

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

PSEUDO-OBSERVATIONS ET FILTRAGE NON LINEAIRE EN AZIMETRIE

Ph. de LARMINAT \*  
J-M. PIASCO \*\*

\* L.R.2.I., 3 rue du Maréchal Joffre - 44 041 NANTES Cédex

\*\* Laboratoire d'Automatique (ERA 134) E.N.S.M., 1 rue de la Noë - 44 072 NANTES Cédex

## RESUME

On considère le problème de l'estimation des coordonnées cartésiennes d'un mobile à partir des seules mesures d'azimut, effectuées à partir d'un observateur mobile.

Ce problème de filtrage est intrinsèquement non linéaire. De plus, en l'absence de mesure de distance, le degré d'observabilité est souvent très réduit, d'où une faible précision des estimées inhérentes au problème. Il en résulte que les filtres de Kalman étendus classiques fonctionnent parfois dans de mauvaises conditions, en raison d'une linéarisation des équations autour d'un point erroné, d'où risque important de divergence.

Une solution apparemment très éloignée, introduite par Aidala (1977), consiste à utiliser une "pseudo-observation" linéaire, extrapolée à partir du cas idéal sans bruit, où l'azimut observé implique évidemment une relation linéaire exacte entre les coordonnées. Il en résulte des algorithmes globalement stables mais susceptibles de souffrir d'un biais asymptotique.

On introduit ici une approche plus générale pour résoudre le problème de la linéarisation de l'équation d'observation, dans laquelle la technique du filtre de Kalman étendu et celle de la pseudo-observation apparaissent comme des cas particuliers.

Il en résulte la possibilité de définir des algorithmes de filtrage réunissant les avantages de deux méthodes (stabilité globale et optimalité asymptotique), sans souffrir de leurs inconvénients.

## SUMMARY

The bearing-only estimation problem is considered here. This filtering problem is intrinsically non-linear. Moreover, due to the lack of distance measurement, the level of observability is often very low, which yields obviously very imprecise estimates. Then, a classical extended Kalman filter could present a high level risk of divergence.

An other solution was introduced by Aidala (1977), which manipulates the non-linear measurement into a "pseudo-measurement" which is a linear function of the observations. This approach is derived from the noise free case, where a bearing measurement yields obviously a linear relation between the rectangular states coordinates. Then, the filtering algorithms are shown to be globally stable, but possibly asymptotically biased.

A more general approach for the linearization is introduced here, from which the Extended Kalman Filter or the pseudo-measurement equation follow as particular applications.

It yields filtering algorithms which present both advantages of the previous methods : global stability and asymptotic optimality.



NICE du 16 au 20 MAI 1983

PSEUDO-OBSERVATIONS ET FILTRAGE NON LINEAIRE EN AZIMETRIE

Ph. de LARMINAT \*  
J-M. PIASCO \*\*

\* L.R.2.I., 3 rue du Maréchal Joffre - 44 041 NANTES Cédex  
\*\* Laboratoire d'Automatique (ERA 134) E.N.S.M., 1 rue de la Noë - 44 072 NANTES Cédex

I - INTRODUCTION

Le problème traité est celui de l'azimétrie, c'est à dire de l'estimation des coordonnées d'un mobile évoluant dans le plan, à partir des seules mesures de relèvement effectuées depuis un observateur mobile.

On montre [1], [2] que l'utilisation des coordonnées cartésiennes conduit à une équation d'évolution linéaire et à une équation d'observation non-linéaire qui peut être exploitée selon deux approches classiques :

La première est la linéarisation de l'équation de mesure autour des estimées disponibles (filtre de Kalman étendu), ce qui conduit à un filtre asymptotiquement optimal, mais sensible aux conditions initiales et susceptible de diverger facilement [1], [2].

