

NICE du 20 au 24 MAI 1985

SEPARATION DE SOURCES CORRELEES VOISINES PAR LES METHODES
SPECTRALES A HAUTE RESOLUTION

A. OUAMRI et S. TRESSENS*
H. CLERGEOT**

(*) CNET-CRPE, 4, avenue de Neptune, 94107 SAINT-MAUR-DES-FOSSES CEDEX (France)

(**) ENSET-LESIR, 94230 CACHAN (France)

RESUME

Le problème considéré est celui de la séparation de sources voisines par une antenne linéaire, en particulier dans le cas de sources corrélées (phénomène d'écho).

La séparation est effectuée par les méthodes spectrales à haute résolution analogues à celles utilisées pour la recherche de fréquences pures dans un signal temporel.

Ces méthodes reposent sur les propriétés de la matrice interspectrale. En particulier les M vecteurs propres relatifs aux plus grandes valeurs propres engendrent le même sous-espace que les M vecteurs sources. On examinera d'une part la répartition des valeurs propres relatives au signal, d'autre part l'influence des incertitudes de mesure sur l'estimation de la matrice interspectrale ; ces résultats permettent de calculer la variance sur l'estimation des fréquences et de discuter le choix des paramètres d'estimation.

En ce qui concerne la répartition des valeurs propres signal, on trouve que dans le cas de sources voisines la matrice devient mal conditionnée, particulièrement dans le cas de sources corrélées. Pour deux sources séparées de θ la forme asymptotique du rapport des valeurs propres est calculée ; ce rapport varie en θ^{-2} pour des sources non corrélées, en θ^{-4} pour des sources corrélées. Ces résultats seront réutilisés ultérieurement, mais ils donnent déjà une idée des limitations du pouvoir séparateur des méthodes haute résolution.

En présence de bruits additifs décorrélés et de même variance les valeurs propres relatives au bruit ont même espérance mathématique. En fait pour la matrice spectrale estimée la répartition n'est plus uniforme. Une forme approchée linéaire de cette répartition est calculée et vérifiée par simulation. Ce résultat peut être utilisé pour séparer la plus faible valeur propre signal de la plus grande valeur propre de bruit.

L'effet des incertitudes de mesure sur l'estimation des vecteurs propre signal est ensuite étudiée, dans le cas d'une seule source. Ces résultats permettent de calculer la variance sur l'estimation de la fréquence, pour différentes méthodes de mesure et de discuter le choix des paramètres d'estimation.

SUMMARY

The problem of spatial discrimination of closely spaced correlated sources, using a linear array of sensors is addressed.

The method used is an high resolution spectral method which is in close connection with the methods developed for the time/frequency domain-analysis.

These methods are based on the eigenstructure of the spectral density matrix. The hint being that the eigenvectors associated to the signal eigenvalues span the same subspace as the source vectors. Firstly, we consider the signal eigenvalues dispersion and then the accuracy on the estimation of the spectral density matrix. These results are used to obtain an expression of the variance on the estimation of the sources locations, and a discussion on the choice of different parameters.

When the sources are closely spaced or unitarily correlated, the spectral density matrix is ill conditioned. In the case of two sources spaced of θ , an asymptotic expression of the ratio of the eigenvalues is given ; this relation varies as θ^{-2} for uncorrelated sources, and as θ^{-4} for correlated sources. These results give an idea on the method resolution.

The effect of noise on the eigenvalues is then considered. In presence of additive white noise, it is shown that the estimated eigenvalues have always the same average distribution, with a linear decrease, that can be computed and used to define a threshold for discrimination of the smallest signal eigenvalue from the largest one. The last point is the connection between the uncertainty on the eigenvectors and the variance on the estimation of the sources locations.



