



NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

DETERMINATION DES FONCTIONS SPHEROÏDALES  
GENERALISEES PAR METHODE OPTIQUE ITERATIVE

J.L. de BOUGRENET de la TOCAYE et P. PELLAT-FINET

Groupe d'Etudes Signaux et Systèmes (GESSY)- Université de TOULON et du VAR - 83130 LA GARDE - FRANCE

---

**RESUME**

On rappelle que les modes de résonance d'une cavité optique confocale sont de nature sphéroïdale. En plaçant dans la cavité un élément amplificateur de lumière il devient possible d'obtenir ainsi physiquement ces modes et par conséquent l'ensemble des fonctions sphéroïdales auxquelles ils correspondent.

Les lasers sont un exemple classique de réalisation physique d'un tel oscillateur. Cependant la présence dans ce cas d'un couplage entre oscillation et résonance impose, sur les dimensions de la cavité, des contraintes qui conduisent à ne considérer qu'un aspect asymptotique du problème sphéroïdal initial.

On montre que la réalisation d'un résonateur utilisant un cristal de BSO (Oxyde de Bismuth Silicium) comme milieu actif, est par contre parfaitement bien adaptée à une détermination générale de ces fonctions.

On présente enfin un certain nombre de modes sphéroïdaux obtenus selon ce principe et l'on discute de l'intérêt général d'une telle approche pour le calcul des fonctions sphéroïdales.

**SUMMARY**

Previous analysis have shown that the oscillating modes of an optical confocal resonator are typically spheroidal. By introducing a light amplifier in this resonator it is then possible to physically obtain these modes and thus the class of spheroidal wave functions themselves.

Lasers are a classic example of a physical realization of such an oscillator. Meanwhile, in this case, the presence of a coupling between oscillation and resonance imposes, on the resonator's dimensions, constraints which lead to consider only an asymptotic aspect of the initial spheroidal problem.

There we demonstrate that a resonator using a BSO crystal (Bismuth Silicon Oxyde) as an active medium is on the other hand particularly well suited to give a general calculation of these functions.

Finally we present some spheroidal modes thus obtained and we discuss the general interest of such an approach for calculating spheroidal wave functions.



## 1. Introduction

La preuve de l'intérêt de l'utilisation de bases sphéroïdales dans de nombreux problèmes de traitement du signal n'est plus à faire. Il suffit de se reporter aux travaux de D. Slepian sur ces fonctions et d'examiner le grand nombre d'applications qu'en donne cet auteur [1].

Il n'en reste pas moins que le principal écueil à l'emploi de telles bases demeure encore lié de nos jours à la difficulté que présente leur calcul numérique [2]. Face à un tel obstacle nous avons cherché pour notre part à obtenir ces fonctions à partir d'un système physique tenant lieu de résonateur pour l'ensemble de celles-ci.

Le principe d'un tel résonateur est connu et peut être illustré dans le domaine optique par certains lasers à cavité confocale. L'étude théorique menée par Fox et Li en ce domaine [3], a en effet très clairement démontré la nature sphéroïdale des modes de résonance de ce type de cavité.

La réalisation de lasers utilisant de tels résonateurs témoigne ainsi de la possibilité d'une genèse physique de ces fonctions.

Nous allons cependant montrer les insuffisances d'un tel modèle et préciser de quelle façon celui-ci peut être dépassé.

*Remarque : Devant la complexité du sujet abordé nous nous sommes volontairement limités à ne donner, aussi bien sur le plan théorique que pratique, qu'une formulation très schématique du problème considéré.*

## 2. Résonateur optique confocal et fonctions sphéroïdales

Considérons le résonateur optique constitué de deux miroirs confocaux de rayon  $r_0$  séparés de la distance  $d$  et parcouru par une onde monochromatique cohérente (Figure 1).

