

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

273



NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

UTILISATION DE LA METHODE DE L'APPROXIMATION PARABOLIQUE POUR DES  
CONFIGURATIONS EXTREMES EN PROPAGATION SOUS-MARINE.

Bruno GRANDVUILLEMIN / Claude GAZANHES

GERDSM (DCAN de Toulon) - Le Brusca - 83140. SIX FOURS / C.N.R.S. - LMA MARSEILLE

---

## RESUME

## SUMMARY

On se propose de résoudre numériquement l'équation de HELMHOLTZ au moyen de l'approximation parabolique dans un milieu bidimensionnel. On explicite la solution pour un développement quadratique de l'opérateur de propagation. La résolution numérique est donnée par un algorithme aux différences finies utilisant un schéma du type Crank-Nicholson.

On définit une méthode pour résoudre le problème des interfaces rectilignes horizontaux et obliques entre deux milieux fluides.

Le problème des milieux où la bathycélérimétrie varie avec la distance est abordé par des conditions de continuité entre deux milieux de célérité donnée. Des résultats issus d'une simulation numérique sont présentés.

We propose to resolve numerically HELMHOLTZ's equation with the parabolic approximation. We make clear the solution for a quadratic expansion of the propagation's operator. The numeric resolution is developed with the finite difference algorithm using a Crank-Nicholson's method.

We give a treatment to resolve the horizontal and oblique interface between two fluids medium. When the velocity change with the distance, we adopt a solution which take account of continuities conditions between two mediums where the velocity is changes only with the depth. We present some results of the numeric simulation.



UTILISATION DE LA METHODE DE L'APPROXIMATION PARABOLIQUE POUR DES CONFIGURATIONS EXTREMES EN PROPAGATION SOUS-MARINE.

1. INTRODUCTION

La propagation d'une onde de compression monochromatique dans un milieu élastique est régie par l'équation de HELMHOLTZ. Lorsque le milieu est homogène sa résolution s'effectue aux moyens de certaines approximations (rayons) ou hypothèses (modes).

Dans le cas réel, le milieu marin est faiblement inhomogène. Les variations de la célérité du son ne dépasse pas d'après MUNK 5,3% .

C'est dans ce cas qu'on applique la méthode de l'approximation parabolique pour la résolution de l'équation de propagation. Cette dénomination employée pour la première fois par FOCK et LEONTOVISH en électromagnétisme dans le milieu des années 40 consiste à négliger la dérivée seconde axiale devant le gradient :

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r,z) \right| \ll \left| 2ik_0 \frac{\partial u(r,z)}{\partial r} \right| \quad (1)$$

où  $u(r,z)$  est proportionnel au champ de pression et  $k_0$  est le vecteur d'onde moyen. MUNK estime que le premier terme de l'inégalité (1) est environ mille fois plus petit que le second terme.

Cette hypothèse s'apparente à l'approximation paraxiale de l'optique géométrique : le champ se propage autour d'une direction déterminée, la direction axiale et une équation de type parabolique permet alors d'analyser ses variations au voisinage de cette direction.

Physiquement l'approximation paraxiale consiste à négliger les ondes retrodiffusées par le milieu. Son intérêt vient de ce qu'elle permet de traiter la propagation comme un problème de CAUCHY (conditions initiales) dont la résolution numérique est facile.

FOCK et LEONTOVISH étudiaient les effets de la courbure de la terre sur la propagation des ondes radio dans une direction donnée. L'approximation parabolique fut reprise et appliquée dans divers domaines comme le L.A.S.E.R., la sismique (CLAERBOUT) et la physique des plasmas. Ce fut en 1970 que TAPPERT et HARDYN l'introduisirent en acoustique sous-marine. Sa résolution numérique fait intervenir les F.F.T. et F.F.T. inverses. Au début des années 80, LEE, PAPADAKIS et MAC DANIEL proposent une résolution numérique basée sur les différences finies utilisant un schéma du type CRANK NICHOLSON. On se propose ici d'étendre le domaine de validité de l'approximation parabolique à des milieux à environnement variable.

2. MISE EN EQUATION

En utilisant les coordonnées cylindriques, l'expression de la pression acoustique s'écrit lorsqu'on est en champ lointain :

$$P(r,z,\phi) = u(r,z,\phi) \times \frac{e^{ik_0 r}}{\sqrt{r}} \quad (2.1.)$$

$k_0 = \frac{2\pi f}{c_0}$  Co étant une valeur particulière de la célérité du son dans l'eau de mer.