SEPARATION DE SOURCES CORRELEES VOISINES PAR LES METHODES
SPECTRALES A HAUTE RESOLUTION

I. INTRODUCTION

I.1. Localisation de sources décorrelées

Une approche très générale du problème de l'identification et de la localisation de sources décorrelées à partir d'un réseau multiplicateurs a été formulée par Mermoz [1], sous l'hypothèse d'un milieu de propagation linéaire et stationnaire. Pour une fréquence ν_0 donnée, à chaque source on associe le "vecteur source" dont les composantes sont les transmittances entre la source considérée et chacun des N capteurs. La fréquence ν_0 étant isolée sur les signaux capteurs par analyse spectrale, on obtient alors le résultat que, en l'absence du bruit, le sous-espace propre relatif aux valeurs propres non nulles de la matrice interspectrale R coïncide avec l'espace vectoriel engendré par les vecteurs sources à identifier [1],[2],[3],[4].

Le sous-espace source étant déterminé, la localisation proprement dite exige la connaissance du modèle de propagation, qui permet de paramétriser les vecteurs sources en fonction des coordonnées des sources [5]. Nous nous limiterons dans cette communication à un cas particulièrement simple mais intéressant en pratique : celui d'une antenne linéaire avec capteurs équidistants, les signaux émis par les sources arrivant sur l'antenne sous forme d'ondes planes. Soit d la distance entre capteurs, θ_m l'azimut de la source s_m , c la vitesse de propagation de l'onde ; à la fréquence ν_0 , les phases des signaux sur les capteurs de l'antenne sont alors en progression arithmétique de raison :

$$\omega_m = 2\pi\nu_0 \frac{d}{c} \sin \theta_m \quad (1)$$

La paramétrisation du vecteur source correspondant à S_m en fonction de l'azimut θ_m est alors :

$$\underline{S}_m = [1, Z_m, \dots, Z_m^{L-1}]^T, \quad Z_m = e^{j\omega_m} \quad (2)$$

Pour cette forme paramétrique particulière l'identification à partir du sous-espace source de la matrice interspectrale R peut se faire par la méthode du "vecteur orthogonal" [6]. Soit :

$$\underline{A} = [a_0, a_1, \dots, a_{L-1}]^T \quad (3)$$

un vecteur orthogonal au sous-espace source de la matrice interspectrale R. Les relations d'orthogonalités

$$\underline{A}^T \underline{S}_m = 0, \quad m = 1, \dots, M \quad (4)$$

expriment que Z_1, \dots, Z_M sont des zéros du polynôme :

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{L-1} z^{L-1}. \quad (5)$$

I.2. Lien avec la recherche de raies spectrales

Le schéma de principe du système de localisation est indiqué figure 1, comprenant le réseau de capteurs et le système d'analyse fréquentiel schématisé par une batterie de filtres sélectifs accordés sur ν_0 ; $x_n(t)$ représente "l'amplitude complexe" du $n^{\text{ème}}$ signal de fréquence ν_0 . C'est un signal fonction lentement variable du temps du fait de la bande passante non nulle du filtre F_{ν_0} .

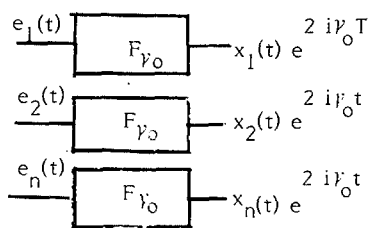


figure 1

La matrice interspectrale à la fréquence ν_0 est calculée à partir des intercorrélations $x_1(t) x_j^*(t)$ entre les signaux de sortie des filtres.

