov finie qui est la suite des variables aléatoires  $X^k$  à valeurs dans  $E$ ,  $E = \{1, \dots, N\}$ . La variable aléatoire  $X^k$  est issue du système codeur qui l'élabore à partir du signal incident. On admettra que le système codeur admet une représentation d'état : à partir de l'état à l'instant  $(k-1)T$  et du symbole incident à l'instant  $kT$  on déduit l'état du système à l'instant  $kT$  ainsi que la réponse du codeur.

Ainsi on peut élaborer un graphe qui traduit les transitions possibles pour le codeur ainsi que leurs probabilités. Le graphe associé au signal numérique sera celui qui est associé à la chaîne de Markov.

On définira la matrice de probabilité de transition  $P$  comme étant la matrice d'éléments  $p_{ij}$ .  $p_{ij}$  = Probabilité  $[X^{k+1}=j/X^k=i]$ . La matrice  $P^n$  sera la matrice d'éléments  $p_{ij}^{(n)}$ , matrice de transition en  $n$  étapes. ( $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ ;  $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ ).

Des résultats connus sur les chaînes de Markov nous conduisent à poser les résultats suivants (voir annexe) :

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$ , probabilité à priori de l'état  $(j)$ .

il peut y avoir selon le cas, convergence au sens habituel, ou convergence au sens de Cesaro.

- Cas des chaînes régulières : (convergence au sens habituel) c'est le cas de la majorité des codages binaire à signal, c'est pourquoi nous y consacrerons un chapitre.

- Cas des chaînes cyclo-stationnaires : il y a à ce moment apparition d'un caractère périodique de la limite de période  $L$ . Au sens de Cesaro, la probabilité à priori de l'état  $(j)$  sera  $\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L p_{1,j}$  où  $p_{1,j}$  représente la limite d'une sous-suite  $p_{ij}^{(nL+1)}$  quand  $n$  tend vers l'infini (voir annexe).

Dans tous les cas on peut donc écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_N \\ p_1 & p_2 & \dots & p_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_N \end{bmatrix}$$

### II - SIGNAL NUMERIQUE "REGULIER"-

Le calcul se limitera à la recherche de deux termes dans la fonction d'autocorrélation  $R(\tau)$  :

une fonction tendant vers zéro quand  $\tau$  tend vers l'infini, une composante périodique et de période  $T$ .

#### 1. Fonction d'autocorrélation :

$R(t, t+\tau) = \sum_{k,l} E [x^k(t)x^l(t+\tau)] = \sum_{i,j} \sum_{k,l} p_i p_j^{(1-k)} x_i(t-kT) x_j(t-lT+\tau)$ , fonction périodique en  $t$ , de période  $T$ . La suppression de la variable  $t$  au moyen d'une moyenne temporelle, nous conduit à l'expression:

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i,j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} p_i x_i(u) \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_j x_j(u-kT+\tau) \right] du$$

L'expression de la transformée de Fourier de la fonction  $R(\tau)$ , doit nous donner celle de  $S(f)$ . Il faut toutefois tenir compte de  $R(\tau)$  partie périodique de  $R(\tau)$  :

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i,j} \int_{-\infty}^{+\infty} p_i x_i(u) \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_j x_j(u-kT+\tau) \right] du, \text{ fonction périodique de période } T.$$

$R(\tau)$  peut se développer en série de Fourier et donner directement l'amplitude des raies qui apparaîtront aux fréquences  $f_n = \frac{n}{T}$ .

#### 2. Densité spectrale de puissance :

a) partie continue : C'est la transformée de Fourier de  $R(\tau) - R(\tau)$ . Nous obtenons directement :

$$S(f) = \frac{1}{T} \sum_{i,j} p_i S_i^*(f) S_j(f) \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (p_{ij} - p_j) e^{-2\pi j f k T} \right]$$

où  $S_i(f)$  est la transformée de Fourier de  $x_i(t)$ .

b) spectre de raies :  $R(\tau)$  étant périodique, on peut écrire

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-2\pi j \frac{n\tau}{T}}. \text{ Le spectre de raies sera } S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - \frac{n}{T}) \text{ où } C_n = \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau) e^{-2\pi j \frac{n\tau}{T}} d\tau$$

