

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE DES SIGNAUX ET TRANSFORMATIONS  
AFFINES SUR LE TEMPS

APPLICATION A UN PROBLEME D'IMAGERIE RADAR

P. BERTRAND - F. TARDIVEL

OFFICE NATIONAL D'ETUDES ET DE RECHERCHES AEROSPATIALES - B.P. 72 92322 CHATILLON CEDEX

---

## RESUME

Les descriptions temps-fréquence usuelles des signaux sont liées à une représentation du groupe des translations en temps et fréquence dont l'intérêt vient de l'étude des signaux à bande étroite. Ce groupe opère sur les signaux complexes et ne laisse pas invariant le sous-espace des signaux analytiques de Gabor. Considérant alors le groupe des transformations affines sur le temps, qui se représente dans cet espace, il est possible d'obtenir des représentations temps-fréquence véritablement associées aux signaux physiques. A titre d'illustration les résultats obtenus sont appliqués à la représentation distance-couleur de cibles radar.

## SUMMARY

Usual time-frequency pseudodensities are related to a representation of the group of translations in time and frequency whose main interest comes from the study of narrow band signals. This group acts on complex signals and fails to conserve the subspace of Gabor analytic signals. The consideration of the affine transformations on time permits to avoid this difficulty and leads to time-frequency representations which are truly associated to physical signals. As an illustration the results are applied to explicit construction of position-color representations for radar targets.



### I - INTRODUCTION -

L'idée de représentation temps-fréquence est étroitement associée à celle d'invariance de phase des grandeurs observées.

Analytiquement un changement de phase du signal  $s(t)$  (fonction réelle du temps) est représenté par une transformation du type :

$$(1) \quad s(t) \longrightarrow s'(t) = e^{-i\varphi} S_{-}(t) + e^{i\varphi} S_{+}(t)$$

où  $S_{\pm}(t)$  désignent les parties à fréquences  $> 0$  et  $< 0$  de  $s(t)$  et où  $\varphi \in (0, 2\pi)$

Diverses raisons peuvent être avancées pour réduire le champ des observations possibles à celles qui sont invariantes par (1). En théorie de la communication cette réduction est liée à la nécessité d'interpréter les signaux indépendamment des canaux qui les ont transmis (cf [1] et [2]). En imagerie radar (cf §4) ce n'est pas la nécessité mais le choix du concept d'image qui provoque le rejet de l'information de phase absolue.

Pour traiter pratiquement l'invariance de phase il est commode d'introduire la partie utile du signal définie par :

$$(2) \quad U(t_1, t_2) = S^*(t_1) S(t_2)$$

où  $S(t)$  désigne le signal analytique de Gabor. De cette manière on représente par un élément unique la classe d'équivalence des signaux qui se déduisent d'un signal donné par des transformations du type (1).

Une représentation temps-fréquence  $P(t, f)$  est une autre écriture de (2) telle que :

i) la correspondance

$$U(t_1, t_2) \longleftrightarrow P(t, f)$$

est linéaire

ii)  $P(t, f)$  est une fonction réelle

iii) la signification de  $P$  est proche, dans un sens à préciser, de celle d'un spectre instantané.

Si les signaux étudiés sont à bande étroite l'amplitude et la phase du signal analytique sont directement liées à l'enveloppe et à la fréquence instantanée du signal réel. Ces interprétations sont stables dans les translations de temps et fréquence définies sur les signaux complexes par :

$$(3) \quad S(t) \longrightarrow S'(t) = e^{2i\pi f_0 t} S(t - t_0)$$

Ces transformations constituent une représentation à une phase près du groupe des translations en temps et fréquence. Suivant une méthode donnée dans [3]

l'exploitation systématique de ce groupe permet une construction tomographique de la fonction de Ville-Wigner qui s'écrit :

$$(4) \quad P(t, f) = \int e^{-2i\pi t \nu} S^*(f + \frac{\nu}{2}) S(f - \frac{\nu}{2}) d\nu$$