La deuxième utilise une transformation de l'équation non-linéaire d'observation en une équation linéaire de l'état, appelée pseudo-mesure, où les coefficients de la matrice de mesure sont des fonctions non linéaires des observations [3], [4]. Cette équation est valable dans le cas sans bruit, puisque l'observation définit alors une relation exacte entre les coordonnées. Il en résulte des algorithmes globalement stables. Toutefois, si les mesures sont perturbées par un bruit additif, les pseudo-mesures seront linéaires mais avec un bruit additif non indépendant [5], et les estimations résultantes seront alors biaisées.

En section 2, on présente le problème connu sous nom d'azimétrie : en choisissant comme état les coordonnées cartésiennes du mobile par rapport à l'observateur ainsi que leurs dérivées premières, on écrit les équations d'évolution et d'observation.

En section 3, on propose une approche générale de la linéarisation de l'équation d'observation. Deux cas particuliers de cette méthode générale conduisent, l'un au filtre de Kalman étendu et l'autre au filtre avec pseudo-mesure (section 4).

Les solutions proposées en section 5 permettent de définir des algorithmes de filtrage réunissant les avantages des deux cas particuliers précédents, c'est-à-dire la stabilité globale et l'optimalité asymptotique, en éliminant leurs inconvénients.

II - PRESENTATION DU PROBLEME

Soit deux mobiles évoluant dans le plan (figure 1) suivant des trajectoires quelconques. On se propose de déterminer la trajectoire du mobile (B) à partir des seules mesures d'azimut (angle par rapport au nord sous lequel L observe B) effectuées à partir de l'observateur mobile (L) dont on connaît, à chaque instant, la position et la vitesse.

On note :

- Z l'azimut
- D la distance LB
- $V_L$  et  $K_L$  la vitesse et le cap du mobile L
- $V_B$  et  $K_B$  la vitesse et le cap du mobile B
- $X_L$  et  $Y_L$  les coordonnées cartésiennes du mobile L
- $X_B$  et  $Y_B$  les coordonnées cartésiennes du mobile B

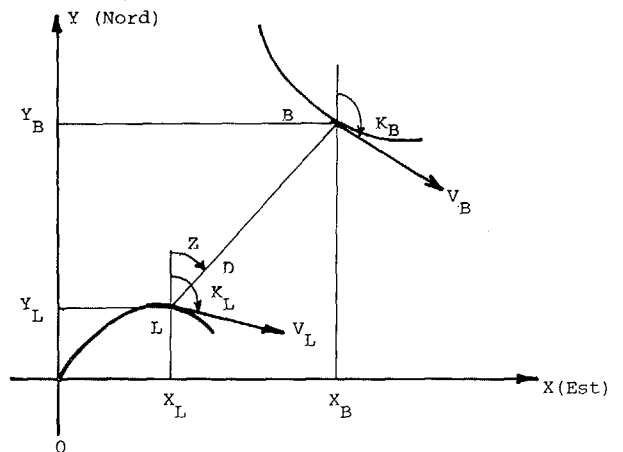


Figure 1

L'utilisation des coordonnées cartésiennes relatives (de B par rapport à L) conduit à une équation d'évolution continue linéaire, de la forme [4], [5] :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

où  $X = X_B - X_L$   
 $Y = Y_B - Y_L$

Le mobile B suit, la plupart du temps, une route rectiligne à vitesse uniforme mais, des bruits  $u_1$  et  $u_2$  sont introduits dans ce modèle pour prendre en compte tout changement aléatoire de cap  $K_B$  ou de vitesse  $V_B$ . On fait alors l'hypothèse que :

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$  est un bruit blanc, centré de covariance ce Q.

Soit  $Z_m$  l'azimut observé à l'instant k :

$Z_m = Z_k + V_k$

L'équation de mesure est discrète et non linéaire

$Z_m = \text{Arctg} \frac{X_k}{Y_k} + V_k$  (2)

avec  $Z_m = Z_m(t_k)$ ,  $X_k = X(t_k)$ ,  $Y_k = Y(t_k)$

Le bruit de mesure  $V_k$  est supposé être une séquence indépendante, centrée, de variance r.

Notons que l'utilisation des coordonnées polaires conduit à une équation de mesure linéaire mais à une équation d'évolution non linéaire [1], [2].

