

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 16 au 20 MAI 1983

METHODE D'ESTIMATION DES DERIVEES SPATIALES PREMIERES D'UN CHAMP MAGNETIQUE

Monsieur Bernard ROUVRAIS - Monsieur Georges PRETET

DIRECTION DES CONSTRUCTIONS ET ARMES NAVALES DE BREST - GROUPE D'ETUDE SOUS-MARINE DE L'ATLANTIQUE 29240
BREST NAVAL

RESUME

On considère le problème de l'estimation des neuf dérivées spatiales premières $H_{ij}(t)$ d'un champ magnétique, perturbées par un bruit additif $b_{ij}(t)$.

La méthode proposée utilise les équations de Maxwell qui impliquent que le tenseur gradient soit symétrique et de trace nulle. On montre que cinq filtres de Wiener devraient être suffisants pour estimer l'ensemble des composantes spatiales du champ magnétique.

SUMMARY

We consider the problem of the estimation of the nine spatial gradients $H_{ij}(t)$ of a magnetic field, disturbed by an additive noise $b_{ij}(t)$. The proposed method uses Maxwell's Equations which imply that the tensor H_{ij} is symmetric and has a null trace. We show that five Wiener filters would be sufficient to estimate the whole spatial components of the magnetic field.



INTRODUCTION

On connaît l'intérêt des dérivées spatiales premières du champ magnétique pour la localisation et l'identification d'un objet ferromagnétique, (1), (2), (3). On comprend, dès lors, que la précision des mesures est directement liée au rapport signal sur bruit de chacune de ces composantes. Nous avons, à présent, une connaissance limitée de ces bruits qui peuvent être mutuellement corrélés ou non corrélés. Cependant l'information apportée par le champ magnétique (équations de Maxwell) nous permet de proposer un modèle par filtrage de Wiener dont on étudie les performances théoriques selon la nature des bruits (corrélés ou non corrélés) et de le généraliser en vue d'effectuer une estimation de toutes les composantes spatiales du tenseur gradient.

1 - PRESENTATION DU PROBLEME

On appelle H le champ magnétique créé par l'objet et H_i la composante suivant l'axe, X_i , dans un repère orthonormé (OX_1, X_2, X_3) . On note H_{ij} , la composante spatiale première.

Des neuf dérivées spatiales premières, les équations de Maxwell ($\text{rot } H = 0$ et $\text{div } H = 0$) n'en laissent subsister que cinq indépendantes. En effet :

$$H_{ij} = H_{ji} \quad , \quad \forall_{i,j} \in \{1, \dots, 3\} \quad \text{et } i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^3 H_{ii} = 0$$

Le tenseur gradient est une fonction du temps dont chaque composante s'écrit :

$$V_{ij}(t) = H_{ij}(t) + b_{ij}(t) \quad , \quad \forall_{i,j} \in \{1, \dots, 3\}$$

L'observation $V_{ij}(t)$ est constituée du signal utile $H_{ij}(t)$, rarement présent, déterministe inconnu, créé par la source magnétique et d'un bruit additif $b_{ij}(t)$ centré, stationnaire au second ordre.

Dans la suite du problème on représente respectivement l'observation, le signal et le bruit par trois matrices $(9,1)$ notées $V(t)$, $S(t)$, $B(t)$.

La mesure des neuf composantes $V_{ij}(t)$ du vecteur d'observation $V(t)$ en présence du vecteur signal utile $S(t)$ de composantes $H_{ij}(t)$ entraîne une redondance dans l'information qui peut être utilisée à bon escient pour améliorer le rapport signal sur

bruit de chacune d'entre elles. En effet, la connaissance a priori apportée par les équations de Maxwell permet d'extraire du système de mesure quatre références bruit seul :