bien que cette fonction puisse rendre de grands services, sa signification physique n'est claire que lorsqu'elle est appliquée à la représentation de signaux à bande étroite. Sa principale faiblesse est de reposer sur un groupe de transformations qui ne possède pas de représentation dans le sous-espace des signaux analytiques. Pour résoudre cette difficulté il a été proposé dans [3] d'abandonner les transformations (3) au profit des transformations affines sur le temps c'est-à-dire des changements d'horloge du type :

$$(5) \quad t \longrightarrow a(t+b)$$

Le groupe correspondant a déjà exploité, tant en

théorie du signal [4] qu'en mécanique quantique [5]. Les transformations (5) commutent avec le passage :

signal réel  $\longleftrightarrow$  signal analytique  
 ce qui n'était pas le cas avec les transformations (3).

L'essentiel de ce qui suit est un exposé des résultats obtenus en exploitant les représentations de (5). La construction d'une représentation temps-fréquence fondée sur le groupe affine est brièvement rappelée dans le paragraphe 2. Dans le paragraphe 3 on associe à la représentation obtenue une densité  $\geq 0$  résultant d'une moyenne locale dans le plan temps-fréquence. Cette densité est appelée "régularisée affine" pour la distinguer de la régularisée usuelle obtenue à partir de (4). Dans le paragraphe 4 on montre l'analogie du problème de l'imagerie radar et de la représentation temps-fréquence et on donne quelques exemples d'application des formules obtenues à l'analyse des cibles.

### II - REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE -

La construction de représentations temps-fréquence compatibles avec le groupe des transformations affines sur le temps a été donnée dans [3]. Le cadre de travail est l'espace de Hilbert  $L^2(0, \infty)$  des signaux  $S(f)$  muni du produit scalaire :

$$(6) \quad (S_1, S_2) = \int_0^{\infty} f^{2n+1} S_1^*(f) S_2(f) df, \quad n \in \mathbb{R}$$

et la représentation  $P(t, f)$  obtenue assure la commutativité du diagramme :

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} S(f) & \longrightarrow & S'(f) = a^{n+1} e^{-2i\pi abf} S(af) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(t, f) & \longrightarrow & P'(t, f) = a^m P(a^{-1}t - b, af) \end{array}$$

où  $m \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}$ .

Compte tenu de ces lois de transformations, les valeurs moyennes des observables peuvent s'exprimer à partir du signal par :

$$(8) \quad \langle A \rangle = \int_0^{\infty} df_1 \int_0^{\infty} df_2 A^*(f_1, f_2) S(f_1) S^*(f_2) (f_1 f_2)^{2n+1}$$

et à partir de la représentation temps-fréquence par :

$$(9) \quad \langle A \rangle = \int_0^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' A(t, f) P(t, f) f^{2m}$$

Dans son principe la construction de  $P(t, f)$  est entièrement fondée sur une décomposition du groupe affine en sous-groupes à un paramètre et sur l'étude des classes d'observables invariantes par chacun de ces sous-groupes. La forme générale obtenue s'écrit :

$$(10) \quad P(t, f) = f^{2n+2-m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi u t f} \left( \frac{u}{2 \operatorname{sh} \frac{u}{2}} \right)^{2n+2} S\left(\frac{uf e^{-\frac{u}{2}}}{2 \operatorname{sh} \frac{u}{2}}\right) S^*\left(\frac{uf e^{\frac{u}{2}}}{2 \operatorname{sh} \frac{u}{2}}\right) du$$

Cette expression dépend des deux nombres réels  $m$  et  $n$  figurant dans (7). L'adjonction de la contrainte :

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(t, f) dt = |S(f)|^2$$

impose la relation :

$$(12) \quad m = 2n + 1$$



REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE DES SIGNAUX ET TRANSFORMATIONS  
AFFINES SUR LE TEMPS

APPLICATION A UN PROBLEME D'IMAGERIE RADAR

et la relation (10) devient dans ce cas :

$$(13) \quad P(t, f) = f \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi uft} \left( \frac{u}{2 \operatorname{sh} \frac{u}{2}} \right)^{2n+2} S\left(\frac{ufe^{-\frac{u}{2}}}{2 \operatorname{sh} \frac{u}{2}}\right) S^*\left(\frac{ufe^{\frac{u}{2}}}{2 \operatorname{sh} \frac{u}{2}}\right) du$$

