

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



METHODES DE CALCUL NUMERIQUE DE PROBABILITE
DE DETECTION DE SIGNAUX FLUCTUANTS.

P. BLONDY - G. THOUVENEL - C. GERDY

ELECTRONIQUE MARCEL DASSAULT - 55 quai Carnot - SAINT-CLOUD

RESUME

Les réseaux d'abaques de Marcum Swerling ne permettent pas de calculer la probabilité de détection dans des cas de fluctuation intermédiaires entre les cas I et II de Swerling, c'est-à-dire de décorrélation partielle entre échantillons due, soit au spectre de fluctuation propre de la cible, soit à l'emploi de techniques de décorrélation comme l'agilité ou la diversité de fréquence.

On peut montrer que, dans ces cas, la méthode de l'intégration de la série de Gram Charlier et groupement en série d'Edgeworth converge difficilement et ceci d'autant plus que le cas étudié est voisin du cas I.

La fonction caractéristique de la distribution de sortie s'exprimant facilement en fonction des valeurs propres de la matrice de covariance des échantillons, deux méthodes ont été essayées pour calculer la probabilité de détection :

- inversion de la fonction caractéristique par F. F. T.
La méthode donne de bons résultats dans tous les cas.
- calcul direct par la méthode des résidus.
La méthode donne de bons résultats pour des nombres d'échantillons faibles (< 15). Elle devient rapidement inutilisable pour des nombres d'échantillons plus élevés à cause des problèmes de précision de calcul sur ordinateur.

SUMMARY

Marcum and Swerling curves do not allow estimation of the detection probability in cases intermediate to Swerling cases I and II, in which partial decorrelation occurs between pulses, due to target fluctuations during integration time or use of special decorrelation techniques such as frequency agility or diversity.

It can be shown that in these cases, and especially when the investigated case is close to Swerling case I, integrating the Gram Charlier series for the integrator output distribution and grouping in Edgeworth terms gives poor numerical approximation, due to convergence difficulties.

The characteristic function of the integrator output being easily expressed as a function of the eigenvalues of the in phase or quadrature samples covariance matrix, two methods of computing the detection probability have been investigated :

- characteristic function inversion using Fast Fourier Transform ; this method gives good result in all cases.
- direct computation using residues method.
The results are excellent as long as the number of integrated pulses remains small (less than 15). They become quickly insignificant when the number of integrated pulses grows to higher value, due to round off errors in the numerical process.



METHODES DE CALCUL NUMERIQUE DE PROBABILITE
DE DETECTION DE SIGNAUX FLUCTUANTS

I - INTRODUCTION

L'évaluation des performances de radars modernes utilisant des techniques de décorrélation d'écho de cible nécessite une méthode de calcul de la probabilité de détection dans des cas de décorrélation partielle intermédiaires entre les cas I et II de SWERLING. La fonction caractéristique de la sortie de l'intégrateur parfait après détecteur quadratique s'exprimant facilement en fonction des valeurs propres de la matrice de covariance, différentes méthodes de calcul de la probabilité de détection sont envisagées avec leurs avantages et limitations.

II - CALCUL DE LA FONCTION CARACTERIS-
TIQUE DE L'ECHANTILLON DE SORTIE DE
L'INTEGRATEUR

Suivant l'hypothèse de RICE, chaque élément d'information se compose d'un échantillon en phase $x_i = s_i + b_i$ et d'un échantillon en quadrature $x_{qi} = s_{qi} + b_{qi}$; s , b , s_q et b_q sont les contributions du signal et du bruit sur les voies en phase et en quadrature.

Le détecteur quadratique effectue l'opération $e_i^2 = x_i^2 + x_{qi}^2$ et l'intégrateur parfait $\sum = \sum_{i=1}^N e_i^2$, N étant le nombre d'éléments d'information intégrés.