- trois références bruit seul sont obtenues par soustraction des composantes extradiagonales symétriques $V_{ij}(t)$ et $V_{ji}(t)$ telles que :

$$V_{ij}(t) - V_{ji}(t) = b_{ij}(t) - b_{ji}(t) \quad , \quad \forall_{i,j} \in \{1, \dots, 3\}$$

$$i \neq j$$

- une référence bruit seul est obtenue par sommation des composantes diagonales telle que :

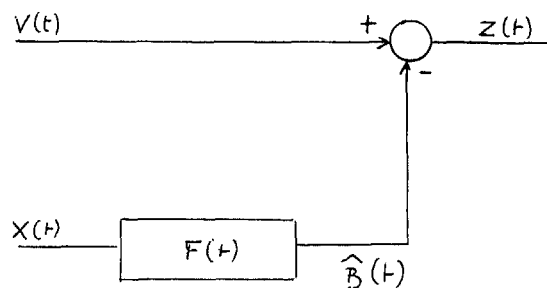
$$\sum_{i=1}^3 V_{ii}(t) = \sum_{i=1}^3 b_{ii}(t)$$

Elles forment le vecteur référence bruit seul $X(t)$ de dimension 4 qui est, de part sa construction, corrélé avec le vecteur bruit d'observation $B(t)$ de composantes $b_{ij}(t)$.

Cette situation nous permet de proposer la méthode de traitement optimal par filtrage de Wiener

Méthode optimale de traitement par filtrage de Wiener

Le principe de cette méthode est conforme au schéma ci-dessous :



- $V(t) = B(t)$ (hypothèse bruit seul)
- $V(t) = S(t) + B(t)$ (Hypothèse signal + bruit)
- $X(t)$ est le vecteur de référence bruit seul
- $F(t)$ est la matrice de filtrage à 4 entrées et 9 sorties de gain complexe $F(\nu)$
- $\hat{B}(t)$ est l'estimation de $B(t)$ et la filtrée linéaire de $X(t)$.

Dans l'hypothèse bruit seul, $Z(t)$ est l'erreur instantanée entre $B(t)$ et son estimée $\hat{B}(t)$. Le traitement...

METHODE D'ESTIMATION DES DERIVEES SPATIALES PREMIERES D'UN CHAMP MAGNETIQUE

ment linéaire cherché est tel que soit minimale à chaque instant t , l'erreur quadratique moyenne instantanée :

$$\xi = E \left\{ (\tilde{B}(t) - \hat{B}(t)) (\hat{B}(t) - B(t)) \right\}$$

La matrice de filtrage optimal a pour expression :

$$F(\nu) = \gamma_{BX}(\nu) \cdot \gamma_X^{-1}(\nu)$$

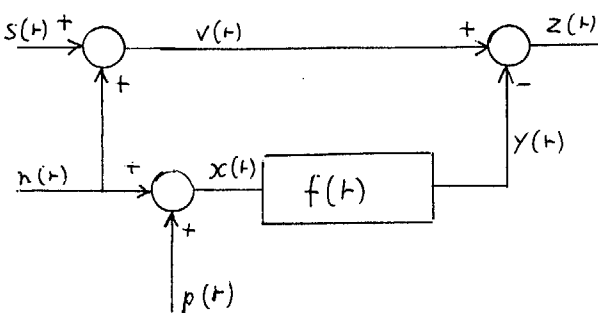
- $\gamma_{BX}(\nu)$ est la matrice interspectrale entre $B(t)$ et $X(t)$
- $\gamma_X(\nu)$ est la matrice spectrale de $X(t)$ et dont le déterminant est supposé différent de zéro.

Cette méthode optimale met en oeuvre 36 filtres linéaires. On peut envisager dans une première étape de réduire la dimension de la matrice de filtrage à 20 filtres linéaires en choisissant un vecteur d'observation de dimension 5 dont les composantes $H_{ij}(t)$ créés par la source magnétique seraient mutuellement indépendantes.