L'équation de mesure (2) est non linéaire et on va en proposer une linéarisation en vue de mettre en oeuvre un filtre de Kalman approché.

III - LINEARISATION DE L'EQUATION DE MESURE

On se propose de linéariser l'équation de mesure (2) autour d'une approximation  $X_k^*$ ,  $Y_k^*$ , que l'on définira ultérieurement, et qui ne sera pas obligatoirement la prédiction  $\hat{X}_k$ ,  $\hat{Y}_k$  délivrée par le filtre estimateur de  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $X_k^*$  et  $Y_k^*$ .

$X_k^*$  et  $Y_k^*$  définissent des approximations d'azimut et de distance :

$Z_k^* = \text{Arctg} \frac{X_k^*}{Y_k^*}$  (3)

$D_k^* = \sqrt{X_k^{*2} + Y_k^{*2}}$  (4)

La linéarisation au premier ordre de l'équation (2) donne :

$Z_k = \text{Arctg} \frac{X_k^* + \frac{Y_k^*}{X_k^* + Y_k^*} (X_k - X_k^*)}{Y_k^* + \frac{X_k^*}{X_k^* + Y_k^*} (Y_k - Y_k^*)} + \epsilon_k + V_k$   
 $Z_k = Z_k^* + \left(\frac{\cos Z_k^*}{D_k^*}\right) X_k - \left(\frac{\sin Z_k^*}{D_k^*}\right) Y_k + \epsilon_k + V_k$  (5)

où  $\epsilon_k$  est un terme du deuxième ordre par rapport aux erreurs d'approximations  $(X_k - X_k^*)$  et  $(Y_k - Y_k^*)$ , mais aussi par rapport aux erreurs  $(Z_k - Z_k^*)$  et  $(D_k - D_k^*)$

En effet, il résulte de (2) et (5) :

$\epsilon_k = Z_k - Z_k^* - \frac{D_k}{D_k^*} (\cos Z_k^* \sin Z_k - \sin Z_k^* \cos Z_k)$

$\epsilon_k = \frac{1}{D_k^*} [D_k^* (Z_k - Z_k^*) - D_k \sin(Z_k - Z_k^*)]$

$\epsilon_k = \frac{1}{D_k^*} [D_k^* (Z_k - Z_k^*) - D_k (Z_k - Z_k^*) + \frac{D_k}{3!} (Z_k - Z_k^*)^3 - \frac{D_k}{5!} (Z_k - Z_k^*)^5 + \dots]$   
 $\epsilon_k = \frac{1}{D_k^*} [(D_k^* - D_k) (Z_k - Z_k^*) + \frac{D_k}{3!} (Z_k - Z_k^*)^3 - \frac{D_k}{5!} (Z_k - Z_k^*)^5 + \dots]$  (6)

Si on néglige  $\epsilon_k$ , les équations d'évolution (1) et d'observation (5) sont maintenant linéaires et on peut définir un filtre d'estimation linéaire. Si  $\hat{X}_k$  et  $\hat{Y}_k$  sont des prédictions des deux premières composantes de l'état, résultant des étapes d'entretien, alors l'innovation apparaissant dans l'étape de remise à jour s'écrira, en ne tenant pas compte des termes du second ordre :

$v_k = Z_m - Z_k^* - \frac{\cos Z_k^*}{D_k^*} \hat{X}_k + \frac{\sin Z_k^*}{D_k^*} \hat{Y}_k$  (7)

IV - LES CAS PARTICULIERS CLASSIQUES

Le principe général de linéarisation proposé précédemment inclut deux cas particuliers classiques : le filtre de Kalman étendu et le filtre avec "pseudo-observation".

- le filtre de Kalman étendu :

On pose :  $Z_k^* = \hat{Z}_k = \text{Arctg} \frac{\hat{X}_k}{\hat{Y}_k}$   
 $D_k^* = \hat{D}_k = \sqrt{\hat{X}_k^2 + \hat{Y}_k^2}$

Alors, l'innovation  $v_k$  (7) devient :

$v_k = Z_m - \hat{Z}_k$  (8)

et on retrouve le filtre de Kalman étendu classique.

