

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



DEMODULATION DE PHASE ET FILTRAGE NON LINEARE

G. ALENGRIN

Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du C.N.R.S.  
7, Avenue du Colonel Roche - 31400 TOULOUSE - FRANCE

## RESUME

Le problème de la démodulation de phase pour un signal bruité a été envisagé depuis peu, sous l'angle de la théorie du filtrage non linéaire. A une représentation gaussienne-markovienne de la phase ont aussi été associées des équations d'observations non-linéaires en sinus et cosinus.

Le problème est étudié sous son aspect probabiliste qui nécessite la description de la densité de probabilité conditionnelle connaissant les observations bruitées.

Dans une première partie on décrira plusieurs méthodes permettant de donner une approximation de cette densité de probabilité.

On proposera ensuite une nouvelle méthode basée sur un développement en série des coefficients de Fourier de la densité de probabilité périodique.

Cette solution conduit à un algorithme qui nécessite à chaque nouvelle mesure la remise à jour d'un petit nombre de paramètres significatifs.

Une comparaison des résultats de cet algorithme avec d'autres méthodes existantes sera donnée.

## SUMMARY

The phase demodulation of a noisy signal has been recently considered from the point of view of non linear filtering theory. Non linear observation equations in sine and cosine have been associated with a gauss-markov representation of the phase.

The probabilistic point of view has been adopted and needs a description of the conditional probability density given noisy observations.

In the first part we describe several methods of approximating the probability density. Then we propose a new method involving a series expansion of Fourier coefficients of the periodic probability density.

This solution leads to an algorithm involving the updating of a few number of significant parameters at each iteration.

A comparison of our results with other methods is given.



## DEMODULATION DE PHASE ET FILTRAGE NON LINEAIRE

### INTRODUCTION :

Le problème de la démodulation de phase d'un signal bruité a reçu une solution particulièrement élégante à l'aide du dispositif appelé "boucle à verrouillage de phase".

Les travaux de VITERBI [1] notamment ont permis d'analyser l'erreur d'estimation de cette boucle en présence de bruits.

On montre [2 - 3], que le régime permanent de ce dispositif correspond à l'application d'un filtre de Kalman étendu au problème linéarisé.

Le filtre correspondant se présente sous une forme analogue à celle du filtre de Kalman-Bucy en régime stationnaire (filtre de Wiener), c'est-à-dire qu'il a un gain constant, seules les fonctions de l'estimateur de la phase sont non linéaires en sinus et cosinus.

Pour obtenir un dispositif permettant de traiter les observations avec un gain variable, on doit faire appel à la théorie du filtrage non linéaire, qui permet de tenir compte des non linéarités des fonctions de mesure.

Durant ces dernières années, BUCY et ses collaborateurs [4], [5] ont ainsi développé des méthodes de filtrage non linéaire pour la démodulation de phase.

La solution optimale à ce problème est donnée par la densité de probabilité conditionnelle de la phase connaissant la suite des observations. Mais cette solution nécessite la remise à jour de la densité de probabilité à chaque nouvelle observation, et, cette densité devant être représentée par un grand nombre de paramètres (méthode de discrétisation par exemple), ceci conduit à un volume de calculs important.

Diverses méthodes d'approximation, cherchant à représenter la densité de probabilité par un nombre réduit de paramètres, ont été développées [6].

Parallèlement, BUCY, tenant compte de la périodicité du problème, étudiait la densité de probabilité périodique de la phase modulo  $2\pi$  [7]. Cette

densité périodique peut être développée en série de Fourier, chaque coefficient de Fourier étant calculé par une relation de convolution discrète faisant intervenir tous les coefficients de Fourier de l'observation précédente.

Nous proposons ici une méthode permettant d'exprimer les différents coefficients de Fourier en fonction d'un nombre fini de fonctions de Bessel modifiées. Cette méthode présente également l'avantage de conserver une erreur de troncature constante tout au long de l'algorithme d'estimation.

### POSITION DU PROBLEME

On considère un signal  $x(t)$  que l'on reçoit dans deux canaux différents suivant les relations :

$$z_1(t) = \cos(x(t)) + w_1(t)$$

$$z_2(t) = \sin(x(t)) + w_2(t)$$

$w_1(t)$  et  $w_2(t)$  sont des bruits blancs gaussiens indépendants. On étudiera le problème d'estimation d'une phase aléatoire représentée par l'équation

$$dx = d\beta$$

$\beta$  est un mouvement brownien défini par :

$$E(d\beta) = 0 \quad E(d\beta^2) = q dt$$

On considèrera le problème sous la forme discrétisée définie par les équations ci-dessous :

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = x_n + u_n \\ z_n^1 = \cos x_n + v_n^1 \\ z_n^2 = \sin x_n + v_n^2 \end{cases}$$

$\{u_n\}$ ,  $\{v_n^1\}$  et  $\{v_n^2\}$  sont des séquences de bruits blancs gaussiens discrets, à moyennes nulles et telles que  $E[u_n u_m] = B \delta_{nm}$  avec  $B = q\Delta$ ,  $\Delta$  représente le pas de discrétisation et

$$E[v_n^1 v_m^r] = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \delta_{mn} \quad \text{avec } v_n = \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \end{pmatrix}$$

On suppose de plus que les bruits  $\{u_n\}$  et  $\{v_n\}$  sont indépendants.