On arrive à l'expression :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T^2} \left| \sum_{i=1}^N p_i S_i(f) \right|^2 \delta(f - \frac{n}{T})$$

#### 3. Cas particulier :

- impulsions de même forme :  $x_i(t) = A_i g(t)$ , où  $A_i$  sera un scalaire réel véhiculant le message. En posant  $G(f) =$  transformée de Fourier de  $g(t)$ , on a :

$$S(f) = \frac{1}{T} \left| G(f) \right|^2 \left[ \sum_{i,j} p_i A_i A_j \delta_{ij} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} p_i A_i A_j p_{ij}^{(k)} \cos(2\pi f k T) \right]$$

$$S(f) = \frac{1}{T^2} \left| G(f) \right|^2 \left[ \sum_i p_i \right]^2 \delta \left( f - \frac{n}{T} \right)$$

On retrouve là un résultat déjà énoncé par Bennett (4).

### III - SIGNAL NUMERIQUE "CYCLO STATIONNAIRE"-

Dans ce cas, la matrice de probabilité de transition en n étapes  $P^n$  tend, lorsque n tend vers l'infini, vers une distribution périodique de matrice  $P_1^\infty, P_2^\infty, \dots, P_L^\infty$ , où L est la période du cycle. (On a  $P_a^\infty = P_{a+1}^\infty$ ).

La probabilité à priori de l'état (j) est alors définie comme limite au sens de Cesaro de  $p_{ij}^{(n)}$ .

#### 1. Fonction d'autocorrélation :

Le raisonnement fait dans le paragraphe II reste valable, il nous conduit au résultat déjà énoncé :

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i,j} p_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(u) \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{ij}^{(k)} x_j(u-kT+\tau) \right] d\tau$$

Par contre, le calcul de la composante périodique conduit à des résultats différents. Une cyclo stationnarité de période L nous conduit à découper l'ensemble des N états en L sous-ensembles  $S_a$ , ( $a = 1, \dots, L$ ) (voir Annexe).

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{a=1}^L \sum_{i \in S_a} \sum_{j \in S_a} p_{ij} x_i(u) \left[ \sum_{k=1}^L p_{a+1,j} \sum_{n=1}^L x_j(u-(nL+1)T+\tau) \right] du$$

#### 2. Densité spectrale de puissance :

a) partie continue : transformée de Fourier de

$$R(\tau) - \tilde{R}(\tau), \text{ ce qui donne :}$$

$$S(f) = \frac{1}{T} \sum_{a=1}^L \sum_{i \in S_a} \sum_j p_{ij} S_i^*(f) S_j(f)$$

$$\left[ \sum_{l=1}^L \sum_{n=-\frac{nL}{T}}^{+\infty} (p_{ij} - p_{a+1,j}) e^{-2\pi j f (nL+1)T} \right]$$

b) Spectre de raies : en exprimant  $R(\tau)$  sous forme de série de Fourier on obtient directement l'amplitude des raies.

$$S(f) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{a=1}^L \sum_{i \in S_a} p_{ij} S_i \left( \frac{n}{LT} \right) e^{-2\pi j \frac{na}{L}} \right|^2 \delta \left( f - \frac{n}{LT} \right)$$

#### 3. Application aux codages par blocs :

Le message numérique binaire est découpé en mots de K éléments. Le codeur associé à chacun de ces mots, un mot de M symboles, chaque symbole appartenant à un alphabet composé de r éléments.

Chaque mot codé a ainsi une durée élémentaire MT unités de temps. On peut alors traiter le problème de deux façons :

- chacun des mots est considéré comme une impulsion. Le rythme numérique est alors  $\frac{1}{T} = \frac{1}{MT}$ . Le signal est en général "régulier". Le nombre d'états du graphe associé étant N ( $N \geq 2^K$ ) on aura N formes d'impulsion et parmi elles,  $2^K$  différentes.

- chacun des mots est décomposé en M impulsions élémentaires de durée T. Le rythme numérique est alors  $\frac{1}{T}$ . Le signal est cyclostationnaire ; le graphe associé a une période M et le nombre total d'états est  $\leq M \times N$ . Le nombre d'impulsions différentes sera  $\leq r$  (les impulsions pouvant être identiques à un scalaire près).