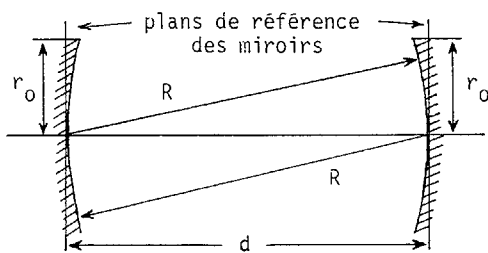


Fig.1 - Cavité à miroirs confocaux de rayon de courbure R.

La relation de passage entre les champs  $U_0$  et  $U_1$  observés respectivement sur chacun des deux miroirs est donnée, en termes de la théorie scalaire de la diffraction, par l'expression :

$$U_1 = K U_0$$

où  $K$  est l'opérateur intégral de Fresnel-Kirchhoff.

De la même façon, le champ  $U_p$  obtenu après  $p$  transits de l'onde dans la cavité est donné par la relation de récurrence :

$$U_p = K U_{p-1} = K^p U_0$$

Dans ces conditions, la présence de régimes stationnaires ou modes de la cavité, tels qu'au-delà d'une certaine valeur de  $p$  :

$$U_p = \gamma U_{p-1} \quad \text{avec } |\gamma| < 1,$$

exprime directement l'existence de solutions propres

de l'opérateur  $K$  telles que :

$$\gamma U_{p-1} = K U_{p-1}$$

Dans le cas de la cavité confocale, l'existence de telles solutions a été démontrée par Fox et Li [3].

Pour des miroirs à pupilles circulaires et une représentation en variables séparées du champ :

$$S_{nm}(r, \theta) = R_{nm}(r) \cos m \theta,$$

ces auteurs ont montré, dans des conditions qui correspondent ici à l'hypothèse métaxiale [4], que les modes de la cavité vérifiaient l'équation de Fredholm homogène :

$$R_{nm}(k, r) = \gamma_{nm} \frac{k}{d} \int_0^{r_0} R_{nm}(k, r') J_m\left(\frac{k}{d} r r'\right) r' dr' \quad (1)$$

Une telle expression, comme le montre J.C. Heurtley [5], est rattachée à la formulation sphéroïdale proposée par Slepian :

$$R_{nm}(c, r) = c \gamma_{nm} \int_0^1 R_{nm}(c, r') J_m(c r r') r' dr' \quad (2)$$

en reliant simplement le paramètre sphéroïdal  $c$  au nombre de Fresnel  $N$  par la relation :

$$c = 2\pi N = k r_0^2 / d$$

L'équation (2) exprime ici l'invariance des fonctions  $R_{nm}(r)$  pour la transformée de Hankel généralisée d'ordre  $m$  limitée à  $[0, 1]$  et plus généralement, l'autotransformabilité de la paire de Fourier constituée des champs  $S_{nm}(r, \theta)$  et  $S_{nm}(r', \theta')$  observés sur chacun des deux miroirs.

Pour l'ensemble de ces raisons les fonctions  $S_{nm}(r, \theta)$  qui correspondent ici aux modes transverses de résonance de la cavité sont appelées fonctions sphéroïdales généralisées [1].

À chacune de ces fonctions est associée une valeur propre :

$$\lambda_{nm} = c^4 \gamma_{nm}^2$$

Ces valeurs propres sont réelles, positives, ordonnées et inférieures à l'unité. Physiquement elles traduisent la concentration énergétique du mode d'indice associé, mesuré sur le support délimité par la pupille des miroirs.

En pratique cependant on préfère plutôt considérer la quantité :

$$\beta_{nm} = 1 - \lambda_{nm}$$

qui traduit la perte énergétique due à la diffraction lors d'un aller-retour dans la cavité.

Une telle atténuation, jointe aux pertes par absorption des miroirs, nécessite, si l'on considère une mise en évidence des différents modes de la cavité, un apport d'énergie extérieur.

Cet apport peut être obtenu par l'introduction dans la cavité d'un milieu amplificateur comme cela est le cas par exemple pour le laser.

## 3. Modes d'une cavité laser confocale

Les modes de résonance d'une cavité confocale étant de nature sphéroïdale, tout laser conçu à partir d'un tel résonateur est à ce titre un générateur naturel de fonctions sphéroïdales.