### DENSITE DE PROBABILITE CONDITIONNELLE

On désignera par  $J_{n/n}(x/z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$  la densité de probabilité conditionnelle de la phase à l'instant  $t_n$  connaissant la suite de mesure  $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n\}$ ,  $z_n$  représentant le vecteur  $\begin{pmatrix} z_n^1 \\ z_n^2 \end{pmatrix}$ .

Cette quantité sera calculée à partir de la densité de probabilité à l'instant  $t_n$  connaissant les



mesures  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  (probabilité de prédiction à un pas) par application du théorème de Bayes

$$(2) J_{n|n}(\alpha | z_0, z_1, \dots, z_n) = K_1 e^{-\frac{1}{2c} [(z_n^1 - \cos \alpha)^2 + (z_n^2 - \sin \alpha)^2]} \cdot J_{n|n-1}(\alpha | z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$$

De plus  $J_{n/n}(x/\dots)$  sera calculée à partir de l'équation de convolution

$$(3) J_{n|n-1}(\alpha | z_0, \dots, z_{n-1}) = K_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\alpha - \xi)^2}{2B}} \cdot J_{n-1|n-1}(\xi | z_0, \dots, z_{n-1}) d\xi$$

$K_1$  et  $K_2$  sont des constantes de normalisation.

Ce problème a ensuite été transformé en tenant compte de la périodicité de la phase [2]. On définit une densité de probabilité périodique par :

$$(4) \tilde{J}_n(\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_n(\alpha + 2\pi m)$$

on obtient alors :

$$\tilde{J}_{n+1|n}(\alpha | z_0, \dots, z_n) = K \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\alpha + 2\pi m - \xi)^2}{2B}} e^{-\frac{1}{2c} [(z_n^1 - \cos \xi)^2 + (z_n^2 - \sin \xi)^2]} \cdot J_{n|n-1}(\xi | z_0, \dots, z_{n-1}) d\xi$$

Si l'on pose  $y = \xi - 2\pi m$  on obtient :

$$(5) \tilde{J}_{n+1|n}(\alpha | z_0, \dots, z_n) = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\alpha - y)^2}{2B}} e^{-\frac{1}{2c} [(z_n^1 - \cos y)^2 + (z_n^2 - \sin y)^2]} \tilde{J}_{n|n-1}(y | z_0, \dots, z_{n-1}) dy$$

On remarque que cette expression a tous ses termes périodiques sauf le terme  $e^{-\frac{(\alpha - y)^2}{2B}}$ . On réduira l'intervalle d'intégration à  $[-\pi, +\pi]$  en "enroulant" cette fonction gaussienne sur un cercle de rayon  $\frac{1}{\sqrt{2\pi B}}$  unité. Ainsi, en définissant  $Q(\alpha - y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} e^{-\frac{(\alpha - y)^2}{2B}}$  on aura le terme périodique :

$$(6) \tilde{Q}(\alpha - y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} Q(\alpha - y + 2\pi p)$$

et la densité de probabilité périodique sera calculée par :

$$(7) \tilde{J}_{n+1|n}(\alpha | z_0, \dots, z_n) = K' \int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{Q}(\alpha - y) e^{-\frac{1}{2c} [(z_n^1 - \cos y)^2 + (z_n^2 - \sin y)^2]} \tilde{J}_{n|n-1}(y | z_0, \dots, z_{n-1}) dy$$

**COEFFICIENTS DE FOURIER DE LA DENSITE DE PROBABILITE**

A l'instant  $t_n$ , le coefficient de Fourier complexe d'ordre l sera défini par :

$$(8) a_l^{n/n} = \int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{J}_{n|n}(\alpha | z_0, \dots, z_n) e^{-il\alpha} d\alpha$$

On remarquera que l'on peut mettre le terme (6) sous la forme :

$$(9) \tilde{Q}(\alpha - y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Bu^2}{2}} e^{iu(\alpha - y)} e^{-\frac{1}{2c} [(z_n^1 - \cos y)^2 + (z_n^2 - \sin y)^2]}$$

et que le terme  $e^{-\frac{1}{2c} [(z_n^1 - \cos y)^2 + (z_n^2 - \sin y)^2]}$  s'écrit

$$e^{-\frac{1}{2c} [(z_n^1)^2 + (z_n^2)^2 + 1]} e^{\frac{z_n^1 \cos y + z_n^2 \sin y}{c}}$$

soit en définissant :  $\frac{z_n^1}{c} + i \frac{z_n^2}{c} = V_n e^{i\psi_n}$

on obtiendra :  $K_3 e^{V_n \cos(y - \psi_n)}$

qui peut encore se mettre sous forme d'une somme infinie :

$$(10) K_3 e^{V_n \cos(y - \psi_n)} = K_3 \sum_{r=-\infty}^{+\infty} I_r(V_n) e^{ir(y - \psi_n)}$$

$I_r(V_n)$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre r [8].