Dans les hypothèses où l'on s'est placé, en prenant le rang n des capteurs comme variable on constate que

chaque source s_m fait apparaître sur l'antenne un signal à répartition spatiale sinusoïdale de pulsation ω_m . Il y a donc dualité complète entre ce problème de localisation de sources et le problème de recherche de fréquences pures dans un signal temporel régulièrement échantillonné. Cette dualité est bien connue [7] et les méthodes paramétriques courantes d'analyse spectrale de signaux temporels (Pisarenko, "maximum d'entropie", erreur de prédiction minimale) se ramènent, sous certaines contraintes, à la recherche du vecteur \underline{A} minimisant la forme quadratique $\underline{A}^T R \underline{A}$, R étant la matrice de covariance [8]. Ceci correspond à la démarche présentée ci-dessus consistant à prendre \underline{A} orthogonal au sous-espace source de R, toutes ces méthodes conduisent à $\underline{A}^T R \underline{A} = 0$ en l'absence de bruit.

Cependant dans le domaine des antennes il existe une contrainte économique évidente : celle de limiter le plus possible le nombre d'éléments de l'antenne linéaire. Ceci entraîne que traditionnellement pour le calcul d'une matrice R de dimension donnée $L \times L$, dans le domaine des antennes on utilisera $N = L$ capteurs en faisant une moyenne d'ensemble sur des réalisations successives, pratiquement décorrelées. Par contre dans le traitement de signaux temporels on utilise un seul enregistrement de $N = L$ points en effectuant une "moyenne glissante" sur des sous-ensembles de L points consécutifs. Nous allons voir que pour les antennes il est intéressant, et dans certains cas indispensable, d'introduire ce type de moyennage.

I.3. Cas de sources corrélées

Dans le cas de sources corrélées, on constate une dégradation des performances des estimateurs à haute résolution [9]. C'est en particulier le cas en présence d'écho ou de trajets multiples : un même émetteur donne naissance à plusieurs ondes planes sur l'antenne, qui arrivent avec une relation de phase imposée. Au sens général du paragraphe I.2., il ne lui est associé qu'un seul vecteur source, combinaison linéaire à coefficients fixés des vecteurs \underline{S}_m correspondant aux différentes ondes planes-écho. La méthode du "vecteur orthogonal" est alors en défaut : l'orthogonalité au vecteur source n'entraîne pas l'orthogonalité à ses composantes \underline{S}_m . Kailath [10] a montré que ce défaut peut être évité en utilisant un moyennage spatial. Le point sera étudié plus en détail dans le paragraphe II.

I.4. Plan de l'exposé

On considère que pour l'estimation de la matrice interspectrale R on effectue simultanément un moyennage sur différentes réalisations (à des instants t différents), et une moyenne glissante sur l'antenne. Pour identifier M sources on choisit nécessairement une dimension L de la matrice carrée R supérieure à M et un nombre N de capteurs supérieur à L. On définit pour t donné les K vecteurs "glissants" à L composantes :

$$\underline{X}_k(t) = [x_k(t), x_{k+1}(t), \dots, x_{k+L-1}(t)]^T, \quad (6)$$

$$k = 1, \dots, K, \quad K = N - L + 1$$

La matrice R est alors estimée par la moyenne :

$$\hat{R}_x = \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T \underline{X}_k(t) \cdot \underline{X}_k^*(t). \quad (7)$$

Dans le paragraphe 2 on montre que les cas où les performances des méthodes à haute résolution se dégradent (sources voisines, forte corrélation entre sources) correspondent à un mauvais conditionnement de la matrice interspectrale. Dans le cas de deux sources on montre l'amélioration amenée par l'utilisation du moyennage spatial et d'une méthode de moyennage direct-inverse pour le calcul de R [8].

La suite de l'exposé concerne l'analyse de l'influence du bruit sur l'estimation, en se limitant au cas de bruits décorrelés et de même variance sur les N capteurs. Dans le paragraphe 3 on montre que les valeurs propres estimées de bruit ne sont pas égales ; classées par ordre

SEPARATION DE SOURCES CORRELEES VOISINES PAR LES METHODES SPECTRALES A HAUTE RESOLUTION

croissant elles présentent une pente qui peut être prédéterminée et utilisée pour la discrimination des valeurs propres signal et bruit. Le paragraphe 4 présente le calcul de la perturbation des vecteurs propres en présence de bruit et confirme l'idée intuitive que les vecteurs propres relatifs aux valeurs propres les plus faibles sont les plus affectés ; ceci montre l'intérêt d'un bon conditionnement de la matrice signal. Dans un dernier paragraphe, en se limitant à une source, on établit le lien entre la perturbation du vecteur propre et la variance sur la position de la source.