Dans un tel cas cependant de nombreuses caractéristiques de l'amplification par émission stimulée sont sensiblement influencées par les propriétés du système de résonance et en premier lieu comme l'indique Y. Ananiev [6] par la divergence du rayonnement qui en résulte. On peut en effet considérer pour la plupart des lasers que c'est le rendement de l'amplification par émission stimulée qui impose la géométrie de la cavité.

Le facteur de qualité de l'oscillateur atomique étant inversement proportionnel aux pertes par diffraction le rendement optimal est obtenu pour les modes axiaux (faibles valeurs d'indice  $n$  et  $m$ ) correspondant à de grandes valeurs du nombre de Fresnel c'est-à-dire pour  $c$  grand [7] (p. 104).

Si une telle contrainte s'inscrit parfaitement dans la perspective de la recherche d'un rayonnement étroit dirigé (un des éléments caractéristiques de l'émission laser), elle limite par contre ici considérablement l'étude générale des fonctions sphéroïdales suivant leurs paramètres caractéristiques  $n$ ,  $m$ , et  $c$ .

De plus, dans le cas de grandes valeurs de  $c$  on peut également s'interroger sur l'utilité du passage à une détermination physique de ces fonctions. Si l'on exprime en effet les bornes d'intégration de la relation (2) en fonction de ce paramètre :

$$R_{nm}(c,r) = \gamma_{nm} \int_0^{\sqrt{c}} r' J_m(rr') R_{nm}(c,r') dr' \quad (3)$$

on constate que, pour  $c$  tendant vers l'infini (approximation justifiée dans la plupart des configurations lasers), la relation (3) se ramène à l'équation aux éléments propres de la transformée de Hankel généralisée dont les solutions sont analytiquement connues.

Il s'agit ici des fonctions de Gauss-Laguerre :

$$R_{nm}(c,r) = e^{-r^2/2c} r^m L_n^{(m)}(r^2/c) e^{-(m+1/2)/2}$$

de la forme générale desquelles découle la notion couramment admise de profil gaussien de la répartition d'intensité de l'émission laser. Une telle extension de langage ne fait que traduire le peu d'intérêt que présente un tel modèle pour l'étude générale et le calcul des bases de fonctions sphéroïdales.

De plus le choix d'une solution optique ne saurait être justifié qu'à la condition qu'il ne soit pas possible de résoudre simplement l'équation (2), c'est-à-dire ici à l'exception de valeurs extrêmes des paramètres  $n$ ,  $m$  et  $c$  (en particulier pour  $c$  grand) pour lesquelles on peut donner des solutions numériques simples à une telle équation.

L'ensemble de ces raisons conduit à écarter la solution du laser.

4. Utilisation d'un cristal de BSO comme milieu amplificateur

A l'inverse du laser on peut penser que les cavités, dont l'élément actif est un cristal de  $Bi_{12}SiO_{20}$  (en abrégé BSO), sont beaucoup mieux adaptées à fournir une génération des bases sphéroïdales dans le cas général.

Divers travaux [8] et [9] ont en effet prouvé que les propriétés non-linéaires de certains cristaux photo-conducteurs et électro-optiques tels que le BSO pouvaient être utilisées pour réaliser l'amplification d'un signal lumineux dans les conditions d'une répartition spatiale d'intensité quelconque.

Le principe d'une telle amplification décrite physiquement par le modèle théorique de Kukhtarev [10] et dont les principales caractéristiques sont exposées en [8] est brièvement rappelé ici.

L'apport d'énergie est obtenu dans le cas du BSO par couplage d'ondes dans le cristal. Une partie de l'énergie véhiculée par le faisceau incident  $I_F$  est ainsi transférée au faisceau moins puissant  $I_{F_0}$  selon le schéma de la Figure 2. Ceci n'est toutefois rendu possible qu'à condition que les franges du réseau d'interférences inscrites dans le cristal défilent à une vitesse déterminée [8]. Un tel défilement peut être obtenu simplement, comme indiqué sur la figure, au moyen d'un miroir piézo-électrique.