En reportant ces différents résultats dans la relation (7) on obtient une relation de récurrence pour les coefficients de Fourier [2]

$$(11) a_l^{n+1/n} = \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Bp^2}{2}} I_{l-p}(V_n) e^{-i(l-p)\psi_n} a_p^{n|n-1}}{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{-p}(V_n) e^{ip\psi_n} a_p^{n|n-1}}$$

Nous proposons ici une démonstration faisant apparaître les deux phases du filtrage : prédiction à un pas et recalage. De plus, ceci permet de mettre en évidence les équations de passage entre densité de probabilité et coefficients de Fourier.

Considérons tout d'abord l'évolution de la densité de probabilité entre deux observations, elle obéit à l'équation :

$$\tilde{J}_{n+1|n}(\alpha | z_0, \dots, z_n) = K \int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{Q}(\alpha - y) \tilde{J}_{n|n}(y) dy$$

Cette équation est une opération de convolution, qui présente des inconvénients de mise en oeuvre sur le plan numérique. Mais on remarque qu'en prenant la transformée de Fourier, cette opération se traduira par une simple multiplication.

Déterminons alors :

$$a_l^{n+1/n} = \int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{J}_{n+1|n}(\alpha | z_0, \dots, z_n) e^{-il\alpha} d\alpha$$

on obtient :

$$a_l^{n+1/n} = K' \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Bu^2}{2}} e^{iu(\alpha - y)} e^{-il\alpha} a_p^{n|n-1} e^{ipy} dy d\alpha$$

l'intégrale relative à y donne :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-iyu} e^{ipy} dy = 2\pi \delta(p - u)$$



et celle relative à x sera alors :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ipx} e^{-ilx} dx = 2\pi \delta(p-l)$$

d'où finalement :

$$(12) \quad a_p^{n+1|n} = e^{-\frac{Bp^2}{2}} a_p^{n|n}$$

le coefficient de normalisation étant égal à 1, puisque pour  $p=0$  les coefficients de Fourier sont égaux à 1.

Lors d'une observation, le théorème de Bayes permet de recalculer la densité de probabilité par une simple multiplication :

$$\tilde{J}_{n|n}(x|z_0, \dots, z_n) = k' e^{V_n \cos(x-\psi_n)} \tilde{J}_{n|n-1}(x|z_0, \dots, z_{n-1})$$

On calculera les coefficients de Fourier correspondants par :

$$a_p^{n|n} = k'' \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-ilx} I_r(V_n) e^{ir(x-\psi_n)} a_p^{n-1|n-1} e^{ipx} dx$$

l'intégrale relative à x étant égale à  $2\pi \delta(p+r-l)$

on aura :

$$a_p^{n|n} = k'' \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{p-p}(V_n) e^{-i(p-p)\psi_n} a_p^{n-1|n-1}$$

le coefficient de normalisation sera calculé en remarquant que  $a_p^{n|n} = 1$  pour  $p=0$  et ainsi :

$$(13) \quad a_p^{n|n} = \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{p-p}(V_n) e^{-i(p-p)\psi_n} a_p^{n-1|n-1}}{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{-p}(V_n) e^{ip\psi_n} a_p^{n-1|n-1}}$$

On remarquera que la combinaison des expressions (12) et (13) conduit bien à la relation globale (11).

ESTIMATION DE LA PHASE, CRITERE D'OPTIMALITE

Le problème posé étant celui de l'estimation de la phase modulo  $2\pi$ , le critère doit tenir compte de cette périodicité. C'est pourquoi Bucy et Mallinckrodt [5] ont proposé comme fonction de coût :

$$(14) \quad L(\epsilon) = 2(1 - \cos \epsilon)$$

$\epsilon$  représentant l'erreur d'estimation. On remarquera que l'on a un critère périodique, qui pour les faibles valeurs de  $\epsilon$  se confond avec un critère quadratique. L'estimateur optimal  $x^*$  sera alors déterminé

en écrivant

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial L(x-x^*)}{\partial (x-x^*)} \tilde{J}(x|z_0, \dots, z_n) dx = 0$$

soit :  $\frac{\sin x^*}{\cos x^*} = \frac{\widehat{\sin x}}{\widehat{\cos x}}$

où :  $\widehat{\sin x} = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin x \tilde{J}(x|z_0, \dots, z_n) dx$

et  $\widehat{\cos x} = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos x \tilde{J}(x|z_0, \dots, z_n) dx$

Donc l'estimateur optimal de la phase à l'instant  $t_n$  sera donné par l'argument du coefficient de Fourier complexe  $a_{-1}^{n|n}$ .