II. STRUCTURE PROPRE DE LA MATRICE SIGNAL

II.1. Forme générale

En pratique le vecteur $X_k(t)$ introduit en (6) sera la somme d'une partie signal et une partie bruit :

$$X_k(t) = Y_k(t) + B_k(t) \tag{8}$$

Compte tenu des hypothèses et de (2) le vecteur signal est de la forme :

$$Y_k(t) = \sum_{m=1}^M Z_m^k g_m(t) S_m \tag{9}$$

soit : $Y_k(t) = S G_k(t)$ (10)

où S est une matrice L x M de Vandermonde dont les colonnes sont précisément les vecteurs sources :

$$S = [S_1, \dots, S_M] \tag{11}$$

et où $G_k(t)$ est un vecteur de dimension M défini à partir des amplitudes complexes $g_m(t)$ et des fréquences spatiales ω_m par :

$$G_k(t) = [g_1(t) Z_1^k, \dots, g_M(t) Z_M^k]^T \tag{12}$$

Ainsi, pour le signal seul, (7) devient :

$$R_Y = S D S^+, \tag{13}$$

où

$$D = \frac{1}{KT} \sum_{t,k} G_k(t) G_k(t)^+ \tag{14}$$

On vérifie facilement que les valeurs propres non nulles de R_Y sont les mêmes que celles de la matrice carrée (MxM) $D S^+ S$, et que si $U_n = [U_{n1} \dots U_{nM}]^T$ est le vecteur propre associé à λ_n , le vecteur propre correspondant de R_Y est donné par :

$$V_n = S U_n = \sum_{m=1}^M U_{mn} S_m \tag{15}$$

Il a été vu dans l'introduction que pour identifier les M sources il fallait que R_Y soit de rang M. Il faut donc que $D S^+ S$ soit régulière. Si les ω_m sont différents la matrice de Vandermonde S est régulière : finalement la condition d'identifiabilité est que D soit régulière. Pour ceci il suffit que dans la somme (14) figurent M vecteurs $G_k(t)$ linéairement indépendants.

Or, d'une part, à k donné, sauf cas de liaison causale entre sources, la probabilité de trouver un vecteur à un instant t combinaison linéaire de M-1 vecteurs à des instants différents est nulle. D'autre part, à t donné, d'après (12) $G_k(t)$ se déduit de $G_{k-1}(t)$ par produit par la matrice $Z = \text{diag}(Z_1, \dots, Z_M)$. S'il avait liaison entre M vecteurs correspondant à M valeurs consécutives de k on aurait une relation de la forme

$$(\alpha_0 I + \alpha_1 Z + \dots + \alpha_M Z_{M-1}) G(t) = \mathcal{C} G(t) = 0 \tag{16}$$

ce qui implique que, pour tout m, soit l'élément diagonal de \mathcal{C} soit la composante correspondante de $G(t)$ soit nul. Or pour que le m^{ème} élément diagonal de soit nul, il faut que Z_m soit racine du polynôme $\alpha(Z)$, celui-ci n'ayant que M-1 racines, si les Z_m sont différents, il doit y avoir au moins une composante de $G(t)$ nulle pour satisfaire (16). Cet événement présente une probabilité nulle à t donné si la puissance des sources est non nulle. On peut en tirer les conclusions suivantes (voir aussi [10]).

a) sources décorréelées. Compte tenu des résultats concernant l'indépendance à t donné ou à k donné, il suffit que dans (14) la somme porte sur plus de M termes, soit la condition :

$$KT \geq M \tag{17}$$

En particulier la moyenne peut être faite sur t seul (avec $K \geq M$) ou sur k seul (avec $T \geq M$).