Les principales propriétés physiques d'une telle amplification ont été établies pour le BSO par Rajbenbach, Huignard et Loiseaux en [9]. Ces auteurs

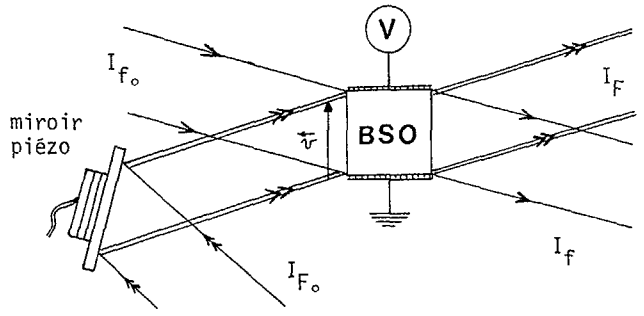


Fig.2 - Amplification par couplage deux ondes.

ont montré en particulier que le gain de l'amplification :

- augmentait avec la puissance lumineuse incidente  $I_F$  jusqu'à une limite de saturation (environ  $100 \text{ mW/cm}^2$  à  $514 \text{ nm}$ ),
- était d'autant plus grand que le rapport des faisceaux  $I_{F_0}/I_F$  était grand.

Cette dernière propriété est très importante, car elle indique la possibilité dans ce cas de l'emploi de cavités à grandes pertes par diffraction et, plus généralement, l'amplification de faibles signaux. Ceci est d'une grande originalité par rapport aux cavités lasers et conduit à penser que ce mode d'amplification est particulièrement bien adapté à une génération des fonctions sphéroïdales pour des valeurs a priori quelconques de  $c$ .

5. Réalisation d'un générateur sphéroïdal à BSO

Le BSO étant un milieu amplificateur il est donc possible d'y induire un phénomène de cavité. Cet aspect mis en évidence expérimentalement dans ce cristal par J.P. Huignard en [11] est repris ici dans le cas particulier d'une cavité à modes sphéroïdaux dans la perspective de l'obtention systématique de bases de fonctions sphéroïdales.

L'amplification par couplage d'ondes ne s'effectuant que dans un sens (direction du faisceau incident) la solution la plus simple consiste à réaliser un résonateur en anneau (Figure 3).