.../...

En substituant dans l'équation de HELMHOLTZ la pression acoustique par son expression donnée en (2.1) on obtient, en négligeant le terme en  $(4r)^{-2} u(r,z,\phi)$  et en négligeant la diffusion dans la direction perpendiculaire ( $\phi$ ) à la direction de propagation :

$$\left\{ (P + ik_0 Q)(P - ik_0 Q) - ik_0 [P, Q] \right\} u(r,z) e^{ik_0 r} = 0 \quad (2.2)$$

où  $P$  et  $Q$  sont les opérateurs suivants :

$$P = \frac{\partial}{\partial r} \quad Q^2 = n^2(r,z) + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

avec  $n(r,z) = \frac{c_0}{c(r,z)}$  et où  $[P, Q]$  désigne le commutateur des opérateurs  $P$  et  $Q$ .

Pour un milieu où la célérité ne varie pas ou presque pas en fonction de la distance  $r$ , c'est à dire lorsque  $[P, Q] u(r,z) \approx 0$ , l'équation de propagation pour l'onde progressive est :

$$\frac{\partial u(r,z)}{\partial r} = \sqrt{n^2(r,z) - 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} u(r,z) \quad (2.3)$$

Pour un développement linéaire de la racine carrée de l'opérateur  $Q^2$  on obtient l'équation parabolique de propagation donnée par TAPPERT :

$$\frac{\partial u(r,z)}{\partial r} = \frac{ik_0}{2} \left\{ (n^2(r,z) - 1) + k_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} u(r,z) \quad (2.4)$$

Pour un développement quadratique on obtient l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial u(r,z)}{\partial r} = \left\{ \frac{ik_0}{2} (n^2(r,z) - 1) - \frac{1}{4} (n^2(r,z) - 1)^2 - \frac{1}{4k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (n^2(r,z) - 1) \right. \\ \left. + \frac{i}{2k_0} \left( 1 - \frac{1}{4} (n^2(r,z) - 1) \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{i}{8k_0^3} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right\} u(r,z) \quad (2.5)$$

L'avantage de l'équation de propagation (2.5) par rapport à (2.4) est d'une part de minimiser les erreurs dues au développement de la racine carrée de l'opérateur  $Q^2$  et d'autre part de pouvoir tenir compte d'une plus grande ouverture angulaire de la source limitée à 15° pour le développement linéaire et à 40° environ pour le développement quadratique.

De plus le milieu de propagation est mieux décrit dans l'équation (2.5) avec notamment la prise en compte du terme : " $\frac{\partial^2}{\partial z^2} n^2(r,z)$ " qui devient important lorsque la courbe bathycélérimétrique change de gradient. Les variations de  $u(r,z)$  en fonction de l'immersion sont représentées avec plus de précision avec l'introduction du terme en " $\frac{\partial^4}{\partial z^4}$ "

L'étude de l'opérateur de la relation (2.3) est assez délicate car il est non local et pas défini positif. Toutefois on trouvera dans les références bibliographiques (1) et (2) une étude plus détaillée ainsi que la justification de son développement en série de TAYLOR.

La résolution numérique de l'équation (2.5) est basée sur les différences finies. Pour cela on discrétise le milieu de propagation avec un pas  $h$  en immersion et  $k$  en distance radiale.

.../...





3. LES INTERFACES

La résolution de l'équation de HELMHOLTZ par l'approximation parabolique permet d'étudier la propagation dans un environnement constitué par plusieurs milieux différents. Un milieu d'indice  $j$  est caractérisé par son atténuation, sa densité et son profil bathycélérimétrique. Le changement brutal d'au moins un de ces paramètres entraîne un changement de milieu. On appelle alors interface le lieu géométrique (dans ce cas un segment de droite) qui sépare deux milieux différents. Dans ce qui suit, on donne, pour chaque type d'interface, les équations de continuité ainsi que le résultat final. Pour le détail des calculs, se reporter à la bibliographie (1). Les différents milieux (eau, sédiment) sont supposés fluides (on ne prend pas en compte les ondes de cisaillement).