### IV - TRANSMISSION NUMERIQUE AU MOYEN DE LA MODULATION DE PHASE -

Le signal numérique en modulation de phase se représente sous la forme suivante :

$X(t) = A \cos [2\pi f_o t + \phi(t) + \phi_o]$ ,  $\phi(t)$  représente la phase de la porteuse modulée qui transporte le message numérique.

Soit  $X(t) = A \cos \phi(t) + j A \sin \phi(t)$  le signal complexe en bande de base associé au signal  $X(t)$ .

Les calculs montrent que les densités spectrales de puissance de  $X(t)$  et de  $\hat{X}(t)$  sont liées par la relation :

$$S_X(f) = \frac{1}{4} S_{\hat{X}}(f) * [\delta(f+f_o) + \delta(f-f_o)]$$

En particulier, ce résultat s'applique à la modulation par déplacement de phase à quatre états :  $\phi(t)$  prend pendant une période une des quatre valeurs possibles  $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0, \dots, 3$ . De manière pratique, ce signal est généré à partir de deux signaux numériques binaires bande de base  $Q(t)$  et  $b(t)$ .

$X(t) = a(t) \cos(2\pi f_o t) - b(t) \sin(2\pi f_o t)$ . Il suffira d'appliquer les résultats des trois premiers chapitres à un signal numérique complexe bande de base  $a(t) + j b(t)$ .

### CONCLUSION

Nous avons énoncé dans cet article un moyen simple d'aborder le calcul de la densité spectrale de signaux codés ; nous avons pu donner une expression des divers termes de la fonction d'autocorrélation ainsi que de ceux de la densité spectrale de puissance, en particulier des raies qui peuvent apparaître dans le spectre.

Dans la plupart des cas précis d'études, le calcul exact est malaisé. Les formules énoncées sont par contre très facilement exploitables sur calculateur numérique. Toutefois, une approche critique du calcul est nécessaire : l'utilisation d'une formule plutôt que d'une autre, la mise en forme du problème, sont des facteurs importants de la simplicité des



Méthode pratique de calcul de la densité spectrale de puissance de signaux codés.

Practical evaluation method of power spectra of digital coded signals

calculs (les codages par blocs sont un exemple).

La formulation donnée ici s'applique au cas général :

- les impulsions élémentaires peuvent avoir des formes différentes,
- les impulsions élémentaires peuvent avoir une durée supérieure à T (1/T étant la fréquence numérique).

Enfin, il nous a paru utile de rappeler comment le calcul de la densité spectrale de puissance d'une porteuse numérique modulée en phase peut se faire à partir d'un signal bande de base complexe.

ANNEXE : CONSIDERATIONS SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES CHAINES DE MARKOV FINIES

Les chaînes de Markov finies discrètes considérées ici sont supposées irréductibles, c'est-à-dire composées d'états persistants. (état persistant : état tel que la probabilité que le système n'y revienne pas après en être parti est strictement nulle).

1. Chaîne de Markov périodique : Soit S l'ensemble fini des N états définissant la chaîne de Markov discrète. S peut se subdiviser en sous-ensembles S<sub>a</sub>, (a = 1, ...L), disjoints comprenant N<sub>a</sub> états que les termes de la matrice de probabilité de transition p<sub>ij</sub> vérifient les conditions : p<sub>ij</sub> ≠ 0 si et seulement si l'état (i) ∈ S<sub>a</sub> et l'état (j) ∈ S<sub>a+1</sub> où a varie de 1 à L l'indice est pris modulo L.

Une chaîne où L = 1 est dite apériodique. Pour L ≥ 2, la chaîne est dite périodique de périodicité L. La matrice de probabilité de transition P peut se représenter à l'aide des L sous-matrices P(S<sub>a</sub>, S<sub>a+1</sub>) :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & P(S_1, S_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P(S_2, S_3) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P(S_{L-1}, S_L) \\ P(S_L, S_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Chacune des sous-matrices P(S<sub>a</sub>, S<sub>a+1</sub>) a pour dimensions (N<sub>a</sub>, N<sub>a+1</sub>). On supposera ici que N<sub>a</sub> = N/L = N<sub>L</sub> (a = 1, ...L).