Parmi les propriétés de cette représentation on peut noter :

- i)  $P(t, f) \equiv 0$  pour  $f < 0$   
ii) au signal monochromatique

$$S(f) = \delta(f - f_0)$$

correspond la distribution

$$P(t, f) = \delta(f - f_0)$$

- iii) Si  $P_1$  et  $P_2$  désignent les représentations des signaux  $S_1$  et  $S_2$  alors :

$$(14) \quad \int_0^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} dt P_1(t, f) P_2(t, f) f^{2m} = |(S_1, S_2)|^2$$

iv) Si le signal étudié est à bande étroite, l'intégration dans (13) est limitée à un voisinage de  $u = 0$  et pour tout  $n$  (13) admet la fonction de Ville-Wigner (4) comme forme approchée.

En pratique le choix de  $n$  est dicté par la nature du signal. En imagerie radar (cf §4) le signal étudié se transforme suivant :

$$S(f) \longrightarrow S'(f) = e^{-2i\pi abf} S(af)$$

L'examen du diagramme (7) montre que ce cas correspond à la valeur  $n = -1$  et la représentation temps-fréquence associée s'écrit par conséquent :

$$(15) \quad P(t, f) = f \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi fut} S\left(\frac{u}{2 \operatorname{sh} \frac{u}{2}}\right) S^*\left(\frac{ufe^{\frac{u}{2}}}{2 \operatorname{sh} \frac{u}{2}}\right) du$$

Cette expression a la particularité d'associer au signal réel localisé dans le temps :

$$S(t) = \delta(t - t_0)$$

c'est-à-dire au signal complexe :

$$S(f) = Y(f) e^{-2i\pi ft_0}$$

la représentation

$$P(t, f) = \delta(t - t_0)$$

En termes d'imagerie radar cette propriété exprime simplement la localisabilité parfaite d'un réflecteur idéal dont on connaît le coefficient de réflexion pour toute valeur positive de  $f$ .

### III - REPRESENTATION REGULARISEE -

En pratique ce n'est pas la représentation temps-fréquence qui présente un intérêt mais sa forme régularisée.

Dans le cas des signaux à bande étroite une telle représentation a la forme d'une moyenne locale de la fonction de Ville-Wigner pondérée par une distribution gaussienne :

$$(16) \quad \tilde{P}_{\sigma}(t, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \int P(t, f') \exp\left\{-\frac{(f-f')^2}{2\sigma^2} - \delta\pi^2\sigma^2(t-t')^2\right\} dt' df'$$

où  $\sigma \in \mathbb{R}_+$ .

Compte tenu des propriétés de la représentation de Ville-Wigner cette régularisée s'écrit aussi

$$(17) \quad \tilde{P}_{\sigma}(t, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(f') \exp\left\{-\frac{(f-f')^2}{4\sigma^2} + 2i\pi t f'\right\} df' \right|^2$$

L'expression (17) est construite à partir du produit scalaire usuel du signal étudié avec le signal de Gabor :

$$(18) \quad (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(f-f_0)^2}{4\sigma^2} - 2i\pi t_0 f\right\}$$

Cette opération est compatible avec les translations de temps et fréquences en ce sens qu'à toute translation du signal :

$$S(f) \longrightarrow S'(f) = e^{2i\pi f t_0} S(f - f_0)$$

correspond la transformation :

$$\tilde{P}_{\sigma}(t, f) \longrightarrow \tilde{P}'_{\sigma}(t, f) = \tilde{P}_{\sigma}(t - t_0, f - f_0)$$

de la régularisée.

Dans la suite (17) sera appelée régularisée de Gabor du signal  $S$ .