3.1. Interface rectiligne horizontal

L'interface rectiligne horizontal permet de modéliser un fond constitué par une ou plusieurs couches de sédiments. Au niveau de l'interface ( $m = m_0$ ) on écrit les équations de continuités :

- \* Egalité des pressions :  $P_1(r, z) = P_2(r, z)$
- \* Egalité de la composante normale des vitesses :

$$e_2 \frac{\partial P_1(r, z)}{\partial z} = e_1 \frac{\partial P_2(r, z)}{\partial z}$$

Pour le milieu 1, respectivement 2, on exprime dans l'équation de propagation de propagation  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u(r, z)$  en fonction de  $(u_{m_0}^n), (u_{m_0-1}^n), (u_{m_0+2}^n), (u_{m_0}^{n+1})$  ; respectivement  $(u_{m_0}^{n+1}), (u_{m_0+1}^{n+1}), (u_{m_0+2}^{n+1})$  et  $(u_{m_0}^{n+2})$ . Puis, compte tenu des équations de continuités, on obtient l'équation de propagation à l'interface. Le traitement de l'interface rectiligne horizontal par la méthode des différences finies revient tout simplement à substituer la  $m_0$ ème ligne du système matriciel (2.9) par celle obtenue par le calcul précédent (voir ( ) pour le détail des résultats.

3.2. Interface rectiligne oblique

La géométrie du problème est décrite par la figure ci-dessous :

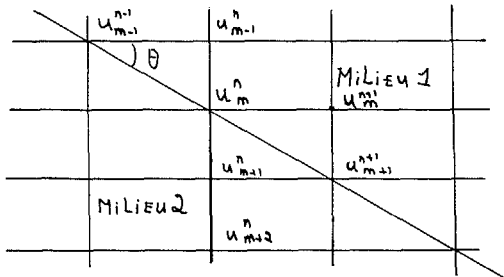


Fig 1: Interface oblique

On suppose que l'interface passe par l'ensemble des noeuds  $(n+1, m+1)$  ce qui implique que les pas  $h$  et  $k$  sont reliés par la relation :

$$h = k \times \tan \theta \tag{2.10}$$

où  $\theta$  est l'angle que fait l'interface avec l'horizontale.

\* Par notation  $(u_{m_0}^n)_z = \frac{\partial}{\partial z} (u_{m_0}^n)$  .../...

Il faut déterminer deux relations : l'une permettant de passer du noeud sur l'interface  $(n, m)$  à celui  $(n+1, m)$  qui est dans le milieu 1 ; l'autre qui permet de relier un noeud du milieu 2  $(n, m+1)$  à celui de l'interface  $(n+1, m+1)$ . Ceux qui ne sont pas affectés par l'interface sont reliés par les mêmes coefficients

$$\alpha_j^i, \chi_j^{i+1}, \gamma_j^i, \dots$$

$$(i, j) \neq (n, m), (n, m+1), (n+1, m), (n+1, m+1)$$

On dispose comme conditions aux limites d'une part la continuité des pressions soit :  $P_1(r, z) = P_2(r, z)$  (2.11) et d'autre part la continuité de la composante normale de la vitesse soit :  $e_2 \frac{\partial P_1(r, z)}{\partial z} = e_1 \frac{\partial P_2(r, z)}{\partial z}$  ou encore (2.12)

$$e_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial z} u_1(r, z) \times v(r) \cos \theta - \frac{\partial u_1(r, z)}{\partial r} v(r) \sin \theta - u_1(r, z) \frac{\partial v(r)}{\partial r} \sin \theta \right\} =$$

$$e_1 \left\{ \frac{\partial u_2(r, z)}{\partial z} v(r) \cos \theta - \frac{\partial u_2(r, z)}{\partial r} v(r) \sin \theta - u_2(r, z) \frac{\partial v(r)}{\partial r} \sin \theta \right\} \tag{2.13}$$

Expression dans laquelle on suppose que :

$$P(r, z) = u(r, z) \times v(r)$$

En se servant de la relation (2.10) et du développement en séries de TAYLOR de  $(u_{m+1}^{n+1})$  et  $(u_{m+1}^{n+1})_z$  on obtient une deuxième relation reliant  $(u_1)_z$  et  $(u_2)_z$  à l'interface. A savoir :

$$\frac{\partial u_1(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial u_1(r, z)}{\partial z} \tan \theta = \frac{\partial u_2(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial u_2(r, z)}{\partial z} \tan \theta \tag{2.14}$$

Des relations (2.14) et 2.13) on en déduit  $(u_1)_z$  et  $(u_2)_z$  à l'interface. Après un rapide calcul, on obtient deux relations reliant d'une part  $u_{m+1}^{n+1}$  à  $u_{m+1}^n, (u_{m+1}^n)_z$  et  $(u_{m+1}^{n+1})_z$  et d'autre part  $(u_{m+1}^{n+1})_z$  à  $(u_{m+1}^n)_z, (u_{m+1}^n)_z$  et  $(u_{m+1}^{n+1})_z$  ce qui donne les deux relations recherchées.