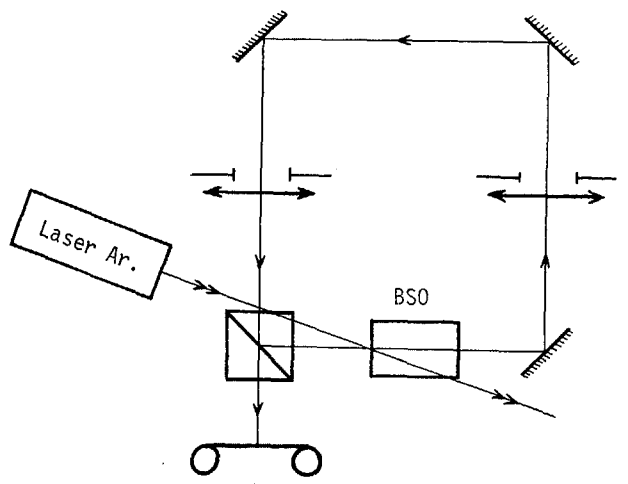
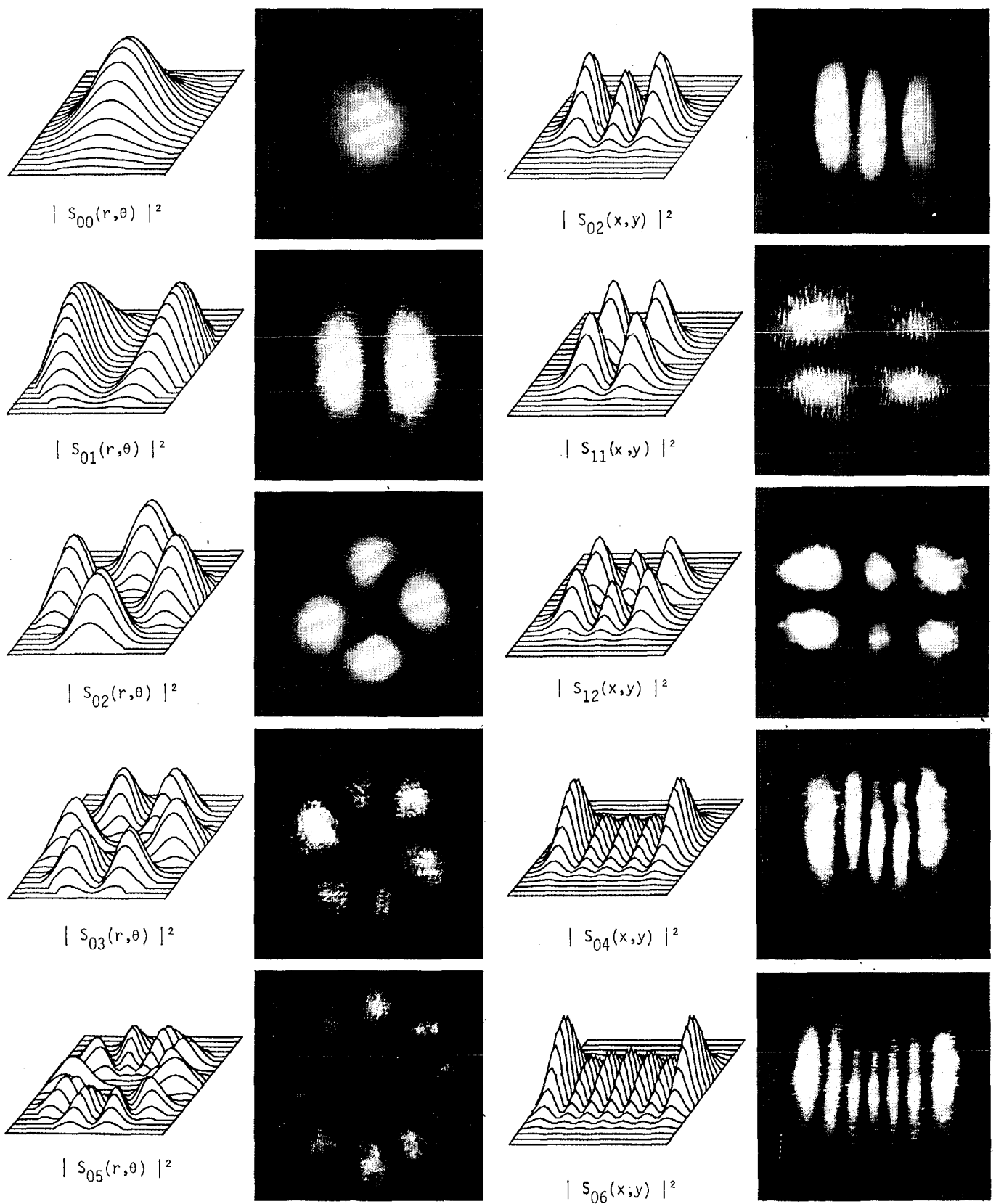


Fig.3 - Schéma de principe du générateur optique de fonctions sphéroïdales.



a) Modes obtenus avec une pupille circulaire

b) Modes obtenus avec une pupille rectangulaire

Fig.4 - Modes transverses de résonance d'une cavité comparable à celle de la figure 3 avec un BSO de 10 mm d'épaisseur et une tension appliquée de 8 KV/cm à 514 nm. Les modes sont observés en intensité pour  $c \approx 20$  et comparés aux modes sphéroïdaux calculés numériquement pour  $c = 10$ .