Notons que  $\hat{X}_k$  et  $\hat{Y}_k$  étant, en principe, les "meilleures" prédictions disponibles, le terme  $\epsilon_k$  se trouve minimisé. Malheureusement, si le filtre commence à diverger, à la suite d'une mauvaise initialisation, rien ne garantit plus que  $\epsilon_k$  reste petit, et le filtre peut alors décrocher définitivement.

- filtre avec pseudo-observation :

On pose :  $Z_k^* = Z_m$   
 $D_k^*$  arbitraire, borné supérieurement et inférieurement. Alors, l'innovation  $v_k$  devient :

$v_k = \frac{1}{D_k^*} [-\cos Z_m \hat{X}_k + \sin Z_m \hat{Y}_k]$  (9)

Au facteur  $\frac{1}{D_k^*}$  près, cette innovation est exactement la même que  $D_k^*$  celle qui résulterait de la "pseudo-observation" [3] :

$O = -\cos Z_m X_k + \sin Z_m Y_k + W_k$  (10)

où  $W_k$  est une erreur résultant de la différence entre l'azimut vrai  $Z_k$  et l'azimut observé  $Z_m$ . En effet, si l'on multiplie par  $\frac{1}{D_k^*}$  avec  $D_k^*$  arbitraire chacun des deux membres de l'équation (10), l'innovation résultant de cette nouvelle équation de mesure est identique à celle de l'équation (9).

Par rapport au filtre de Kalman étendu, il existe une différence fondamentale car  $Z_k^*$  et  $D_k^*$  ne résultent pas d'une simple prédiction, effectuée à partir des me-



sures passées, mais  $Z_k^*$  dépend de la mesure présente  $Zm_k = Z_k + v_k$ . Il en résulte que les coefficients de l'équation linéarisée (5), soient :

$$\frac{\cos Z_k^*}{D_k^*} \text{ et } -\frac{\sin Z_k^*}{D_k^*}, \text{ sont fonction de } v_k.$$

D'où un biais qui peut apparaître dans les estimations [5].

Par contre, sachant que le bruit  $v_k$  est borné, et que  $Z_k - Z_k^* = v_k$  dans l'expression (6) de  $\epsilon_k$ , il est clair que  $\epsilon_k$  restera obligatoirement petit, et donc que le filtre basé sur la linéarisation (5) sera globalement stable.

Grâce à la présentation unifiée des deux méthodes il devient possible de proposer des compromis préservant les avantages des deux méthodes.

#### V - LES METHODES PROPOSEES

##### . première solution :

Dans cette première méthode élémentaire, on se donne :

$$\begin{aligned} V_{\max}, \text{ la borne supérieure de } v_k \\ D_{\min} \text{ et } D_{\max}, \text{ les bornes de } D_k \end{aligned}$$

On définit :

$$Z_k^* = \hat{Z}_k \text{ si } Z_k \in [Zm_k - V_{\max}, Zm_k + V_{\max}]$$

$$Z_k^* = Zm_k - V_{\max} \text{ si } Z_k < Zm_k - V_{\max}$$

$$Z_k^* = Zm_k + V_{\max} \text{ si } Z_k > Zm_k + V_{\max}$$

$$D_k^* = \hat{D}_k \text{ si } \hat{D}_k \in [D_{\min}, D_{\max}]$$

$$D_k^* = D_{\min} \text{ si } \hat{D}_k < D_{\min}$$

$$D_k^* = D_{\max} \text{ si } \hat{D}_k > D_{\max}$$

Pour un fonctionnement satisfaisant du filtre, cette solution est équivalente au filtre de Kalman étendu et, si le filtre a tendance, pour une raison quelconque, à diverger, on borne les erreurs ( $Z_k - Z_k^*$ ) et ( $D_k - D_k^*$ ) dans l'expression (6) de  $\epsilon_k$  et le filtre proposé reste stable.