Ce choix est cependant arbitraire sans une connaissance plus approfondie des propriétés statistiques des différents bruits. Ceci nous amène à étudier un modèle simplifié par filtrage de Wiener qui prend en compte la nature des bruits corrélés ou non corrélés. On montrera que dans chaque cas cinq filtres linéaires peuvent s'avérer suffisants pour l'estimation de toutes les dérivées spatiales premières créées par la source magnétique.

2 - ETUDE DU MODELE DE BASE PAR FILTRAGE DE WIENER

Nous avons abouti au modèle de base ci-dessous :



- l'entrée primaire $v(t)$ est constituée par la somme d'un signal $s(t)$ rarement présent, déterministe inconnu et d'un bruit $n(t)$ commun à l'entrée de référence $x(t)$.
- La référence bruit seul $x(t)$ est la somme de deux bruits $n(t)$ et $p(t)$ centrés, stationnaires en second ordre.
- la sortie du système $z(t)$ est la différence entre l'entrée primaire $v(t)$ et la réponse $y(t)$ du filtre linéaire de réponse percussionnelle $f(t)$.

Le filtre linéaire optimal est exprimé sous la forme suivante :

$$f(\nu) = \frac{\gamma_{nn}(\nu) + \gamma_{np}(\nu)}{\gamma_{nn}(\nu) + \gamma_{pp}(\nu) + \gamma_{np}(\nu) + \gamma_{np}(-\nu)}$$

- $f(\nu)$ est le gain complexe du filtre linéaire
- $\gamma_{nn}(\nu), \gamma_{pp}(\nu)$ sont respectivement les densités spectrales de $n(t)$ et $p(t)$.
- $\gamma_{np}(\nu)$ est la densité interspectrale de $n(t)$ et $p(t)$

On définit le rapport ρ entre la densité spectrale de puissance du bruit sur l'entrée primaire et la densité spectrale de puissance du bruit en sortie pour juger de l'efficacité du système.

$$\rho = \frac{\gamma_{nn}(\nu)}{\gamma_{\xi\xi}(\nu)}$$

- $\gamma_{\xi\xi}(\nu)$ est la densité spectrale de $\xi(t) = n(t) - y(t)$
- Le système sera d'autant plus efficace que $\rho \gg 1$.

Dans le cadre général, la densité spectrale de puissance du bruit en sortie du système a pour expression :

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\xi}(\nu) &= \gamma_{nn}(\nu) [1 - |f(\nu)|^2] + \gamma_{pp}(\nu) |f(\nu)|^2 \\ &+ \gamma_{np}(\nu) f(-\nu) [f(\nu) - 1] \\ &+ \gamma_{np}(-\nu) f(\nu) [f(-\nu) - 1] \end{aligned}$$

Cette expression est aussi celle obtenue en estimant le bruit $n(t)$ dans le bruit additif $p(t)$ et peut encore s'écrire :

$$\gamma_{\xi\xi}(\nu) = \frac{\gamma_{nn}(\nu) \cdot \gamma_{pp}(\nu) - |\gamma_{np}|^2}{\gamma_{nn}(\nu) + \gamma_{pp}(\nu) + \gamma_{np}(\nu) + \gamma_{np}(-\nu)}$$



Elle est nulle lorsque $n(t)$ et $p(t)$ sont reliés par un filtrage linéaire ou sont dérivés d'un même bruit $b(t)$ centré et stationnaire, par deux filtres linéaires et invariants de gains complexes respectifs $g_n(\nu)$ et $g_p(\nu)$. Ce qui implique les relations suivantes :

$$-\gamma_{nn}(\nu) \cdot \gamma_{pp}(\nu) = |\gamma_{np}(\nu)|^2 \Rightarrow |c(\nu)| = 1$$

$c(\nu)$ est le coefficient de cohérence entre $n(t)$ et $x(t)$

$$-f(\nu) = e^{j\varphi} \left[\frac{\gamma_{nn}(\nu)}{\gamma_{nn}(\nu) + \gamma_{pp}(\nu) + \gamma_{np}(\nu) + \gamma_{np}(-\nu)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