Dans le cas particulier où l'équation de la phase n'est pas bruitée, c'est-à-dire où l'on considère l'estimation d'une phase constante mais inconnue, l'estimateur optimal s'exprime d'une manière simple en fonction des observations. En effet, dans ce cas l'équation de prédiction se réduit à :

$$\tilde{J}_{n+1|n}(x|z_0, \dots, z_n) = \tilde{J}_{n|n}(x|z_0, \dots, z_n)$$

et l'on obtient alors :

$$(15) \quad \tilde{J}_{n|n}(x|z_0, \dots, z_n) = K e^{\frac{1}{2} [(z_0^1 + z_1^1 + \dots + z_n^1) \cos x + (z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2) \sin x]} \tilde{J}_{0|n-1}(x)$$

où  $\tilde{J}_{0|n-1}(x)$  représente la densité de probabilité a priori de la phase. Si l'on considère que toutes les valeurs sont également probables entre  $-\pi$  et  $+\pi$  on posera  $\tilde{J}_{0|n-1}(x) = \frac{1}{2\pi}$  et en définissant la quantité :

$$(16) \quad W_n e^{i\psi_n} = \frac{1}{c} \left[ \sum_{j=0}^n z_j^1 + i \sum_{j=0}^n z_j^2 \right]$$

on obtient pour le coefficient de Fourier d'ordre  $p$  :

$$a_p^{n+1|n}(0) = a_p^{n|n}(0) = K \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} I_r(W_n) e^{ir(x-\psi_n)} e^{-ilx} dx$$

$$a_p^{n+1|n}(0) = K I_p(W_n) e^{-ip\psi_n}$$

d'où en normalisant :

$$(17) \quad a_p^{n+1|n}(0) = \frac{I_p(W_n) e^{-ip\psi_n}}{I_0(W_n)}$$

Dans ce cas particulier, l'estimateur optimal  $x^*$  de la phase prend une forme simple puisque c'est l'argument du nombre complexe  $a_{-1}^{n+1|n}(0)$ , il est donc donné par :

$$(18) \quad \text{tg } x^* = \frac{\sum_{j=0}^n z_j^2}{\sum_{j=0}^n z_j^1}$$



ETUDE DES COEFFICIENTS DE FOURIER DANS LE CAS GENERAL

On vient de voir que dans le cas d'une diffusion nulle (q=0), les coefficients de Fourier s'expriment sous une forme facilement calculable. On envisagera donc, dans le cas général, le développement en série des coefficients de Fourier autour de cette solution particulière.

On écrira ainsi :

$$(19) a_{\ell}^{n+1/n} = a_{\ell}^{n+1/n}(0) + \frac{q}{1!} a_{\ell}^{n+1/n}(1) + \frac{q^2}{2!} a_{\ell}^{n+1/n}(2) + \dots$$

et l'on envisagera tout d'abord l'étude du développement des coefficients de Fourier non normalisés puisqu'il faut ensuite prendre l'argument du nombre complexe correspondant, et que le coefficient de normalisation est réel.

On écrira donc l'équation (11) sous la

forme :

$$a_{\ell}^{n+1/n} = \frac{b_{\ell}^{n+1/n}}{b_0^{n+1/n}}$$

avec

$$(20) b_{\ell}^{n+1/n} = e^{-\frac{q\Delta\ell^2}{2}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{\ell-p}(V_n) e^{-i(\ell-p)\Psi_n} b_p^{n/n-1}$$

et le développement considéré devient :

$$(21) b_{\ell}^{n+1/n} = b_{\ell}^{n+1/n}(0) + \frac{q}{1!} b_{\ell}^{n+1/n}(1) + \frac{q^2}{2!} b_{\ell}^{n+1/n}(2) + \dots$$

avec  $b_{\ell}^{n+1/n}(0) = I_{\ell}(W_n) e^{-i\ell\psi_n}$

Nous nous proposons alors de déterminer les différents coefficients du développement en série précédent et nous montrerons que chaque coefficient s'exprime en fonction d'un nombre restreint de fonctions de Bessel modifiées. Par exemple

$b_{\ell}^{n+1/n}(1)$  s'exprimera toujours en fonction de  $I_{\ell-1}, I_{\ell+1}, I_{\ell}, I_{\ell-2}, I_{\ell+2}$ .

Le coefficient d'ordre k du développement

(21) sera donné par la relation :

$$b_{\ell}^{n+1/n}(k) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{\ell-p}(V_n) e^{-i(\ell-p)\Psi_n}$$

$$(22) \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{d^j}{dq^j} \left( e^{-\frac{q\Delta\ell^2}{2}} \right) \frac{d^{k-j}}{dq^{k-j}} b_p^{n/n-1}$$

soit encore :

$$(23) b_{\ell}^{n+1/n}(k) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^k I_{\ell-p}(V_n) e^{-i(\ell-p)\Psi_n} C_k^j \left( \frac{-\Delta\ell^2}{2} \right)^j b_p^{n/n-1}(k-j)$$

Nous donnerons, dans la suite de ce paragraphe, la détermination du coefficient d'ordre 1, soit  $b_{\ell}^{n+1/n}(1)$  la détermination du terme général  $b_{\ell}^{n+1/n}(k)$  est donnée dans [3].