b) Corrélation unitaire entre sources. Dans ce cas extrême la condition sur le rang ne peut être assurée que par moyennage spatial sur k

$$K \geq M \tag{18}$$

II.2. Lien avec la répartition des valeurs propres

L'analyse précédente ne permet que de répondre par oui ou par non à la question de l'identifiabilité. Une information beaucoup plus significative pour le choix des paramètres d'estimation est obtenue en regardant l'évolution des valeurs propres, le cas de la matrice irrégulière n'étant que le cas limite où l'une des valeurs propres arrive à zéro.

L'analyse a été limitée au cas de deux sources, ce qui est suffisant pour mettre clairement en évidence la dégradation qui apparaît si la corrélation augmente ou si les deux sources deviennent très voisines.

Les paramètres des sources intervenant dans le calcul sont les suivants :

$$g_1^2 = \frac{1}{T} \sum_t |g_1(t)|^2 \quad g_2^2 = \frac{1}{T} \sum_t |g_2(t)|^2 \tag{19}$$

$$r = g_1/g_2$$

$$\rho_T = \frac{1}{T g_1 g_2} \sum_t g_1(t) g_2(t)^* e^{-j N \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} \tag{20}$$

$$\alpha = \text{Arg } \rho_T$$

De façon évidente g_1 et g_2 représentent l'amplitude moyenne des deux signaux, r leur rapport.

Remarquons que $g_1(t) e^{-j N \omega_1}$ est l'amplitude complexe du signal au milieu de l'antenne ; ρ_T est donc le coefficient complexe de corrélation des deux signaux ; son argument α est donc le déphasage moyen entre signaux au milieu de l'antenne.

Nous introduirons également les quantités suivantes :

$$q_L = \frac{\sin L \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}{L \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} \sim 1 - (L^2 - 1) \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{24} \tag{21}$$

$$q_K = \frac{\sin k \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}{K \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} \sim 1 - (K^2 - 1) \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{24}$$

q_L étant le cosinus de l'angle entre S_1 et S_2 (et q_K l'analogue à K dimensions ($\omega_2 - \omega_1$ petit)).

On obtient alors (dans le cas $\lambda \text{ max} / \lambda \text{ min} \gg 1$) :

$$\frac{\lambda \text{ max}}{L} \sim g_1 g_2 [r - r^{-1} - 2 |\rho_T| \cos \alpha] \tag{22}$$



SEPARATION DE SOURCES CORRELEES VOISINES PAR LES METHODES
SPECTRALES A HAUTE RESOLUTION

$$\frac{\lambda_{\min}}{L} \approx g_1 g_2 \frac{(1-q^2_L)(1-|\rho_T|^2 q^2_K)}{r+r^{-1}+2|\rho_T| \cos \alpha} \quad (23)$$

D'après (22) on voit que λ_{\max}/L peut s'interpréter comme la puissance moyenne fournie par un capteur du réseau ; elle ne dépend ni de L , ni de $\omega_2 - \omega_1$.

Par contre, de (23) il résulte que λ_{\min} décroît rapidement en fonction de l'écart $\omega_2 - \omega_1$. Nous allons tout d'abord discuter les deux cas limites $|\rho_T| = 0$ et $|\rho_T| = 1$.

a - Corrélation nulle : $|\rho_T| = 0$

C'est le cas des sources décorréelées lorsque la matrice de covariance est calculée sur une durée d'observation importante afin que :

$$\frac{1}{T} \sum_t g_1(t) g_2^*(t) \approx 0 \quad (24)$$

Dans ces conditions, en tenant compte de (21), on obtient :

$$\lambda_{\min}/L \approx \frac{g_1 g_2}{12(r+r^{-1})} (L^2-1) (\omega_2 - \omega_1)^2 \quad (25)$$

La dispersion $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ est minimale en utilisant la valeur maximale N de L ce qui signifie que le moyennage spatial n'améliore pas la séparation de deux sources indépendantes.

b - Cas $|\rho_T| = 1$.