La phase de gain complexe $f(\nu)$ est celle du coefficient de cohérence et plus précisément celle de l'interspectre entre $n(t)$ et $p(t)$.

$$-\varphi = \varphi_{g_n(\nu)} - \varphi_{[g_n(\nu) + g_p(\nu)]}$$

D'autres cas particuliers et évidents peuvent être signalés :

* Le bruit $p(t)$ est nul

$$\gamma_{np}(\nu) = \gamma_{np}(-\nu) = \gamma_{pp}(\nu) = 0 \Rightarrow f(\nu) = 1 \Rightarrow \gamma_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\nu) = 0$$

* Les bruits $n(t)$ et $p(t)$ sont identiques c'est-à-dire de même densité spectrale et en phase.

$$\gamma_{np}(\nu) = \gamma_{np}(-\nu) = \gamma_{pp}(\nu) = \gamma_{nn}(\nu)$$

$$\Rightarrow f(\nu) = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\nu) = 0$$

Ajoutons que le système est indéterminé lorsque le bruit $p(t)$ a même densité spectrale que $n(t)$ mais en opposition de phase

$$\gamma_{np}(\nu) = \gamma_{np}(-\nu) = -\gamma_{pp}(\nu) = -\gamma_{nn}(\nu) \Rightarrow f(\nu) = \frac{0}{0}$$

* Les bruits $n(t)$ et $p(t)$ sont décorrélés

- lorsque les bruits $n(t)$ et $p(t)$ sont décorrélés, les expressions respectives de la densité spectrale $\gamma_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\nu)$ et du gain complexe $f(\nu)$ se réduisent à :

$$\gamma_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\nu) = \frac{\gamma_{nn}(\nu) \cdot \gamma_{pp}(\nu)}{\gamma_{nn}(\nu) + \gamma_{pp}(\nu)}$$

$$f(\nu) = \frac{\gamma_{nn}(\nu)}{\gamma_{nn}(\nu) + \gamma_{pp}(\nu)}$$

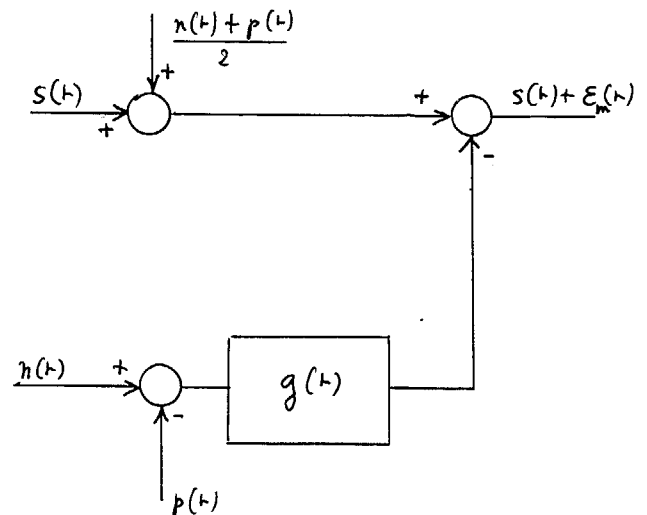
On conçoit que la densité spectrale de puissance du bruit en sortie du système sera nulle si les densités spectrales de puissance respectives de $n(t)$ et $p(t)$ ont des supports disjoints. Plus généralement, le bruit en sortie du système n'est lié qu'au rapport de puissance entre les bruits $n(t)$ et $p(t)$. Le bruit $\mathcal{E}(t)$ aura toujours une puissance inférieure au bruit de plus faible puissance que ce soit $n(t)$ ou $p(t)$. La figure 1 illustre le comportement du système. Le rapport d'efficacité qui devient,

$$\rho = \frac{\gamma_{pp}(\nu) + \gamma_{nn}(\nu)}{\gamma_{pp}(\nu)}$$

est égal à deux, lorsque les bruits $n(t)$ et $p(t)$ ont même densité spectrale. Dans ce cas, le modèle proposé est équivalent au moyennage de ces deux bruits.