Par hypothèse, les s_i , b_i , s_{qi} et b_{qi} sont des variables aléatoires Gaussiennes, centrées, présentant les propriétés d'indépendance habituelles entre échantillons de signal et de bruit, soit pour tout i et j :

$$E\{s_i s_{qj}\} = E\{s_i b_j\} = E\{s_{qj} b_j\} =$$

$$E\{s_i b_{qj}\} = E\{s_{qi} b_j\} = E\{b_i b_{qj}\} = 0$$

$$E\{b_i b_j\} = E\{b_{qi} b_{qj}\} = 0 \quad i \neq j$$

Définissons les vecteurs colonnes de taille N

$$S = (s_i); S_q = (s_{qi}); B = (b_i); B_q = (b_{qi}); X = (x_i); X_q = (x_{qi})$$

et notons C la matrice de covariance des échantillons d'une voie (x_i) ou (x_{qi})

$$C = E\{X X^T\} = E\{X_q X_q^T\}$$

Avec les notations précédentes, l'échantillon de sortie \sum de l'intégrateur s'écrit $\sum = X^T X + X_q^T X_q$

C est une matrice de covariance. Elle est donc symétrique positive semi définie; il existe donc une transformation unitaire $U^T C U$ qui la diagonalise $U^T C U = [\lambda]$, U étant une matrice unitaire et $[\lambda]$ la matrice des valeurs propres $\lambda_i \geq 0$ de C . Formons les vecteurs $Y = U^T X$ et $Y_q = U^T X_q$ et calculons leurs matrices de covariance.

$$E\{Y Y^T\} = E\{Y_q Y_q^T\} = E\{U^T X X^T U\} = U^T C U = [\lambda]$$

Les y_i et y_{qi} sont donc des variables aléatoires gaussiennes centrées, indépendantes, de variance λ_i .

Exprimons \sum en fonction de Y et Y_q :

$$\begin{aligned} \sum &= X^T X + X_q^T X_q = X^T U U^T X + X_q^T U U^T X_q \\ &= Y^T Y + Y_q^T Y_q \\ &= \sum_{i=1}^N y_i^2 + y_{qi}^2 \end{aligned}$$

\sum est donc la somme des carrés de $2N$ variables aléatoires gaussiennes indépendantes de puissance égales aux valeurs propres λ_i de C .

\sum a donc comme fonction caractéristique :

$$\Phi_{\sum}(u) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - 2ju\lambda_i}$$

Application aux cas I et II de SWERLING et inter-
médiaires.

Afin de retrouver les résultats de SWERLING, posons

$E\{b_i^2\} = E\{b_{qi}^2\} = \frac{1}{2}$, notons \bar{X} le rapport signal/bruit moyen et R la matrice de corrélation des échantillons d'une voie de signal seul.

La matrice de covariance C s'exprime en fonction de R par $C = \frac{1}{2} (I + XR)$ et si μ est une valeur propre de

R , alors $\lambda = \frac{1}{2} (1 + X\mu)$ est une valeur propre de C .

Dans le cas I de SWERLING, tous les éléments de R sont égaux à 1 et R présente comme valeur propre 0 d'ordre $N-1$ et N d'ordre 1. Les valeurs propres de C sont donc $\frac{1}{2}$ d'ordre $N-1$ et $\frac{1 + N\bar{X}}{2}$ d'ordre 1.



METHODES DE CALCUL NUMERIQUE DE PROBABILITE
DE DETECTION DE SIGNAUX FLUCTUANTS

La fonction caractéristique de \sum s'écrit donc :

$$\Phi_{\sum}(u) = \frac{1}{(1 - ju)^{N-1} \cdot (1 - (1 + N\bar{X})ju)}$$

Dans le cas II, R est la matrice unité de valeur propre 1 d'ordre N. Les valeurs propres de C sont donc $\frac{1}{2}(1 + X)$ d'ordre N et $\frac{1}{2}$

la fonction caractéristique s'écrit :

$$\Phi_{\sum}(u) = \frac{1}{(1 - (1 + \bar{X})ju)^N}$$

Remarquons que la localisation des valeurs propres de C sur la ligne réelle suggère une méthode de juger de la "proximité" d'un cas de décorrélation de cible des cas type I ou II ; la proximité du cas I se traduit par une migration de N-1 valeurs propres de R vers la valeur 0 et de la Nième vers la valeur N, tandis que la proximité du cas II se traduit par une concentration de toutes les valeurs propres autour de la valeur un.