Ainsi le traitement de l'interface oblique par la méthode des différences finies consiste simplement à modifier dans la relation matricielle (2.9) les  $m$ ème et  $(m+1)$ ème lignes.

3.3. Interface rectiligne vertical

On suppose qu'au delà du rang  $n = N$ , la bathycélérimétrie change brutalement. Comme le montre la figure 2, on dispose d'un interface séparant deux milieux.

Dans le milieu 2, la propagation se calcule de proche en proche par l'intermédiaire de la relation (2.9) où les coefficients  $\alpha, \chi, \gamma, \dots$  sont relatifs aux caractéristiques du milieu nouveau.

La solution adoptée est d'initialiser le champ au rang  $N + 1$  en fonction de champ aux rangs  $N$  et  $N - 1$  en tenant compte également des conditions aux limites à l'interface qui sont :

- continuité des pressions :  $P_1(r, z) = P_2(r, z)$
- continuité de la composante normale des internes :

$$e_2 \frac{\partial P_1(r, z)}{\partial r} = e_1 \frac{\partial P_2(r, z)}{\partial r} \text{ ou encore :}$$

$$e_2 \frac{\partial u_1(r, z)}{\partial r} - e_1 \frac{\partial u_2(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial v(r)}{\partial r} \times (e_2 u_1(r, z) - e_1 u_2(r, z))$$

$$*(u_1)_r = \frac{\partial}{\partial r} (u_1)$$

UTILISATION DE LA METHODE DE L'APPROXIMATION PARABOLIQUE POUR DES CONFIGURATIONS EXTREMES EN PROPAGATION SOUS-MARINE

La deuxième relation se simplifie en considérant au'en première approximation  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  masse volumique de l'eau de mer. Après un rapide calcul, on obtient la relation suivante :

$$(u_m^N) = \frac{1}{2} (u_m^{N+1} + u_m^{N-1}) + \frac{\delta}{4} [(u_m^{N-1})_2 - (u_m^{N+1})_2]$$

qui permet après traitement, de donner une relation matricielle reliant  $u_m^{N+1}$  en fonction de  $u_m^N$  et  $u_m^{N-1}$  en faisant intervenir les coefficients  $\alpha, X, Y...$  relatifs aux milieux 1 et 2. Il est évident que ce processus peut être renouvelé autant de fois que la bathycélérimétrie varie avec la distance de propagation.

n=N-1		n=N		n=N+1	
MIL	IEU			MIL	IEU
1				2	

Fig 2: Interface vertical

4. SIMULATION NUMERIQUE

Quelques résultats issus d'une simulation numérique sur VAX 11/780 et sur calculateur vectoriel FPS 64 sont présentés ici. Les différentes photographies représentent une "image" du champ sonore obtenue par différentes teintes de grisés. Les parties claires correspondent à une perte de propagation de 60 dB, les parties les plus foncées à une perte de 100 dB.

Sur la photographie 1 est visualisée une propagation sur 200 km, l'immersion du fond est à 5000 m, l'épaisseur du sédiment (absorbant) est de 300 m, la fréquence est de 200 hz et l'immersion de l'émetteur est 100 m.

La bathycélérimétrie est donnée par la courbe "Jasa 1" de la figure 3. On peut observer le chenal de surface ainsi que les trois zones de convergences.

La photographie 2 montre la modification du champ sonore lorsqu'à une distance de 100 km la bathycélérimétrie change et est donnée par la courbe "Jasa 2".

La photographie 3 montre la modification du champ sonore lorsque le passage de "Jasa 1" à "Jasa 2" s'effectue en plusieurs étapes à 110 km, 120 km et 130 km.

Les deux phénomènes caractéristiques sont d'une part l'affaiblissement du chenal de surface (chute de 25 dB environ) et d'autre part l'écartement des zones de convergences.

.../...