2-1 - Comparaison avec le moyennage

Lorsque les bruits $n(t)$ et $p(t)$ sont non corrélés, on retrouve diverses structures équivalentes au modèle proposé. Mais il nous a semblé pertinent de s'intéresser uniquement à la structure ci-après :



STRUCTURE 1

L'entrée primaire est obtenue par moyennage des deux observations suivantes :

$$V_1(t) = S(t) + n(t)$$

$$V_2(t) = S(t) + p(t)$$

La référence bruit seul est la différence des deux bruits $n(t)$ et $p(t)$ obtenue par soustraction des deux observations $V_1(t)$ et $V_2(t)$.

Le gain complexe optimal s'écrit alors :

$$g(\nu) = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{nn}(\nu) - \gamma_{pp}(\nu)}{\gamma_{nn}(\nu) + \gamma_{pp}(\nu)}$$

Le bruit en sortie du système a même densité spectrale égale à :

$$\gamma_{E_m E_m}(\nu) = \gamma_{EE}(\nu) = \frac{\gamma_{nn}(\nu) \cdot \gamma_{pp}(\nu)}{\gamma_{nn}(\nu) + \gamma_{pp}(\nu)}$$

Le rapport d'efficacité pour ce nouveau système est égal à :

$$\rho_m = \frac{1}{4} \frac{\gamma_{nn}(\nu) + \gamma_{pp}(\nu)}{\gamma_{EE}(\nu)} = \frac{1}{4} \frac{[\gamma_{nn}(\nu) + \gamma_{pp}(\nu)]^2}{\gamma_{nn}(\nu) \cdot \gamma_{pp}(\nu)}$$

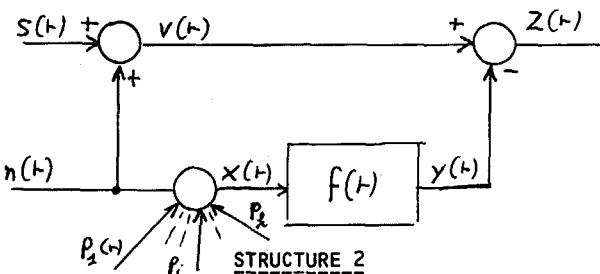
Cette nouvelle structure permet de mettre en valeur l'apport du filtrage de Wiener en comparaison avec le moyennage classique lorsque les bruits $n(t)$ et $p(t)$ sont décorrélés et de puissance différente. On le montre sur la figure 2.

2-2 - Modèle de base généralisé

On considère que le bruit $p(t)$ est composé de plusieurs bruits additifs :

$$p(t) = \sum_{i=1}^k p_i(t)$$

On obtient le modèle de base généralisé suivant :



Lorsque les bruits $n(t)$ et $p_1(t), \dots, p_i(t), \dots, p_k(t)$ sont dérivés d'un même bruit $b(t)$ centré et stationnaire au second ordre par $(k+1)$ filtres linéaires et invariants de gains complexes respectifs $g_n(\nu), g_{p1}(\nu), \dots, g_{pi}(\nu), \dots, g_{pk}(\nu)$, on a les relations suivantes :

$$-\gamma_{nn}(\nu) = \gamma_{p_i p_i}(\nu) = |\gamma_{n p_i}(\nu)|^2 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$-\gamma_{EE}(\nu) = 0$$