La notion de périodicité apparaît clairement à l'examen du graphe associé à la chaîne. On peut montrer que cette périodicité est égale au PGCD des longueurs de tous les circuits du graphe (2).

Notons quelques propriétés associées à la matrice P :

a) 
$$P^L = \begin{bmatrix} P^L(S_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P^L(S_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P^L(S_L) \end{bmatrix}$$

avec  $P^L(S_a) = P(S_a, S_{a+1}) \times P(S_{a+1}, S_{a+2}) \times \dots \times P(S_{a-1}, S_a)$ .

b) On démontre (3) que la matrice P<sup>L</sup>(S<sub>a</sub>) possède un vecteur propre gauche Q<sup>∞L</sup>(S<sub>a</sub>) associé à la valeur propre 1. On montre que le vecteur Q<sup>∞L</sup>(S<sub>a</sub>) P(S<sub>a</sub>, S<sub>a+1</sub>) est le vecteur propre gauche associé à la valeur propre 1 de la matrice P<sup>L</sup>(S<sub>a+1</sub>). Donc Q<sup>∞L</sup>(S<sub>a+1</sub>) = Q<sup>∞L</sup>(S<sub>a</sub>) P(S<sub>a</sub>, S<sub>a+1</sub>).

c) Supposons que l'on complète le vecteur Q<sup>∞L</sup>(S<sub>a</sub>), de dimension N<sub>L</sub>, par des zéros pour obtenir le vecteur Q<sup>∞</sup>(S<sub>a</sub>), de dimension N, de la façon suivante :

$$Q^\infty(S_a) = \underbrace{(0 \dots 0)}_{(a-1) N_L}, Q^{\infty L}(S_a), \underbrace{(0 \dots 0)}_{(L-a) N_L}$$

on vérifie alors la relation Q<sup>∞</sup>(S<sub>a</sub>) = P Q<sup>∞</sup>(S<sub>a-1</sub>)

2. Comportement asymptotique de la chaîne :

On se propose d'étudier le comportement de la matrice P<sup>m</sup> = P<sup>m-1</sup> x P lorsque m tend vers l'infini. Ce comportement va fortement dépendre de la périodicité. La matrice limite P<sup>∞</sup> va osciller entre L configurations, P<sub>l</sub><sup>∞</sup> étant la limite quand n tend vers l'infini de P<sup>nL+1</sup>.

On est alors conduit à définir L sous-suites P<sub>ij</sub><sup>(nL+1)</sup>, où l = 1, ...L. On démontre le théorème suivant (2) :

- Dans le cas où la chaîne est apériodique la limite de p<sub>ij</sub><sup>(n)</sup> existe quand n tend vers l'infini et elle est indépendante de i :  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$

- Dans le cas où la chaîne est périodique de période L la limite de p<sub>ij</sub><sup>(nL+1)</sup> existe, quand n tend vers l'infini, pour chaque l, la limite dépendant de l. Cette limite est non-nulle si et seulement si on a une probabilité non nulle de passer de l'état (i) à l'état (j) en un nombre de transitions égal à l modulo L (en particulier la limite de p<sub>ii</sub><sup>(nL+1)</sup> est nulle si l ≠ 0).

Dans ce second cas, on ne peut dire que p<sub>ij</sub><sup>(m)</sup> a une limite au sens habituel. On introduit alors la convergence au sens de Cesaro. On définit la suite  $\Pi_{ij}^{n+1} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L p_{ij}^{(nL+1)}$ . On démontre alors que cette suite converge au sens ordinaire vers une limite

indépendante de  $i$  (2).

On en conclut que la limite de  $p_{ij}^{(n)}$  existe quand  $n$  tend vers l'infini dans le cas où la chaîne est périodique.

3. Distribution des probabilités stationnaire :

A un instant donné, la distribution de probabilités est liée à la distribution précédente par  $Q_n = Q_{n-1}P$  et donc à une distribution initiale par  $Q_n = Q_0 P^n$ .