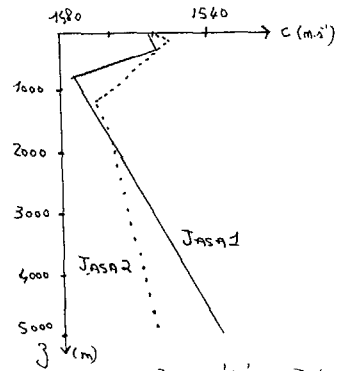
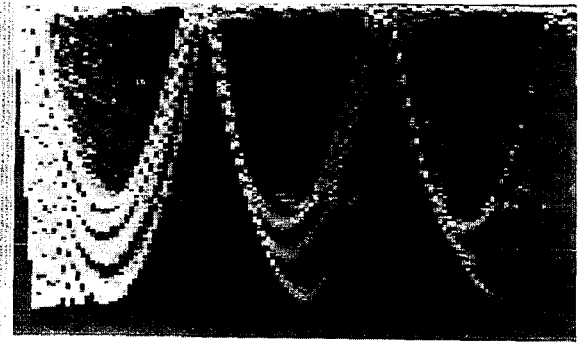
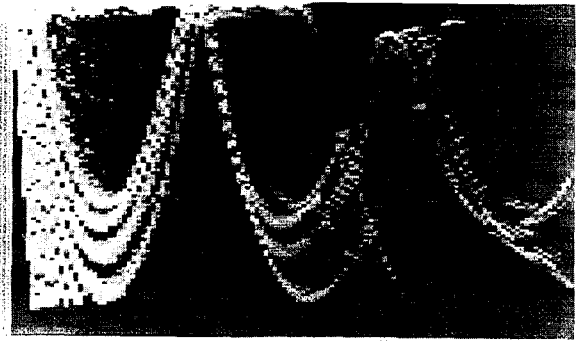


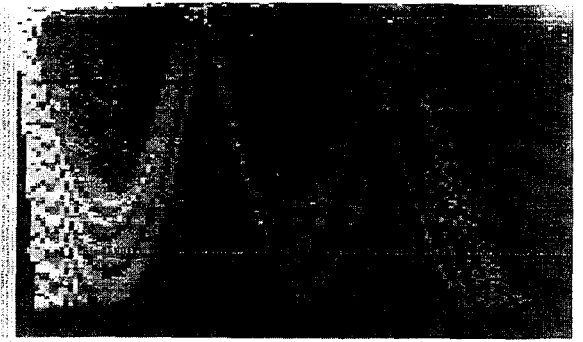
Fig 3: BATHYCELÉRIMÉTRIE



Photographie 1. Aucun front thermique.



Photographie 2. 1 front thermique.



Photographie 3. 3 fronts thermiques.

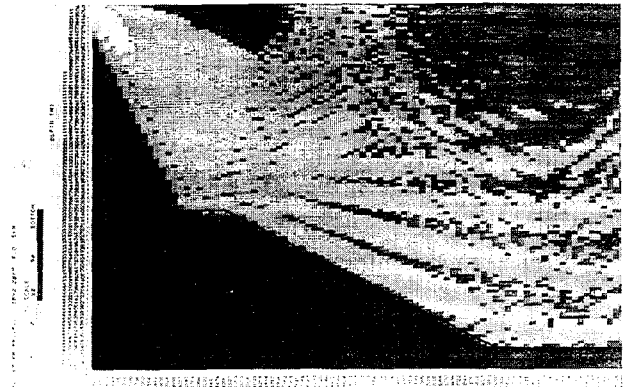


UTILISATION DE LA METHODE DE L'APPROXIMATION PARABOLIQUE POUR DES CONFIGURATIONS EXTREMES EN PROPAGATION SOUS-MARINE.

La photographie 4 montre l'influence d'un fond en pente : fond plat à 3000 m sur 5 km puis en pente pour atteindre une immersion de 5000 m à 15 km. Le fond reste plat jusqu'à 20 km. L'immersion de l'émetteur est de 100 m, la fréquence utilisée est 10 Hz.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) GRANDVUILLEMIN Bruno - "Application de l'approximation parabolique à l'acoustique sous-marine"  
Thèse de doctorat de 3ème cycle  
Aix-Marseille II Luminy
- (2) TAPPERT - The parabolic approximation method  
Lecture notes in physics. Springer Verlag  
1977
- (3) D.LEE, G. BOTSEAS, J.S. PAPADAKIS - Finite difference solution to the parabolic wave equation. J.A.S.A. (70) 1981
- (4) M.C.DANIEL, D.LEE - A finite difference treatment of interface condition for the parabolic wave equation : the horizontal interface. J.A.S.A. (71) 1982
- (5) D.LEE, MC.DANIEL - A finite difference treatment of interface conditions for the parabolic wave propagation : the irregular interface J.A.S.A. (73) 1983.



Photographie 4 : Influence d'un fond en pente sur la propagation.