Le gain complexe devient alors :

$$f(\nu) = e^{j\varphi} \left[\frac{\gamma_{nn}(\nu)}{\gamma_{nn}(\nu) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\gamma_{p_i p_j}(\nu) + \gamma_{p_j p_i}(-\nu)) + \sum_{l=1}^k (\gamma_{n p_l}(\nu) + \gamma_{n p_l}(-\nu) - \gamma_{p_l p_l}(\nu))} \right]^{\frac{1}{2}}$$

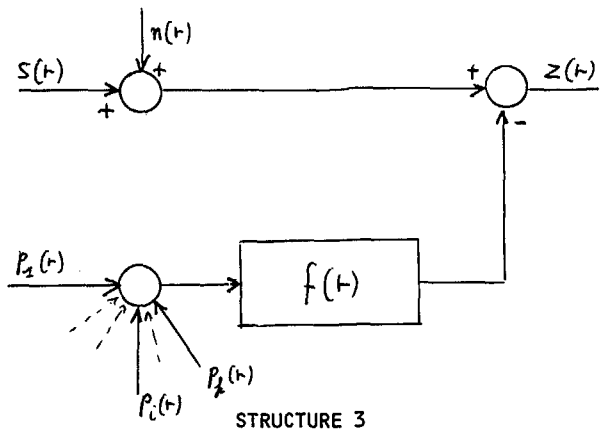
avec :

$$\varphi = \varphi_{g_n(\nu)} - \varphi_{[g_n(\nu) + \sum_{i=1}^k g_{p_i}(\nu)]}$$

Lorsque tous les bruits sont décorrélés, le rapport d'efficacité du système est lié au rapport entre la somme des puissances des différents bruits $p_i(t)$ et de la puissance du bruit $n(t)$. On peut se reporter à la figure 1.

2 -3 - Modèle de base classique généralisé

On retrouve ce modèle de base classique généralisé lorsque le bruit $n(t)$ n'appartient pas à l'entrée de référence $x(t)$



STRUCTURE 3

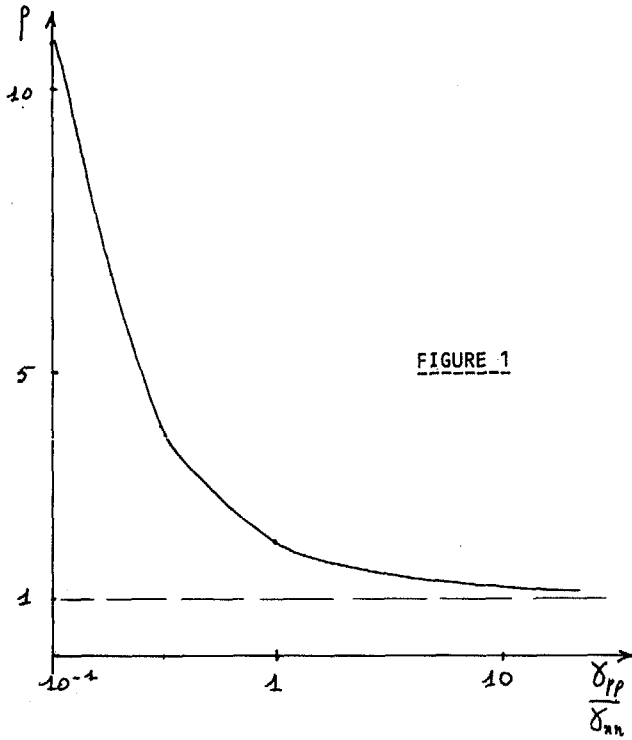


FIGURE 1

Avec les mêmes conditions que précédemment, à savoir que le module du coefficient de cohérence est égal à l'unité, le gain complexe se simplifie et devient :

$$f(\nu) = e^{j\varphi} \left[\frac{\delta_{nn}(\nu)}{\sum_{i,j=1}^k (\delta_{P_i P_j}(\nu) + \delta_{P_i P_j}(-\nu)) - \sum_{e=1}^k \delta_{P_e P_e}(\nu)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

avec :

$$\varphi = \varphi_{g_n(\nu)} - \varphi \left(\sum_{i=1}^k g_{P_i}(\nu) \right)$$

3 - APPLICATIONS

Trois structures de filtrage de Weiner précédemment étudiées sont à notre disposition. Nous allons montrer que celles-ci peuvent être suffisantes pour recevoir l'ensemble du problème posé selon la nature des bruits (corrélés ou non corrélés) et suivant qu'il s'agit d'estimer les composantes utiles extradiagonales ou diagonales du tenseur gradient.