Application de la méthode des valeurs propres à une modulation d'amplitude du signal utile dans le cas I.

Plaçons-nous dans le cas I où tous les échantillons de signal sont parfaitement corrélés et faisons subir une modulation d'amplitude au signal de manière à pondérer chaque échantillon de signal (x_i, x_{qi}) par une valeur α_i . Soit \bar{X} le rapport signal bruit correspondant à la valeur de α unité.

La matrice C s'écrit alors :

$$C = \frac{1}{2} \left(I + \bar{X} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 & & \alpha_1 \alpha_N \\ & \alpha_1 \alpha_2 & & \\ & & & \\ \alpha_1 \alpha_N & & & \alpha_N^2 \end{pmatrix} \right)$$

qui a comme valeur propre $\frac{1}{2}$ d'ordre N-1 et

$$\frac{1}{2} (1 + \bar{X} \sum \alpha_i^2).$$

Ces valeurs propres sont les mêmes que celles qu'aurait donné, dans le cas I, un rapport signal sur bruit $\bar{X}_{eq} = \bar{X} \cdot \frac{\sum \alpha_i^2}{N}$, moyenne du rapport signal bruit des échantillons.

On peut définir alors une "perte" par :

$$\delta = 10 \times \log \frac{\bar{X}_{eq}}{\bar{X}} = 10 \log \frac{\sum \alpha_i^2}{N}$$

Ce résultat n'est pas valable pour le cas II.

III - METHODES DE CALCUL NUMERIQUE POUR CALCULER LA PROBABILITE DE DETECTION

3.1. Etude du comportement de la série d'EDGEWORTH

On montre que si la statistique $p(z)$ de l'échantillon de sortie ne s'écarte pas trop de celle de GAUSS, on peut exprimer la probabilité de détection $P_d = \int_{Y_B}^{\infty} P(z) dz$ par une série :

$$P_d = \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{Y_B - \bar{z}}{\sigma} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Y_B - \bar{z})^2}{2\sigma^2}} \times \sum_{i=0}^{\infty} C_i H_{i-1} \left(\frac{Y_B - \bar{z}}{\sigma} \right)$$

\bar{z} et σ étant la moyenne et l'écart type de l'échantillon de sortie, H_i le polynôme d'Hermite d'ordre i et les C_i des coefficients s'exprimant en fonction des cumulants de la distribution $p(z)$; on montre que $C_0 = 1, C_1 = C_2 = 0$.

Le premier terme à prendre en compte est le troisième et Edgeworth a montré que les contributions de même ordre étaient obtenues en groupant les termes de la manière suivante : $i = 0$, puis $i = 3, i = 4, 6, i = 5, 7, 9$.

On trouve, dans la littérature, l'expression des C_i en fonction des cumulants :

$$C_3 = -\frac{1}{3!} \frac{\chi_3}{\chi_2^{3/2}} ; C_4 = \frac{1}{4!} \frac{\chi_4}{\chi_2^2} ; C_5 = -\frac{1}{5!} \frac{\chi_5}{\chi_2^{5/2}}$$

$$C_6 = \frac{1}{6!} \frac{\chi_6 + 10\chi_3^2}{\chi_2^3} ; C_7 = -\frac{1}{7!} \frac{(\chi_7 + 35\chi_4\chi_3)}{\chi_2^{7/2}}$$

$$C_9 = -\frac{1}{9!} (\chi_9 + 84\chi_6\chi_3 + 125\chi_5\chi_4 + 280\chi_3^3)$$

Pour exprimer les cumulants en fonction des valeurs propres de la matrice de covariance, développons la deuxième fonction caractéristique en puissance de

$$\frac{(ju)^2}{\lambda!}$$

METHODES DE CALCUL NUMERIQUE DE PROBABILITE
DE DETECTION DE SIGNAUX FLUCTUANTS

$$\psi_{\Sigma}(u) = \text{Log } \phi_{\Sigma}(u) = \sum_{i=1}^N \text{Log } \frac{1}{1 - 2^i u \lambda_i}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(u)^r}{r!} (r-1)! 2^r \sum_{i=1}^N \lambda_i^r$$