L'existence d'une distribution de probabilités stationnaire  $Q^\infty$  est donc liée à l'existence de la matrice  $P^\infty$  constituée des termes  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ . On a vu en 2 que cette limite existait toujours, même pour les chaînes périodiques. Cette distribution stationnaire devra vérifier :  $Q^\infty P = Q^\infty$ . Soient  $Q^{\infty L}(S_a) = (q_{a,j}^\infty)$ , l'état  $(j) \in S_a$ , et  $Q(S_a) = (p_{a,j}) = (0 \dots 0, Q^{\infty L}(S_a), 0 \dots 0)$  vecteurs lignes respectivement de dimensions  $N_L$  et  $N$ .

D'après 1 b) on constate que  $Q^{\infty L}(S_a)$  est un vecteur de probabilité stationnaire associé à  $P^L(S_a)$  et donc d'après 2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nL)} = q_{a,j}^\infty \quad i \in S_a, j \in S_a.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nL)} = p_{a,j} \quad i \in S_a - p_{a,j} \text{ est nul si l'état } (j) \notin S_a.$$

En tenant compte de 1 c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nL+1)} = p_{a+1,j} \quad i \in S_a. \quad p_{a+1,j} \text{ est nul si l'état } (j) \notin S_{a+1}.$$

Au sens de Cesaro on peut alors écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{L} \sum_{a=1}^L p_{a,j} = p_j, \text{ d'après l'expression des } p_{a,j} \text{ on remarquera que } p_j = \frac{1}{L} \times p_{\alpha_j} \text{ l'état } (j) \in S_\alpha.$$

La matrice  $P$  est donc constituée de  $N$  lignes identiques qui sont les vecteurs  $(p_j)$ . Or on a  $Q_\infty = Q_0 P^\infty$  et donc chacune des lignes est indépendante de  $Q_0$ .

D'où la procédure de calcul :

a) résoudre les systèmes  $Q^{\infty L}(S_a)(I - P^L(S_a)) = 0$  avec  $\sum_{j \in S_a} q_{a,j}^\infty = 1$  (somme constituée de  $N_L$  termes). On résoud en fait le système pour  $a = 1$  et on utilise la propriété énoncée en 1 c).

b) construire les vecteurs  $Q^\infty(S_a)$ .

c) effectuer  $\frac{1}{L} \sum_{a=1}^L Q^\infty(S_a) = Q_\infty = \frac{1}{L} (Q^{\infty L}(S_1), \dots, Q^{\infty L}(S_L))$

On vérifiera bien que  $Q_\infty P = Q_\infty$ .

BIBLIOGRAPHIE

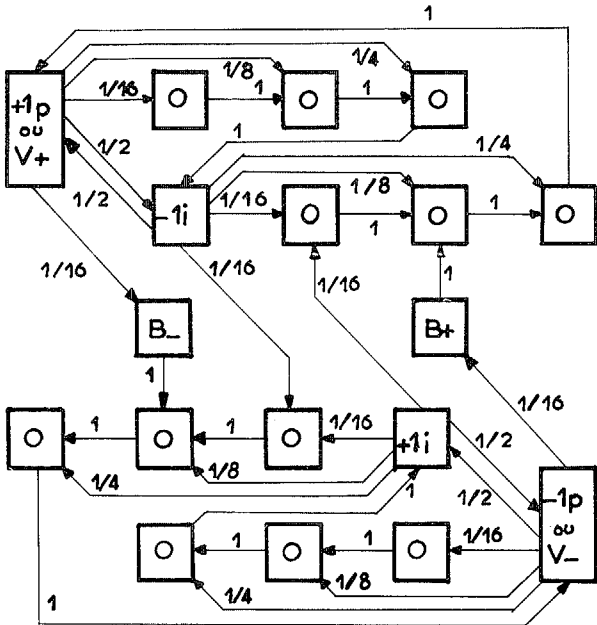
- (1) J. STERN, J. de BARBEYRAC, R. POGGI : "Méthodes pratiques d'étude des fonctions aléatoires", Dunod.
- (2) P. GORDON : "Théorie des chaînes de Markov finies et ses applications", Dunod.
- (3) S. KARLIN : "A first course in stochastic processes", Academic Press.
- (4) BENNETT : "Statistics of regenerative digital transmission", B.S.T.J. Novembre 1958.
- (5) P. DESOMBRE : "Calcul du spectre de puissance d'un signal par la méthode des graphes", Câbles et Transmission, Vol. 27, n° 1 Janvier 73.
- (6) A. FALCOZ, A. CROISIER : "Le code bipolaire à haute densité : un procédé de transmission en bande de base", Colloque de Téléinformatique, Paris 1969.
- (7) J.P. SIPRESS : "A new class of selected ternary pulse transmission plans for digital transmissions lines", I.E.E.E. Trans. on Communication Technology, Sept. 69.