A partir de (10) il est également possible, par moyenne locale, d'obtenir une forme régularisée compatible avec les transformations affines, c'est-à-dire vérifiant :

$$S(f) \longrightarrow S'(f) = a^{n+1} e^{-2i\pi abf} S(af)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\tilde{P}(t, f) \longrightarrow \tilde{P}'(t, f) = a^m \tilde{P}(a^{-1}t - b, af)$$

La forme générale de cette régularisée s'écrit :

$$(19) \quad \tilde{P}(t, f) = f^{-m} \left| \int_0^{\infty} S(f') \Psi_{t, f}^*(f') f'^{2n+1} df' \right|^2$$

avec :

$$(20) \quad \Psi_{t, f}(f') = \phi\left(\frac{f'}{f}\right) e^{-2i\pi f' t} f^{-n-1}$$

où  $\phi$  désigne une fonction quelconque définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

L'expression de (19) comme moyenne locale de (10) s'établit en utilisant (14).

Les équivalents des signaux de Gabor (18) sont les signaux (20) pour lesquels :

$$(21) \quad \phi(u) = \left[ \frac{(4\pi\lambda)^{4\pi\lambda+2n+1}}{\Gamma(4\pi\lambda+2n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} u^{2\pi\lambda-n-1} e^{-2\pi\lambda u}$$

où  $\lambda$  est un nombre réel  $\geq 0$  qui joue un rôle semblable à celui du paramètre  $\sigma$  figurant dans (18) et où  $\Gamma(\alpha)$  désigne la fonction eulérienne

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$$

Dans la suite l'expression (19) explicitée à l'aide de (20) et (21) est appelée (représentation) régularisée affine. Le coefficient numérique figurant



dans (21) a été choisi de manière à assurer la relation :

$$(22) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_{\lambda}(t, f) dt = |S(f)|^2$$

Les densités (17) et (19) possèdent des interprétations simples. La régularisée de Gabor correspond à l'analyse temporelle des signaux après passage à travers une fenêtre spectrale de largeur constante (et faible) fixée par  $\sigma$ . La régularisée affine correspond également à une analyse temporelle mais après passage à travers une fenêtre spectrale de largeur relative constante déterminée par  $\lambda$  (type analyse par octave).

Si on estime cette largeur par l'écart type  $\sigma_f$  associé au spectre du signal (20)-(21) on obtient la relation :

$$(23) \quad \frac{\sigma_f}{\langle f \rangle} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}}$$

où  $\langle f \rangle$  représente la fréquence moyenne. Il est possible de montrer qu'une estimation similaire de la fenêtre temporelle permet de retrouver la relation :

$$(24) \quad \sigma_t \sigma_f = \frac{1}{4\pi}$$

#### IV - APPLICATION EN IMAGERIE RADAR -

En imagerie radar unidimensionnelle la grandeur mesurée est un coefficient de rétrodiffusion complexe  $H(f)$  et le problème consiste à obtenir une répartition distance-couleur de l'énergie renvoyée par la cible.

Pour construire une telle image on exploite le modèle d'une réflexion par des points brillants colorés indépendants qui introduisent tous le même déphasage (arbitraire) lors de la réflexion. Lorsque ce modèle est déformé de telle sorte que les points soient simultanément :

- déplacés en position par homothétie de rapport  $\alpha$  et translation de valeur  $\delta x$ .
- déplacés en couleur par homothétie de rapport  $\frac{1}{\alpha}$

les nouveaux coefficients de rétrodiffusion  $H'(f)$  s'expriment à partir des anciens par :

$$(25) \quad H'(f) = e^{-4i\pi f \frac{\delta x}{c}} H(\alpha f)$$

Dans la même déformation l'image cherchée  $R(x, f)$  doit se transformer suivant :

$$(26) \quad R(x, f) \rightarrow R'(x, f) = \frac{1}{\alpha} R\left(\frac{x}{\alpha} - \delta x, \alpha f\right)$$

de manière à conserver la relation :

$$\int R(x, f) dx = |H(f)|^2$$

Les relations (25) et (26) montrent que l'on se trouve encore en présence de représentations du groupe affine et le problème de la construction de  $R$  est ainsi identique à celui qui a été résolu