Par application de la relation (23) pour

k=1 on obtient :

$$b_{\ell}^{n+1/n}(1) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{\ell-p}(V_n) e^{-i(\ell-p)\Psi_n} \left[ b_p^{n/n-1}(1) - \frac{\Delta\ell^2}{2} b_p^{n/n-1}(0) \right]$$

et en remarquant que

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{\ell-p}(V_n) e^{-i(\ell-p)\Psi_n} b_p^{n/n-1}(0) = b_{\ell}^{n+1/n}(0)$$

on obtient finalement :

$$(24) b_{\ell}^{n+1/n}(1) = -\frac{\Delta\ell^2}{2} b_{\ell}^{n+1/n}(0) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{\ell-p}(V_n) e^{-i(\ell-p)\Psi_n} b_p^{n/n-1}(1)$$

Considérons l'évolution de cette équation

à partir de l'instant initial. Avant toute diffusion, tous les coefficients des puissances de q sont nuls c'est-à-dire :  $b_p^{0/k-1}(k) = 0$  pour  $k > 0$

On obtient alors à partir de (24)

$$b_{\ell}^{1/0}(1) = -\frac{\Delta\ell^2}{2} b_{\ell}^{1/0}(0)$$

Le coefficient relatif au cas particulier q=0 est d'après

$$(17) b_{\ell}^{1/0}(0) = I_{\ell}(W_0) e^{-i\ell\psi_0}$$

d'où  $b_{\ell}^{1/0}(1) = -\frac{\Delta\ell^2}{2} [I_{\ell}(W_0) e^{-i\ell\psi_0}]$

On utilisera, pour transformer cette expression, la relation de récurrence suivante relative aux fonctions de Bessel (et qui est démontrée dans [3]) :

$$(25) n^2 I_n(z) = \frac{z}{2} (I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z)) + \frac{z^2}{4} (I_{n-2}(z) - 2I_n(z) + I_{n+2}(z))$$

Ainsi :

$$b_{\ell}^{1/0}(1) = -\frac{\Delta\ell^2}{2} \left\{ \frac{W_0}{2} [I_{\ell-1}(W_0) + I_{\ell+1}(W_0)] e^{-i\ell\psi_0} + \frac{W_0^2}{4} [I_{\ell-2}(W_0) - 2I_{\ell}(W_0) + I_{\ell+2}(W_0)] e^{-i\ell\psi_0} \right\}$$

Pour déterminer le coefficient à l'instant suivant on appliquera la relation (24) avec  $b_{\ell}^{2/1}(0) = I_{\ell}(W_1) e^{-i\ell\psi_1}$  et  $b_p^{1/0}(1)$  donné par l'expression précédente.

$$(26) b_{\ell}^{2/1}(1) = -\frac{\Delta\ell^2}{2} I_{\ell}(W_1) e^{-i\ell\psi_1} -$$

$$\frac{\Delta}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{\ell-p}(V_1) e^{-i(\ell-p)\Psi_1} \left\{ \frac{W_0}{2} [I_{p-1}(W_0) + I_{p+1}(W_0)] e^{-ip\psi_0} + \frac{W_0^2}{4} [I_{p-2}(W_0) - 2I_p(W_0) + I_{p+2}(W_0)] e^{-ip\psi_0} \right\}$$



Le premier terme de cette expression sera calculé comme précédemment à partir de la relation (25), les autres termes seront calculés à partir de la formule d'addition suivante relative aux fonctions de Bessel établie en [3].

Soient les deux vecteurs  $r_1 e^{i\varphi_1}$  et  $r_2 e^{i\varphi_2}$  représentés sur la figure 1, alors on a la relation :

$$(27) I_n(r) e^{in\varphi} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{i(n-p)\varphi_1} I_{n-p}(r_1) e^{ip\varphi_2} I_p(r_2)$$

où  $r e^{i\varphi}$  est le vecteur résultant

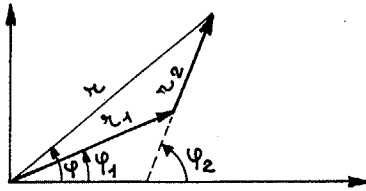


Figure 1

Ce résultat est en relation avec la représentation du groupe des déplacements du plan M (2) et montre le lien qui existe entre cette théorie et les fonctions de Bessel [9]. On peut également obtenir la relation suivante :

$$(28) I_{n-k}(r) e^{i(n-k)\varphi} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{i(n-p)\varphi_1} I_{n-p}(r_1) e^{i(p-k)\varphi_2} I_{p-k}(r_2)$$

En appliquant au deuxième terme de (26) les résultats précédents il vient :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \dots = \frac{W_0}{2} [ I_{\ell-1}(W_1) e^{-i(\ell-1)\varphi_1} e^{-i\varphi_0} + I_{\ell+1}(W_1) e^{-i(\ell+1)\varphi_1} e^{i\varphi_0} ] + \frac{W_0^2}{4} [ I_{\ell-2}(W_1) e^{-i(\ell-2)\varphi_1} e^{-2i\varphi_0} - 2 I_{\ell}(W_1) e^{-i\ell\varphi_1} + I_{\ell+2}(W_1) e^{-i(\ell+2)\varphi_1} e^{2i\varphi_0} ]$$