##### . Deuxième solution :

Dans cette deuxième méthode, on propose une solution plus élaborée :

soit  $\begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{xy} & P_{yy} \end{bmatrix}$  la matrice de variance-covariance associée aux erreurs de prédictions de  $\hat{X}_k$  et  $\hat{Y}_k$  et  $r$  la variance de  $v_k$ .

On calcule les variances des erreurs de prédiction de  $Z_k$  et  $D_k$  par les approximations (linéarisation au premier ordre) :

$$P_Z = \left(\frac{\cos \hat{Z}_k}{\hat{D}_k}\right)^2 P_{xx} - \frac{2 \cos \hat{Z}_k \sin \hat{Z}_k}{\hat{D}_k^2} P_{xy} + \left(\frac{\sin \hat{Z}_k}{\hat{D}_k}\right)^2 P_{yy}$$

$$P_D = \sin^2 \hat{Z}_k P_{xx} + 2 \cos \hat{Z}_k \sin \hat{Z}_k P_{xy} + \cos^2 \hat{Z}_k P_{yy}$$

On propose alors de linéariser l'équation de mesure autour de :

$$Z_k^* = \frac{P_Z}{P_Z + r} Zm_k + \frac{r}{P_Z + r} \hat{Z}_k$$

$$D_k^* = \sqrt{D^2 + P_D}$$

Ces approximations seront elles-mêmes écartées si elles sortent des intervalles  $[Zm_k - V_{\max}, Zm_k + V_{\max}]$  pour  $Z_k^*$  et  $[D_{\min}, D_{\max}]$  pour  $D_k^*$ , ce qui garantit la stabilité globale.

On peut néanmoins conjecturer que le filtre fonctionnera correctement, c'est-à-dire sans recours à cet écartage, en effet : à l'initialisation et en début de fonctionnement, lorsque  $P$  est grand, on prend l'approximation stabilisante  $Z_k^* = Zm_k$ , et à la convergence, lorsque  $P$  décroît, on se rapproche de l'approximation optimale  $Z_k^* = \hat{Z}_k$  qui garantit l'absence de biais.

Par ailleurs, en introduisant  $P_D$  dans l'expression de  $P_k^*$ , on prévient le cas défavorable où  $D_k^*$  deviendrait petit ou nul.

La méthode proposée effectue donc une transition progressive entre le filtre globalement stable (filtre avec pseudo-mesure) et le filtre asymptotiquement optimal (filtre de Kalman étendu).

#### VI - CONCLUSION

On a présenté une approche unifiée pour la linéarisation de l'équation d'observation en azimétrie. Dans cette approche, le filtre de Kalman étendu et la technique de la pseudo-mesure apparaissent comme des cas particuliers, ce qui permet de suggérer des formulations intermédiaires réunissant les avantages des deux méthodes, c'est-à-dire la stabilité et l'absence de biais.

#### BIBLIOGRAPHIE :

- [1] A. GUILBERT, C.A. BOZZO, E. SIFFREDI "Caractérisation des mouvements de deux mobiles dans un Plan à partir de mesures bruitées échantillonnées sous forme de "bien Pointes" d'azimuts - Problème non linéaire continu - discret" Huitième Colloque sur le traitement du signal et ses applications, GRETSI, NICE, Juin 1981.
- [2] E. SIFFREDI "Transformations sur les systèmes dynamiques. Modélisation et estimation de la cinématique d'un mobile dans le plan à partir de mesures angulaires bruitées et échantillonnées". Thèse de 3ème cycle, Marseille, Janvier 1982.
- [3] V.J. AIDALA "Behavior of Kalman Filter Applied to Bearings-Only Target Motion Analysis" Advances in Passive Tracking, Vol.I, NPS-62 TS 77001, Naval Postgraduate School, May, 1977.
- [4] V.J. AIDALA "Kalman Filter Behavior in Bearing-only tracking applications". IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. Vol. AES-15, January 1978.
- [5] J.L. SPEYER, T.L. SONG "A Comparison Between the Pseudomeasurement and Extended Kalman Observers". 20th IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, December 1981.