Ce type de résonateur à ondes progressives permet en outre d'éviter l'inconvénient de la présence d'ondes stationnaires au sein de l'élément actif.

Hormis cette particularité le schéma considéré est tout à fait équivalent optiquement à la configuration confocale dès lors que les plans des lentilles sont conjugués par transformées de Fourier.

Dans tous les cas l'oscillation démarre sur le bruit de l'onde diffusée par le faisceau  $I_f$  dans le cristal dont une partie récupérée par la cavité revient interférer avec le faisceau incident  $I_f$  (ceci suppose pour  $I_f$  une longueur de cohérence supérieure à la longueur de la cavité).

On vérifie expérimentalement que la fréquence de défilement des franges s'adapte automatiquement afin d'obtenir les conditions de transfert d'énergie optimales [11].

La procédure itérative conduisant à l'établissement des modes est matérialisée ici par la formation progressive du réseau holographique inscrit dans le cristal et la convergence du processus rendue possible du fait de la non-linéarité manifeste du gain (à mesure que le signal amplifié augmente il est moins amplifié) qui favorise l'établissement d'un faisceau stable dans la cavité.

La vitesse d'exécution d'une itération permettant une observation quasi-immédiate des modes de résonance est un des principaux intérêts d'une réalisation optique [2] (p.148), cependant dans les conditions d'une forte compétition de modes, ce type de réalisation est très sensible à la moindre fluctuation d'un de ses paramètres physiques. Ces fluctuations conduisent généralement à un fonctionnement multimode de la cavité qui rend ainsi l'observation délicate.

#### 6. Mise en évidence expérimentale des modes sphéroïdaux

Si l'on suppose l'homogénéité du milieu amplificateur le premier mode à être amorcé est le mode fondamental  $S_{00}(r, \theta)$ , c'est-à-dire celui pour lequel les pertes énergétiques et la dispersion du rayonnement sont minimales.

Pour des cavités à faibles pertes par diffraction il existe cependant à l'état naturel les conditions d'une compétition entre les divers modes du résonateur (pseudo-dégénérescence des valeurs propres de  $K$  [1]). Si l'on augmente progressivement la puissance lumineuse incidente on atteint ainsi rapidement le seuil d'amorçage des modes voisins et par là-même on aboutit à un fonctionnement multimode de la cavité.

Une étude du régime multimode telle que celle menée par Tang et Statz [12] dans le cas du laser n'a pas encore d'équivalent pour les cavités à BSO. Tout au plus peut-on vérifier expérimentalement ici l'extension de certaines observations faites par ces auteurs au cas de ce cristal. Si l'influence de l'augmentation progressive du gain sur l'éviction ou la sélection des modes n'est pas déterminante dans le cas du BSO du fait de la non-linéarité du gain, l'ensemble des méthodes géométriques utilisées pour orienter ou filtrer la direction du rayonnement dans la cavité est par contre directement transposable à ce cristal.

La technique utilisée revient à modifier les conditions de compétitions des modes par augmentation des différences entre leurs pertes de façon à obtenir une répartition irrégulière de l'amplification suivant la section efficace du cristal. Géométriquement ceci peut être obtenu en décentrant les axes optiques des pupilles ou encore plus généralement en effectuant une sélection angulaire du rayonnement en disposant par exemple dans la cavité des filtres dont la transparence est fonction de la direction de propagation à favoriser ou à évincer.

De tels procédés classiques en laser ont été

employés ici et ont permis la mise en évidence d'un certain nombre de modes isolés de la cavité (Figure 4). La stabilité de ces modes n'est cependant obtenue qu'à condition de disposer de cristaux de très bonne qualité optique ainsi que d'une grande rigidité et solidarité mécanique du montage. L'étude expérimentale a en effet montré que de très faibles aberrations du résonateur (instabilités mécaniques, turbulences) suffisaient à perturber la répartition du champ. De même une inhomogénéité optique trop importante du milieu actif (mauvaise qualité du cristal, fluctuations de la tension appliquée, effets thermiques et électrostatiques) conduit à de très fortes variations de la répartition d'intensité lumineuse rendant difficile l'observation et par là-même la détermination des modes sphéroïdaux de la cavité.