Finalement en développant le premier terme de (26) suivant la relation (25) et en regroupant les termes relatifs aux différentes fonctions de Bessel on a :

$$(29) b_{\ell}^{2(1)}(1) = -\frac{\Delta}{2} \left\{ \frac{1}{2} (W_0 e^{-i\varphi_0} + W_1 e^{-i\varphi_1}) \right.$$

$$I_{\ell-1}(W_1) e^{-i(\ell-1)\varphi_1} + \frac{1}{2} (W_0 e^{i\varphi_0} + W_1 e^{i\varphi_1})$$

$$I_{\ell+1}(W_1) e^{-i(\ell+1)\varphi_1} + \frac{1}{4} (W_0^2 e^{-2i\varphi_0} + W_1^2 e^{-2i\varphi_1})$$

$$\left. \begin{aligned} & I_{\ell-2}(W_1) e^{-i(\ell-2)\varphi_1} + \frac{1}{4} (W_0^2 e^{2i\varphi_0} + W_1^2 e^{2i\varphi_1}) \\ & I_{\ell+2}(W_1) e^{-i(\ell+2)\varphi_1} - \frac{1}{2} (W_0^2 + W_1^2) \\ & I_{\ell}(W_1) e^{-i\ell\varphi_1} \end{aligned} \right\}$$

On remarque donc que le coefficient d'ordre 1 s'exprime simplement en fonction des 5 fonctions de Bessel modifiées  $I_{\ell-2}, I_{\ell-1}, I_{\ell}, I_{\ell+1}, I_{\ell+2}$ . Les arguments et les coefficients de ces fonctions sont dépendants des observations.

On peut recommencer le même processus pour déterminer, à chaque nouvelle observation, le coefficient  $b_{\ell}^{n+1/n}(1)$ . On trouvera qu'il dépend seulement des 5 fonctions de Bessel modifiées d'ordre  $\ell-2, \ell-1, \ell, \ell+1, \ell+2$ .

Ce résultat montre que si l'on utilise un développement en série tel que (21) pour les coefficients de Fourier chaque terme de ce développement s'exprimera sous forme d'un nombre fini de fonctions de Bessel modifiées (1 pour le coefficient d'ordre 0, 5 pour le coefficient d'ordre 1,  $4k+1$  pour le coefficient d'ordre k).

Si donc on utilise un développement tronqué en guise de filtre sous-optimal, on est assuré que chaque terme du développement a une expression exacte tout au long de l'algorithme de filtrage. Ceci n'est en général pas le cas pour la plupart des algorithmes de filtrage non linéaire pour lesquels les paramètres caractérisant la densité de probabilité conditionnelle sont calculés à chaque pas à partir des valeurs approchées au pas précédent.

La forme particulière trouvée dans la relation (29) nous conduit à exprimer  $b_{\ell}^{n+1/n}(1)$  sous forme des 5 fonctions de Bessel multipliées par des gains variant avec le temps, et à chercher des relations de récurrence pour les gains.

On écrira ainsi :

$$(30) b_{\ell}^{n+1/n}(1) = -\frac{\Delta}{2} \sum_{k=-2}^{+2} g_k^n I_{\ell-k}(W_{n-1}) e^{-i(\ell-k)\varphi_{n-1}}$$

On utilisera alors l'expression (24) pour calculer  $b_{\ell}^{n+1/n}(1)$ , on obtient :

$$b_{\ell}^{n+1/n}(1) = -\frac{\Delta}{2} \left\{ \frac{W_n}{2} [ I_{\ell-1}(W_n) + I_{\ell+1}(W_n) ] e^{-i\ell\varphi_n} + \frac{W_n^2}{4} [ I_{\ell-2}(W_n) - 2I_{\ell}(W_n) + I_{\ell+2}(W_n) ] e^{-i\ell\varphi_n} \right\}$$



$$-\frac{\Delta}{2} \sum_{k=2}^{+2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{\ell-p}(V_n) e^{-i(\ell-p)\psi_n}$$

$$g_k^n I_{p-k}(W_{n-1}) e^{-i(p-k)\psi_{n-1}}$$

On écrira ensuite la forme générale du coefficient à l'instant suivant :

$$(31) b_\ell^{n+1/n}(1) = -\frac{\Delta}{2} \sum_{k=2}^{+2} g_k^{n+1} I_{\ell-k}(W_n) e^{-i(\ell-k)\psi_n}$$

et par identification des termes correspondants des deux expressions on obtiendra les équations de récurrence pour les gains

$$(32) \begin{cases} g_0^{n+1} = g_0^n - \frac{1}{2} W_n^2 \\ g_1^{n+1} = g_1^n + \frac{1}{2} W_n e^{i\psi_n} \\ g_{-1}^{n+1} = g_{-1}^n + \frac{1}{2} W_n e^{i\psi_n} \\ g_2^{n+1} = g_2^n + \frac{1}{4} W_n^2 e^{-2i\psi_n} \\ g_{-2}^{n+1} = g_{-2}^n + \frac{1}{4} W_n^2 e^{2i\psi_n} \end{cases}$$

Le gain relatif à une fonction de Bessel à un instant donné s'exprime donc en fonction du gain à l'instant précédent auquel on ajoute un terme dépendant d'une manière simple des observations.

Un résultat analogue peut être obtenu pour les coefficients d'ordre quelconque  $b_\ell^{n+1/n}(k)$  du développement (21) [3].

#### MISE EN OEUVRE PRATIQUE DE L'ALGORITHME DE FILTRAGE

Nous avons déterminé des équations qui permettent de mettre l'algorithme de filtrage sous une forme récurrente. Les équations des gains (32) nécessitent, à chaque nouvelle observation, un traitement des données. Ce traitement sera simplifié par l'utilisation du calcul en nombres complexes, on doit, en effet, évaluer

$$W_n e^{i\psi_n} = W_{n-1} e^{i\psi_{n-1}} + V_n e^{i\psi_n}$$

L'argument des fonctions de Bessel modifiées est le module de la quantité précédente.