EXEMPLES :

1) SIGNAL "REGULIER" : CODE HDB 3 (6)

GRAPHE

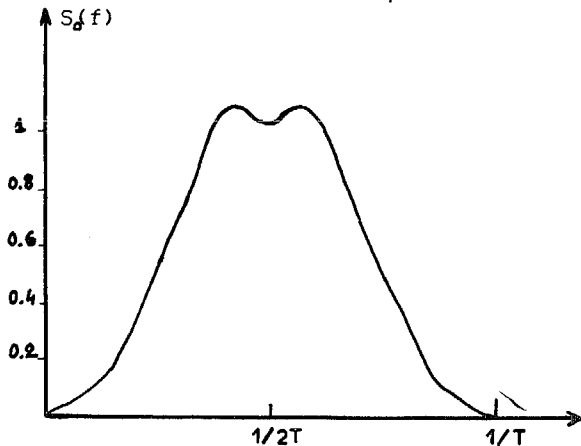


FONCTION D'AUTOCORRELATION

- R(0T) = 0.5506
- R(1T) = -0.2839
- R(2T) = 0.0080
- R(3T) = 0.0169
- R(4T) = -0.0110
- R(5T) = 0.0165
- R(6T) = -0.0096
- R(7T) = -0.0015
- R(8T) = 0.0000
- R(9T) = -0.0012

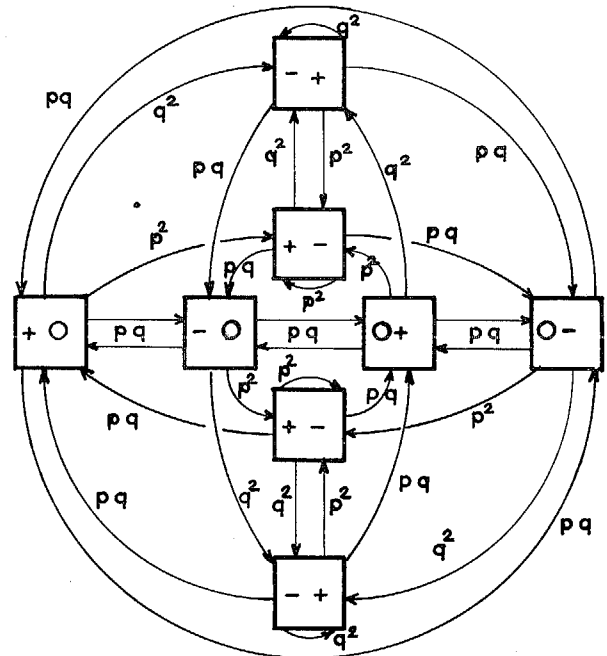
DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE

$S(f) = |X(f)|^2 S_0(f)$  (X(f) : trans. Fourier de l'imp. elementaire)

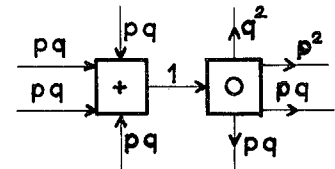


2) CODAGE PAR BLOC : CODE PST (7)

GRAPHE APERIODIQUE AVEC ETATS DOUBLES .



Decomposition de l'état +0:



FONCTION D'AUTOCORRELATION

- R(0T) = 0.7600
- R(1T) = -0.3088
- R(2T) = -0.0176
- R(3T) = -0.0700
- R(4T) = 0.0377
- R(5T) = -0.0412
- R(6T) = 0.0399
- R(7T) = -0.0400
- R(8T) = 0.0400
- R(9T) = -0.0400

DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE

( p = 0,4 ; q = 0,6 ; impulsions NRZ )