Moyennant ces quelques précautions les modes ainsi isolés se présentent à l'observation avec une stabilité largement suffisante pour permettre une bonne qualité d'enregistrement suivant des procédés photographiques classiques.

#### 7. Conclusions

Rappelant la nature sphéroïdale des modes de résonance d'une cavité optique confocale, nous avons proposé d'utiliser les propriétés physiques d'un tel résonateur pour fournir une méthode générale de calcul des fonctions sphéroïdales. Parmi les réalisations possibles de tels dispositifs nous avons fait ressortir l'intérêt du choix d'une cavité à cristal de BSO par rapport aux cavités lasers de même type déjà existantes.

Sur le plan expérimental nous avons démontré la possibilité d'une genèse physique de ces fonctions en présentant notamment un certain nombre de modes sphéroïdaux obtenus selon ce principe. L'étape suivante qui prévoit une sélection plus systématique des différents modes de la cavité passe en particulier par un contrôle plus strict du phénomène physique de l'amplification à partir d'un tel cristal. De telles considérations dépassent d'ailleurs largement le cadre du problème considéré et sont d'un intérêt fondamental quant à l'utilisation des propriétés originales de ces cristaux dans de nombreux problèmes de traitement du signal et de traitement des images.

La réalisation d'un générateur optique de fonctions sphéroïdales à BSO illustre ici parfaitement un tel propos. Il est clair cependant que le BSO n'est qu'un exemple de milieu actif possible pour de telles expériences et que d'autres cristaux conviennent (par exemple le Titanate de Baryum).

*Ces travaux ont été effectués dans le cadre de la Convention DRET 84/1166.*

#### Références bibliographiques

- 1 - D. SLEPIAN : "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty - IV, extensions to many dimensions". BSTJ, 43, p. 3009-3057, 1964
- 2 - J.L. de BOUGRENET de la TOCNAYE : "Opérateur intégral à noyau hermitien et bases de fonctions sphéroïdales". Revue du CETHEDC, Décembre 1984, p. 133-151
- 3 - A.G. FOX, T. LI : "Resonant modes in a Maser interferometer". BSTJ, 40, p. 453-488, 1961
- 4 - G. BONNET : "Introduction à l'optique métaxiale (1ère Partie)". Annales des Télécommunications, tome 37, n° 65, p. 143-243, Mai-Juin 1978
- 5 - J.C. HEURTLEY : "Hyperspheroidal functions - Optical resonators with circular mirrors". Symposium on quasi-optics, p. 1472-1479, June 8-10, 1964



- 
- 6 - Y. ANANIEV : "Résonateurs optiques et problème de divergence du rayonnement laser". Editions de Moscou, 1982
  - 7 - B.A. LENGYELS : "Introduction à la physique du laser". Editions Eyrolles (traduction française), 1968
  - 8 - J.P. HUIGNARD, A. MARRAKCHI : "Coherent signal beam amplification in two-waves mixing experiments with photo refractive BSO crystals". Opt. Com., 38, p. 249-254, 1981
  - 9 - H. RAJBENBACH, J.P. HUIGNARD, B. LOISEAUX : "Spatial frequency dependance of the energie transfer in two-waves experiments with BSO crystals". Opt. Com., 48, p. 247-252, 1983
  - 10 - N. KUKHTAREV, V. MARKOV, J. ODULOV : "Transient energy transfer during hologram formation in  $\text{LiNbO}_3$  in external electric-field". Opt. Com., 23, p. 338-341, 1977
  - 11 - H. RAJBENBACH, J.P. HUIGNARD : "Self-induced coherent oscillations with photo refractive BSO amplifier". Optics-Letters, 1985 (à paraître)
  - 12 - H. STATZ, C.L. TANG : "Problem of mode deformation on optical masers". J. Appl. Phys., 36, Juin 1965, p. 1816-1819.