en représentation temps-fréquence. En fait un examen du diagramme (7) montre que le problème de l'imagerie radar correspond au cas particulier  $n = m = -1$  des représentations temps-fréquences. Un simple changement de variable conduit alors à :

$$(27) \quad R(x, f) = \frac{2}{c} F x \int_{-\infty}^{\infty} e^{4i\pi f u \frac{x}{c}} H^*\left(f \frac{ue^{-\frac{x}{c}}}{2sh\frac{x}{c}}\right) H\left(f \frac{ue^{\frac{x}{c}}}{2sh\frac{x}{c}}\right) du$$

Par expérience [1] on sait que ce n'est pas ce genre d'image qui est utile mais sa forme régularisée (cf (19)) qui s'écrit ici :

$$(28) \quad \tilde{R}_{\lambda}(x, f) = \frac{2}{c} F \left| \int_0^{\infty} H(f') \Psi_{\lambda}^*(f'; x, f) df' \right|^2$$

avec :

$$(29) \quad \Psi_{\lambda}(f'; x, f) = \left[ \frac{(4\pi\lambda)^{4\pi\lambda-1}}{\Gamma(4\pi\lambda-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f'}{f}\right)^{2\pi\lambda} e^{-2\pi\lambda \frac{f'}{f}} e^{-2i\pi f' \frac{x}{c}} f'^{-1}$$

L'expression (28) est toujours appelée régularisée affine. Le paramètre  $\lambda$  précise la largeur relative de la fenêtre spectrale d'analyse. En limite  $\lambda \rightarrow \infty$  cette largeur tend vers zéro et en limite  $\lambda \rightarrow 0$  la fenêtre s'ouvre sur tout le demi axe  $f \geq 0$ .

Si on se limite à des analyses à faible largeur de bande il est possible d'exploiter la régularisée de Gabor (cf (17)) qui s'écrit ici :

$$(30) \quad \tilde{R}_{\sigma}(x, f) = \frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f') \exp\left\{-\frac{(f-f')^2}{4\sigma^2} + \frac{4i\pi f' x}{c}\right\} df' \right|^2$$

Le paramètre  $\sigma$  fixe la largeur de la fenêtre spectrale d'analyse. En limite  $\sigma \rightarrow 0$  cette largeur tend vers zéro.

Des programmes de calcul des formules (28) et (30) ont été établis et adjoints à la base d'analyse de signatures radar de l'ONERA [6]. A titre d'exemples, les figures 1 et 2 donnent respectivement la régularisée de Gabor et la régularisée affine d'un réflecteur parfait. Les résolutions en distance et en fréquence sont les mêmes au centre de chaque figure. On peut observer que la régularisée de Gabor n'est pas identiquement nulle dans la région  $f < 0$ . La comparaison des deux figures met en évidence la variation de la résolution avec la fréquence dans la représentation affine. La figure 2 montre en effet une élévation de la ligne de crête avec la fréquence qui s'interprète à l'aide des relations (22), (23) et (24).

Ce qui a été dit pour les figures 1 et 2 peut être répété pour les figures 3 et 4 à ceci près que la cible étudiée est cette fois une sphère. Comme dans le cas précédent, les coefficients de rétrodiffusion traités résultent d'un calcul.

La figure 5 donne un exemple d'application de la régularisée affine au traitement des coefficients de rétrodiffusion expérimentaux pour un missile vu de face. Parcourant l'axe des distances de la gauche vers la droite on distingue successivement : le nez du missile, les bords d'attaque et de fuite des ailes, l'entrée d'air et le culot.

REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE DES SIGNAUX ET TRANSFORMATIONS AFFINES SUR LE TEMPS

APPLICATION A UN PROBLEME D'IMAGERIE RADAR

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - P. Bertrand et C. Fugier-Garrel - Formulation de la théorie de la communication dans le plan temps-fréquences - Aspects pratiques - GRETSI - 1981
- 2 - P. Bertrand - Représentation des signaux dans le plan temps-fréquence - La Recherche Aérospatiale (1983) n° 1 p. 1-12
- 3 - J. Bertrand et P. Bertrand - Représentation temps-fréquence des signaux - C.R. Acad. Sc. Paris, 299, série I (1984) p. 635-638.
- 4 - A. Grossmann et J. Morlet - Décomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape - SIAM J. Math. Anal. Vol. 15 (1984) p. 723-736.
- 5 - E.W. Aslaksen et J.R. Klauder - Unitary representations of the affine group, J. Math. Phys. 9, 1968, p. 206-211 ; continuous representations using the affine group, J. Math. Phys., 10, 1969, p. 2267-2275.
- 6 - F. Tardivel, R. Guern, J.P. Marcellin - Système de mesure automatique des signatures radar - Note technique ONERA 45/4341 SN (1984).

OBJET THEORIQUE : OBJET BLANC ( 1 M\*\*2 )

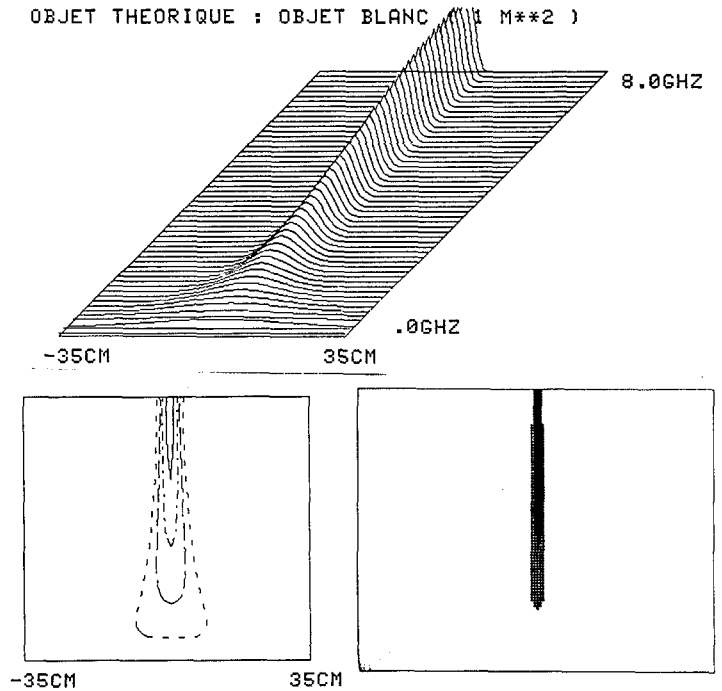


Fig. 2 - Régularisée affine d'un réflecteur parfait.

OBJET THEORIQUE : OBJET BLANC ( 1 M\*\*2 )

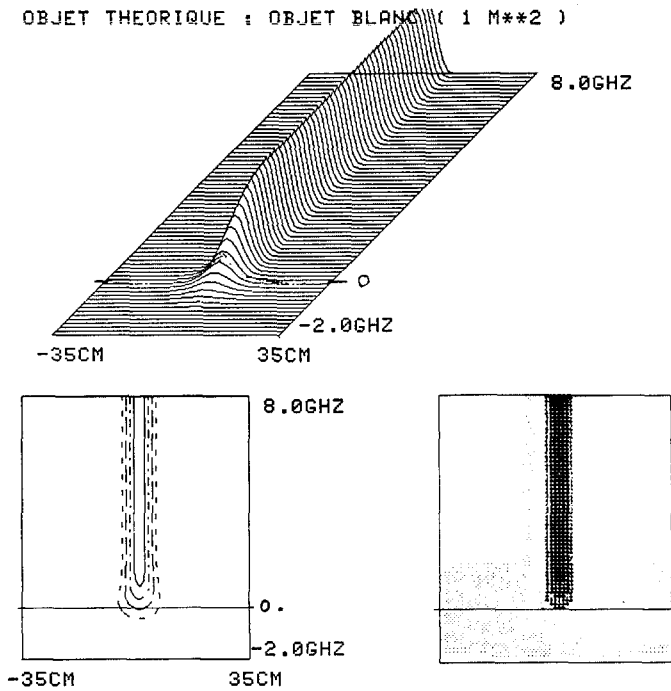


Fig. 1 - Régularisée de Gabor d'un réflecteur parfait.