On en tire le cumulatif d'ordre r

$$x_r = (r-1)! 2^r \sum_{i=1}^N \lambda_i^r$$

Mais $\sum_{i=1}^N \lambda_i^r$ est la trace T_r de la

puissance r-ème de la matrice de co-
variance C. On en tire donc :

$\lambda_i^{r-1} T_r$ et en reportant dans l'expres-
sion des coefficients C_i .

$$C_0 = 1, C_1 = C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{1}{3} \frac{T_3}{T_2^{3/2}} ; C_4 = \frac{1}{4} \frac{T_4}{T_2^2} ; C_5 = -\frac{1}{5} \frac{T_5}{T_2^{5/2}}$$

$$C_6 = \frac{1}{T_2^3} \left(\frac{T_6}{6} + \frac{T_3^2}{18} \right) ; C_7 = -\frac{1}{T_2^{7/2}} \left(\frac{T_7}{7} + \frac{T_4 T_3}{12} \right)$$

$$C_9 = -\frac{1}{T_2^{9/2}} \left(\frac{T_9}{9} + \frac{T_6 T_3}{18} + \frac{T_5 T_4}{20} + \frac{T_3^3}{16 \cdot 2} \right)$$

Un programme a été écrit afin de tra-
duire numériquement ces relations et
tester la méthode dans certains cas
particuliers connus. Les résultats ont
été mauvais et ceci d'autant plus que le
cas étudié était proche du cas I de
SWERLING.

Il est possible d'analyser plus préci-
sément le comportement de la série
dans ce cas particulier.

Les valeurs propres sont alors $\frac{1}{2}$ d'ordre

$N-1$ et $\frac{1+NX}{2}$ d'ordre 1 et la trace T_r

vaut $\frac{N-1}{2^r} + \frac{(1+NX)^r}{2^r}$ qui, pour N suffi-

samment grand, se comporte comme

$$\frac{(1+NX)^r}{2}$$

Le coefficient C_r se comporte alors
comme :

$$\frac{(-1)^r}{2} \frac{T_r}{\frac{1}{2}^r} = (-1)^r \cdot \frac{1}{2}$$

D'autre part, C_r est appliqué à la valeur
prise par le polynôme d'Hermite d'ordre
r-1 pour une combinaison linéaire du
seuil $Z_B = \frac{Y_B - \bar{Z}}{\sigma} = \frac{Y_B - 2T_1}{2\sqrt{T_2}}$

Or, on trouve que pour une valeur de
 $Z_B > 2$, $H_{r-1}(Z_B)$ croît plus vite que
 $(r-1)^3$.

Dans ces conditions, en fonction de r, on
trouve que le terme de rang r de la série
croît plus vite que $(-1)^r r^2$. La série ne
peut donc converger.

3.2. Inversion de la fonction caractéristique par F. F. T.

En fonction de la fonction caractéristique, la
densité de probabilité $p(z)$ de

s'exprime par :

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\Sigma}(u) e^{-juz} du$$

$$= \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^{\infty} \phi_{\Sigma}(u) e^{-juz} du$$

En discrétisant cette intégrale avec un
pas Δ , il vient :

$$p(z) = \frac{\Delta}{\pi} \text{Re} \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{\Sigma}(i\Delta) e^{-jiz\Delta}$$

Soit K le nombre d'échantillons espacés
de Δ de la fonction caractéristique.

L'algorithme de F. F. T. fait apparaître
K quantités

$$g_{\ell} = \sum_{i=0}^K \phi_{\Sigma}(i\Delta) e^{-\frac{2j\pi}{K} \ell i} \quad 1 \leq \ell \leq K$$

En appliquant l'algorithme, on peut donc
faire apparaître K points de la densité

$$p\left(\ell \cdot \frac{2\pi}{K\Delta}\right) = \frac{\Delta}{\pi} \text{Re}(g_{\ell}) \quad \text{c'est-à-dire}$$

K points situés entre $z = 0$ et $z = \frac{2\pi}{\Delta}$

En fait, dans l'algorithme de F. F. T. seuls
 $\frac{K}{2}$ échantillons du résultat sont signifi-

catifs.