3-1 - Bruits non corrélés

On considère que :

$$E \{ b_{ij}(t) \} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 3\}$$

$$E \{ b_{ij}(t) \cdot b_{ij}(t-\tau) \} = \sigma_{b_{ij}}^2 \delta(\tau) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 3\}$$

$$E \{ b_{ij}(t) \cdot b_{kl}(t-\tau) \} = 0, \quad \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, 3\} \text{ et } (i, j) \neq (k, l)$$

3-1-1 - Estimation des composantes utiles et extradiagonales

On utilise le modèle de base. La référence bruit seul est obtenue par soustraction des observations $V_{ij}(t)$ et $V_{ji}(t)$ ($i \neq j$).

On a sur l'entrée primaire :

$$V(t) = H_{ij}(t) + b_{ij}(t)$$

L'entrée de référence est constituée de :

$$n(t) = b_{ij}(t) \quad \text{et} \quad p(t) = -b_{ij}(t)$$

avec :

$$X(t) = b_{ij}(t) - b_{ji}(t)$$

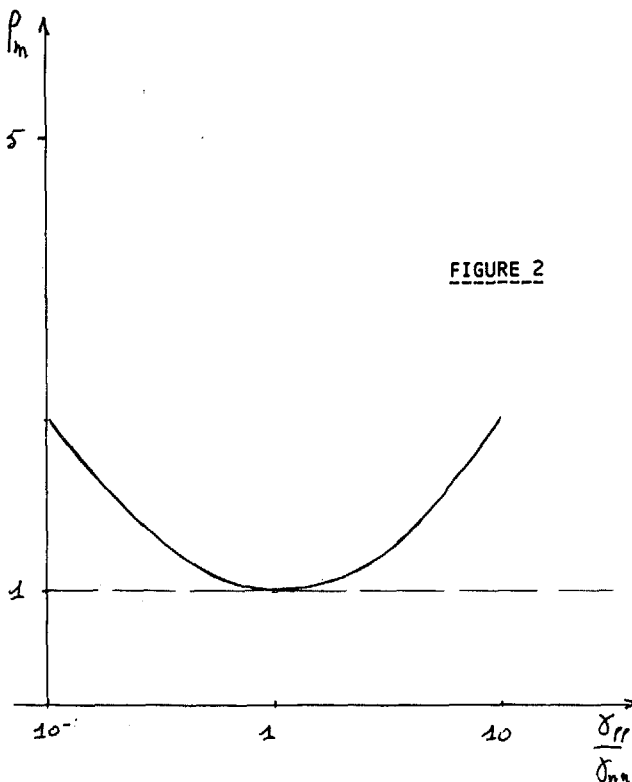


FIGURE 2

La composante extradiagonale estimée est :

$$\widehat{H}_{ij}(t) = H_{ij}(t) + \varepsilon_{ij}(t)$$

avec :

$$\sigma_{\varepsilon_{ij}}^2 = \frac{\sigma_{b_{ij}}^2 \times \sigma_{b_{ji}}^2}{\sigma_{b_{ij}}^2 + \sigma_{b_{ji}}^2}$$

Cette dernière expression montre que si on choisit $V_{ji}(t)$ sur l'entrée primaire au lieu de $V_{ij}(t)$, la puissance de bruit en sortie du système reste inchangée. On rappelle que le moyennage des deux observations $V_{ij}(t)$ et $V_{ji}(t)$ est suffisant lorsque les bruits $b_{ij}(t)$ et $b_{ji}(t)$ ont même puissance.