Les équations de filtrage ont été déterminées en considérant les coefficients de Fourier non normalisés.

Dans la mise en oeuvre pratique du fil-

tre du 1er ordre on utilisera les coefficients normalisés pour accroître la précision numérique. On considère donc l'équation (19) :

$$a_\ell^{n+1/n} = a_\ell^{n+1/n}(0) + \frac{q}{1!} a_\ell^{n+1/n}(1) + \dots$$

$$\text{en rappelant que } a_\ell^{n+1/n} = \frac{b_\ell^{n+1/n}}{b_0^{n+1/n}}$$

On calculera le coefficient du 1er ordre  $a_\ell^{n+1/n}(1)$  par :

$$(33) a_\ell^{n+1/n}(1) = \left( \frac{da_\ell}{dq} \right)_{q=0} = \frac{b_\ell^{n+1/n}(1)}{b_0^{n+1/n}(0)} - \frac{b_\ell^{n+1/n}(0)}{b_0^{n+1/n}(0)} \cdot \frac{b_0^{n+1/n}(1)}{b_0^{n+1/n}(0)}$$

Les différents termes de cette expression étant calculés à partir des équations (31) et (17).

L'estimateur optimal de la phase pour un filtre non linéaire du 1er ordre, sera alors déterminé par l'expression :

$$(34) \alpha^* = \arg \left\{ \frac{b_{-1}^{n+1/n}(0)}{b_0^{n+1/n}(0)} + q \left[ \frac{b_{-1}^{n+1/n}(1)}{b_0^{n+1/n}(0)} - \frac{b_{-1}^{n+1/n}(0)}{b_0^{n+1/n}(0)} \cdot \frac{b_0^{n+1/n}(1)}{b_0^{n+1/n}(0)} \right] \right\}$$

ou encore, en remarquant que les termes en dénominateur sont réels :

$$(35) \alpha^* = \arg \left\{ b_{-1}^{n+1/n}(0) + q \left[ b_{-1}^{n+1/n}(1) - b_{-1}^{n+1/n}(0) \cdot \frac{b_0^{n+1/n}(1)}{b_0^{n+1/n}(0)} \right] \right\}$$

Pour étudier les performances de l'algorithme de filtrage non linéaire nous avons effectué une simulation numérique des équations du modèle (1) ainsi que du filtre linéarisé correspondant (boucle à verrouillage de phase) et du filtre non linéaire du 1er ordre. L'analyse des variances des erreurs d'estimation dans chaque cas a été faite par des méthodes de Monte-Carlo.

Les résultats portés sur la figure 2 correspondent à 41 séquences de 500 pas de discrétisation chacune. On a également porté sur la figure 2 la variance de l'erreur théorique pour la boucle de verrouillage de phase. En effet, une analyse de l'équation de Fokker-Plank permet dans ce cas de trouver la densité de probabilité de l'erreur [1], [3].

Les différents résultats sont tracés en fonction de la quantité  $\sqrt{2qr}$  qui est l'inverse du rapport signal/bruit [5].



## DEMODULATION DE PHASE ET FILTRAGE NON LINEAIRE

On remarquera que lorsque cette quantité croît, les courbes ont pour asymptote la valeur  $\pi^2/3$  qui correspond à une densité de probabilité uniforme sur  $[-\pi, +\pi]$ . On remarquera d'autre part que la variance de l'erreur pour la boucle à verrouillage de phase simulée est proche de la variance théorique, ce qui est une justification a posteriori des séquences de bruit utilisées en simulation.

Enfin, une comparaison entre les résultats donnés par la boucle à verrouillage de phase et ceux donnés par le filtre non linéaire montre que ce dernier donne une variance de l'erreur plus faible (compte tenu de l'intervalle de confiance lié à ces estimations faites par des méthodes de Monte-Carlo)

### CONCLUSION

La théorie du filtrage non linéaire a été appliquée à l'estimation d'une phase aléatoire dans le problème de la démodulation de phase. Notre attention s'est portée sur l'étude des coefficients de Fourier de la densité de probabilité périodique de la phase. Après avoir déterminé une expression simple de ces coefficients dans le cas où la variance du bruit est nulle dans l'équation modélisant la phase, nous avons étudié un développement des coefficients autour de cette solution particulière. Nous avons ainsi établi des résultats relatifs aux fonctions de Bessel modifiées intervenant dans ces coefficients en liaison avec la théorie de la représentation des groupes.

A l'aide de ces résultats nous avons montré que chaque terme du développement en série s'exprimait en fonction d'un nombre fini de fonctions de Bessel et nous avons établi des équations de filtrage récurrentes.

Actuellement un travail est en cours pour déterminer par la même procédure des équations de filtrage non linéaire pour le problème de démodulation de phase avec un modèle de phase du second ordre.

### REMERCIEMENTS

Cette étude a été réalisée à la suite du séjour au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse

des Systèmes du C.N.R.S. du Professeur

R.S. BUCY. Nous tenons à lui exprimer ici notre bien vive gratitude pour tous les conseils qu'il nous a prodigués au cours de très intéressantes discussions.