METHODES DE CALCUL NUMERIQUE DE PROBABILITE
DE DETECTION DE SIGNAUX FLUCTUANTS

Si donc l'on s'intéresse à un domaine (O, D) de variation de z pour p(z), il convient donc de prendre $\frac{\pi}{\Delta} = D$ soit :

$$\Delta = \frac{\pi}{D}$$

Si K est le nombre total des échantillons, les échantillons de p(z) seront donc espacés du pas $\frac{D}{K}$.

Dans notre cas particulier, nous nous intéressons en fait à un domaine de variation de z ne commençant pas à zéro, mais centré sur la moyenne $\bar{\Sigma}$ et d'étendue $\pm 6 \sigma_{\Sigma}$.

Il suffit donc de décaler p(z) vers la gauche de $\bar{\Sigma} - 6\sigma_{\Sigma}$, ce qui revient dans le calcul à multiplier $\phi(u)$ par

$$\exp(-j(\bar{\Sigma} - 6\sigma_{\Sigma}))$$

K a été pris de 2048 et Δ est choisi en fonction de σ_{Σ} par

$$\Delta = \frac{\pi}{12\sigma_{\Sigma}}$$

$\bar{\Sigma}$ et σ_{Σ} sont calculés à partir des valeurs propres par

$$\bar{\Sigma} = 2 \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i, \quad \sigma_{\Sigma} = 2 \sqrt{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2}$$

On obtient donc ainsi 1024 échantillons de la densité de probabilité de p(z) correspondant aux 1024 points.

$$z = \bar{\Sigma} - 6\sigma_{\Sigma} + k \frac{12\sigma_{\Sigma}}{1024}$$

k variant de 1 à 1024

On en tire alors la cumulative par simple sommation des échantillons de la densité et la probabilité de dépassement d'un seuil par interpolation entre deux échantillons et complémentation à 1. Le programme de calcul correspondant à cette méthode a été testé sur des distributions tabulées du type X^2 à 2N degrés de liberté, N variant de 1 à 100.

Les résultats obtenus avec un échantillonnage de 2048 points ont été très satisfaisants :

Dans le cas le plus difficile, c'est-à-dire le X^2 à 2 degrés de liberté où la densité présente une discontinuité à l'origine, la précision obtenue est de l'ordre de quelques unités de la troisième décimale. Cette précision s'accroît à mesure que la distribution étudiée tend vers GAUSS. Dans le cas du problème considéré où l'on étudie des cas intermédiaires aux cas I et II de Swerling, le plus petit nombre de degrés de liberté de la distribution étudiée est de 2 (N=1). La précision obtenue est donc généralement meilleure que quelques unités de la troisième décimale.

Avec un échantillonnage plus serré, il serait possible d'accroître encore la précision, mais ce gain de précision est linéaire en fonction du nombre d'échantillons.

Il est donc apparu qu'un échantillonnage à 2048 points permettait d'atteindre une précision suffisante avec un temps de calcul raisonnable.

Enfin, un dernier avantage et non des moindres, de la méthode du F.F.T. est de donner en un seul passage la cumulative complète de la distribution, autorisant à moindre frais le calcul de la probabilité de détection pour différents seuils (mais pour une seule valeur de \bar{X}).

3.3. Méthode de l'inversion de la fonction caractéristique par la méthode des résidus

On montre facilement que la probabilité de détection Pd s'exprime en fonction des résidus Ri de la fonction $\Phi(u) = \frac{\phi_x(u) e^{ju\bar{X}}}{ju}$

aux poles $\frac{1}{2j\lambda_i}$ de la fonction caractéristique

suivant l'expression :

$$Pd = -j \sum_i R_i$$

METHODES DE CALCUL NUMERIQUE DE PROBABILITE DE DETECTION DE SIGNAUX FLUCTUANTS

Cas d'un pole simple.