3-1-2 - Estimation des composantes utiles diagonales

La référence bruit seul est obtenue par sommation des termes diagonaux $V_{ii}(t)$ du tenseur gradient. On choisit le modèle de base généralisé. On prend sur l'entrée primaire, une composante diagonale quelconque :

$$V(t) = H_{ii}(t) + b_{ii}(t)$$

La référence bruit seul devient :

$$v(t) = \sum_{i=1}^3 V_{ii}(t)$$

avec :

$$h(t) = b_{ii}(t) \quad p(t) = b_{kk}(t) + b_{ll}(t)$$

$$\forall i, k, l, \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq k, \quad i \neq l, \quad k \neq l$$

La puissance de bruit en sortie du système est :

$$\sigma_{\varepsilon_{ii}}^2 = \frac{(\sigma_{b_{kk}}^2 + \sigma_{b_{ll}}^2) \cdot \sigma_{b_{ii}}^2}{\sum_{j=1}^3 \sigma_{b_{jj}}^2}$$

On peut montrer aisément lorsque les bruits $b_{ij}(t)$ sont blancs :

$$\widehat{H}_{ii}(t) = H_{ii}(t) + \varepsilon_{ii}(t) = -\left(\frac{H_{kk}}{k} + \frac{H_{ll}}{l}\right) + \varepsilon_{ii} = -\widehat{H}_{kk} - \widehat{H}_{ll}$$

En effet :

$$\varepsilon_{ii}(t) + \varepsilon_{kk}(t) + \varepsilon_{ll}(t) = 0 \quad \forall i, k, l \in \{1, 2, 3\}$$

$$i \neq k \quad i \neq l \quad k \neq l$$

Ce qui permet de conclure qu'il suffit seulement d'estimer deux composantes utiles diagonales.

3-2 - Bruits corrélés

Lorsque les bruits sont corrélés, il est préférable d'utiliser une unique référence bruit seul obtenue par sommation des termes diagonaux du tenseur gradient. Contrairement à celles obtenues par soustraction des composantes extradiagonales, elle évite une éventuelle indétermination du système.

Les composantes diagonales seront estimées à partir du modèle de base généralisé. Tandis que pour les composantes extradiagonales, on utilisera le modèle de base classique généralisé.

CONCLUSION

L'étude que nous avons menée a permis de mettre en évidence, les limites théoriques d'un modèle par filtrage de Wiener s'appuyant sur toute l'information contenue dans le tenseur gradient. Globalement, on ne peut espérer d'un tel système, une amélioration très sensible du rapport signal sur bruit de toutes les composantes, lorsque les bruits sont mutuellement non corrélés. Cependant, on a pu montrer dans ce cas l'apport du filtrage de Wiener par rapport au moyennage de deux observations pour l'extraction d'un signal $S(t)$.

Dans l'avenir il serait intéressant de traiter simultanément le problème de détection-estimation des dérivées spatiales premières d'un champ magnétique. Le système étudié pourrait servir de base à un détecteur par critère de contraste.

REFERENCES

- (1) W.M WYNN, C.P FRAHM, P.J. CARROLL, R.H. CLARK, J. WELLHONER, M.J. WYNN : Advanced Superconducting gradiometer/magnetometer arrays and a novel signal processing technique : I.E.E.E. transactions on Magnetics, vol. MAG 11, n° 2, mars 1975
- (2) AYANT, CHAUVIN, COURTY, CHIRON : Exploitation des dérivées spatiales premières du champ magnétique créé par un dipole. Note LETI, CEA- C.E.N. GRENOBLE - Novembre 1979.
- (3) B. ROUVRAIS : Localisation spatiale d'un dipôle magnétique mobile ou non : Note GESMA, DCAN BREST Décembre 1982.