### REFERENCES

- [1] A. J. VITERBI  
Phase locked loop dynamics in the presence of noise by Fokker-Plank techniques. Proc. IEEE, 51, pp. 1737-1753 (1963)
- [2] A. J. MALLINCKRODT - R. S. BUCY - S. Y. CHENG  
Final report for a design study for an optimal non linear receiver demodulator NASA contract NAS 5 10789, 1970.
- [3] G. ALENGRIN  
La théorie du filtrage non linéaire et ses applications au traitement du signal et à l'identification en Automatique. Thèse de Doctorat ès Sciences, Toulouse 1974.
- [4] R. S. BUCY - C. HECHT - K. SENNE  
An application of Bayes law estimation to non linear phase demodulation. 3rd Symposium on non linear filtering, San Diego, California, Sept. 1972.
- [5] R. S. BUCY - A. J. MALLINCKRODT  
An optimal phase demodulator. Stochastics, 1973, vol. 1, pp. 2-23.
- [6] D. L. ALSPACH - H. W. SORENSON  
Approximation of density functions by a sum of gaussians for non linear Bayesian estimation. Proc. Symposium on non linear estimation theory, San Diego, Sept. 1970, pp. 19-31.
- [7] R. S. BUCY - C. HECHT - K. SENNE  
An engineer's guide to building non linear filters. Frank J. Seiler research laboratory technical report, vol. I, May 1972.
- [8] M. ABRAMOWITZ - I. A. STEGUN  
Handbook of mathematical functions. Dover N. Y. 1965.
- [9] N. Ja. VILENKIN  
Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes. Dunod 1969.





## DEMODULATION DE PHASE ET FILTRAGE NON LINEAIRE

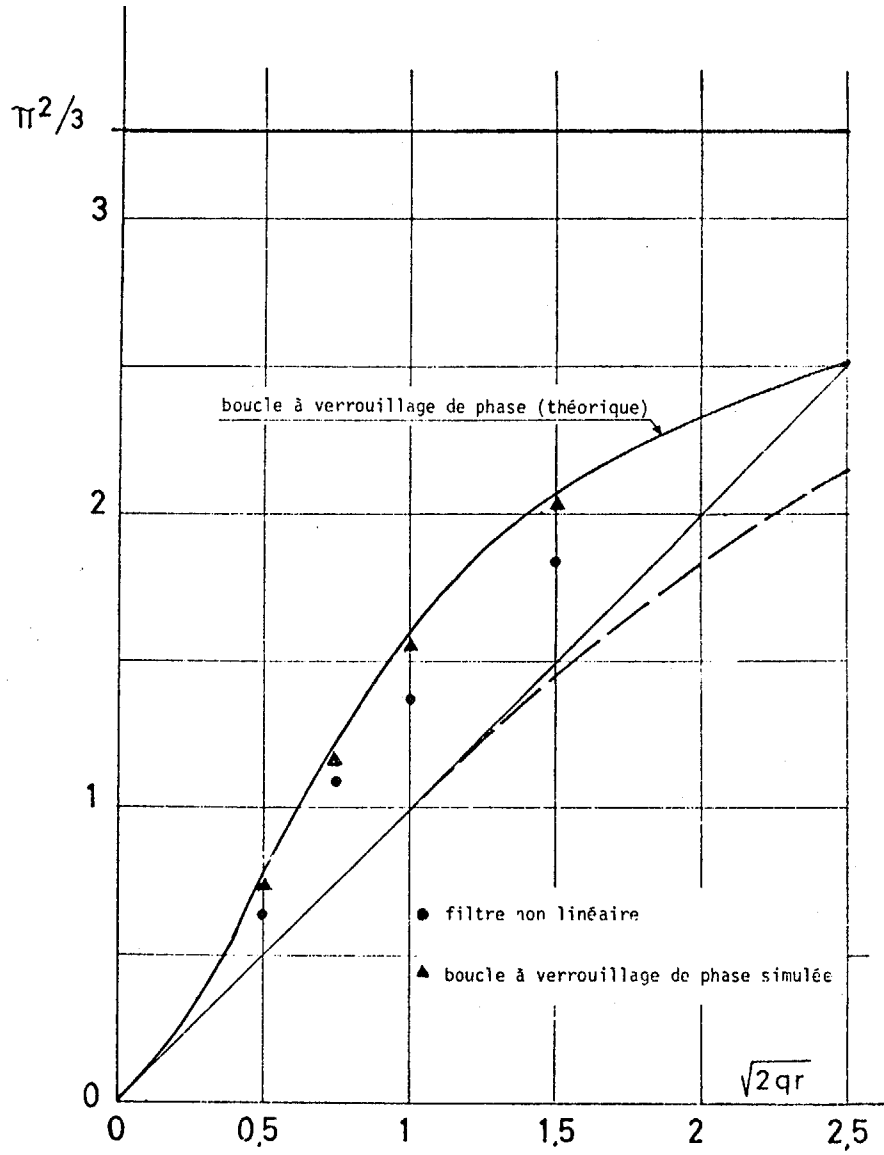


Figure 2