Soit λ_i une valeur propre simple de la matrice de covariance, le résidu correspondant est donné par l'expression :

$$R_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_i}} \right) e^{-\gamma_B / 2\lambda_i}$$

Cas d'un pole multiple.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres d'ordre $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ de la matrice de covariance, $\frac{1}{2j\lambda_1}, \frac{1}{2j\lambda_2}, \dots, \frac{1}{2j\lambda_p}$ les poles

correspondants de $\Phi_Z(u)$
Soit $G_i(u)$ la fonction définie par
 $G_i(u) = \left(u - \frac{1}{2j\lambda_i} \right)^{\alpha_i} \Phi(u)$

R_i est donné par l'expression :

$$R_i = \frac{1}{(\alpha_i - 1)!} G_i^{(\alpha_i - 1)} \left(\frac{1}{2j\lambda_i} \right)$$

Le calcul direct de $G_i^{(\alpha_i - 1)}(u)$ est trop complexe. On peut cependant utiliser une méthode de progression "en échelle" sur ordinateur qui permet de calculer les dérivées successives de G_i et de $\frac{1}{G_i}$

la valeur voulue de u en fonction des dérivées logarithmiques successives de G_i .

Pour ce faire :

On calcule d'abord les dérivées logarithmiques de G_i pour la valeur $\frac{1}{2j\lambda_i}$

jusqu'à l'ordre α_{i-1} par les expressions :

$$\left. \frac{d \text{Log} G_i}{du} \right|_{u = \frac{1}{2j\lambda_i}} = -j\gamma_B - 2j\lambda_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^P \alpha_k \frac{2j\lambda_k}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_i}}$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^m \text{Log} G_i}{du^m} \right|_{u = \frac{1}{2j\lambda_i}} = (-1)^m (2j\lambda_i)^m + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^P \alpha_k \left(\frac{2j\lambda_k}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_i}} \right)^m$$

Puis on en tire successivement $\frac{G_i^{(m)}}{(m-1)!}$ et $\frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{1}{G_i} \right)^{(m)}$ par les

expressions :

$$\frac{G_i^{(m)}}{(m-1)!} = G_i \left[\frac{d^m \text{Log} G_i}{du^m} - \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l} \left(\frac{1}{G_i} \right)^{(l)} \frac{G_i^{(m-l)}}{(m-l-1)!} \right]$$

$$\left(\frac{1}{G_i} \right)^{(m)} = \frac{1}{G_i} \left[- \frac{d^m \text{Log} G_i}{du^m} + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l} \left(\frac{1}{G_i} \right)^{(l)} \frac{1}{(m-l-1)!} \right]$$

jusqu'à l'ordre α_{i-1} .

Résultats d'exploitation

Un programme de calcul sur ordinateur a été écrit pour mettre en oeuvre cette méthode sur des distributions du type X^2 à $2N$ degrés de liberté. Les calculs étaient effectués en double précision. La comparaison avec les résultats tabulés a mis en évidence :

- que pour des valeurs de N relativement faibles ($N < 15$), la précision est remarquable et atteint quelques unités de la sixième décimale,
- que pour des valeurs de N plus grandes, les résultats deviennent rapidement inutilisables.

Afin d'expliquer cette constatation, les intermédiaires de calcul permettant d'aboutir au résidu ont été examinés avec attention.

Il apparaît alors qu'un certain nombre de grandeurs interviennent à des puissances égales au nombre des valeurs propres.

Dans ces conditions, les calculs mettent en jeu des nombres soit rapidement énormes, soit tout petits, qui font perdre toute précision sur les calculs effectués. La méthode du calcul de la probabilité de détection par la méthode des résidus ne doit donc être utilisée qu'avec de grandes précautions et pour des valeurs de N faibles. En règle générale, la précision qu'elle permet d'atteindre - quand elle converge - est superflue ; il est donc préférable d'utiliser la méthode par F. F. T.