OBJET THEORIQUE : 1 SPHERE R=1.0 CM

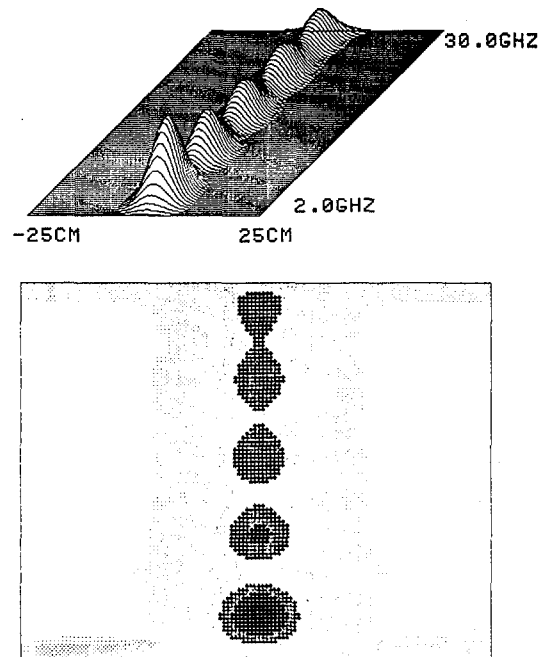


Fig. 3 - Régularisée de Gabor d'une sphère.



REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE DES SIGNAUX ET TRANSFORMATIONS  
AFFINES SUR LE TEMPS

APPLICATION A UN PROBLEME D'IMAGERIE RADAR

OBJET THEORIQUE : 1 SPHERE R=1.0 CM

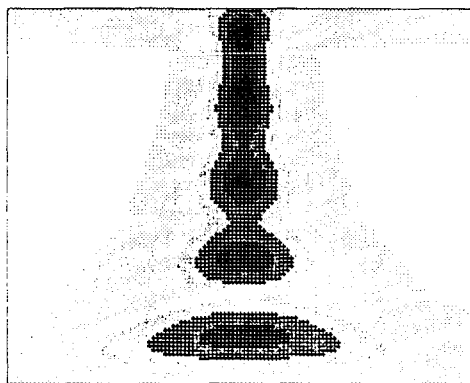
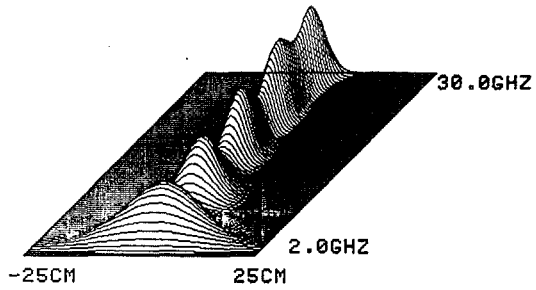


Fig. 4 - Régularisée affine d'une sphère.

MAQUETTE DE MISSILE  
VUE DE FACE

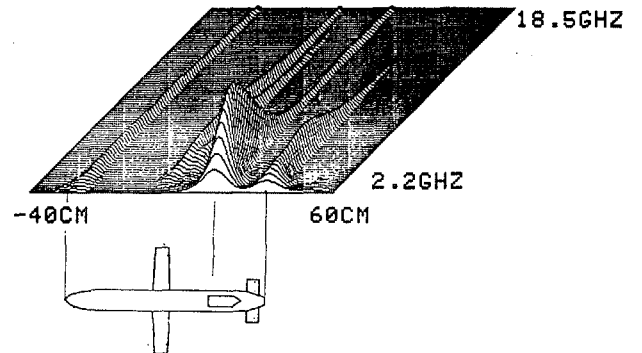


Fig. 5 - Régularisée affine obtenue à partir de mesures expérimentales.