C'est le cas lorsque les signaux sont générés à partir de la même source (échos par exemple) ou lorsque le moyennage temporel n'est pas utilisé. Dans ces conditions, (19) et (21) conduisent à :

$$\lambda_{\min}/L \approx \frac{g_1 g_2}{144(r+r^{-1}+2 \cos \alpha)} (L^2-1) (K^2-1) (\omega_2 - \omega_1)^4 \quad (26)$$

Conformément à l'analyse du paragraphe II.1, on trouve que pour $|\rho_T| = 1$ la séparation des sources n'est pas possible sans moyennage spatial ($K=1$) : λ_{\min} serait alors nul. La comparaison de (25) et (26) met aussi en évidence une dégradation beaucoup plus rapide lorsque l'écart $(\omega_2 - \omega_1)$ diminue : variation en $(\omega_2 - \omega_1)^2$ dans le premier cas, en $(\omega_2 - \omega_1)^4$ dans le deuxième. Enfin à nombre de capteur N donné, du fait que $K = N-L+1$, (26) atteint un maximum pour $L = (N+1)/2$, correspondant au meilleur conditionnement de la matrice (figure 2).

c - Cas général

Le rapport $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ atteint son maximum pour une valeur de L entre $N/2$ et N qui donne une indication sur le bon choix du moyennage selon la situation où l'on se trouve (figure 2).

II.3. Méthode directe inverse [8]

On associe au vecteur $\underline{X}_k(t)$ le vecteur "inversé" $\tilde{\underline{X}}_k(t)$ obtenu en inversant l'ordre des composantes et en les conjuguant, de façon à retrouver les mêmes vecteurs sources. La matrice estimée "directe-inverse" est alors définie, au lieu de (7), par :

$$\tilde{\underline{R}}_x = \frac{1}{2KT} \sum_{k,t} \underline{X}_k(t) \underline{X}_k^+(t) + \tilde{\underline{X}}_k(t) \tilde{\underline{X}}_k^+(t) \quad (27)$$

On vérifie facilement que $\tilde{\underline{R}}_x$ se déduit directement de $\hat{\underline{R}}_x$ en symétrisant ses coefficients par rapport à la deuxième diagonale.

On vérifie également que, au point de vue signal, la contribution des vecteurs inverses est la même que celle des vecteurs directs où les amplitudes de chaque source au milieu de l'antenne serait changée en son imaginaire

conjugué. On en déduit que si $\rho_T = 0$, la matrice $\tilde{\underline{R}}_x$ sera pratiquement égale à $\hat{\underline{R}}_x$. Par contre en cas de forte corrélation, les vecteurs inverses introduisent en général une configuration de phase différente des vecteurs directs et le conditionnement est amélioré. Ceci est bien illustré dans le cas de deux sources. La valeur de λ_{\max} est inchangée. Par contre pour $\tilde{\lambda}_{\min}$, au lieu de (23), on obtient

$$\frac{\tilde{\lambda}_{\min}}{L} \approx g_1 g_2 \frac{(1-q^2_L)(1-|\rho_T|^2 q^2_K \cos \alpha)}{r+r^{-1}+2|\rho_T| \cos \alpha} \quad (28)$$

Du fait que $|\rho_T|$ et q_K^2 sont inférieurs à 1, sauf le cas particulier $\alpha=0$, $\tilde{\lambda}_{\min}$ sera supérieur à λ_{\min} (fig. 3).

Remarquons que pour deux sources, l'identification est en général possible sans moyennage spatial par la méthode directe inverse, même si $\rho_T = 1$, du fait que $\tilde{\lambda}_{\min}$ est différent de zéro (sauf si $\alpha=0$).

III. DISTRIBUTION DES VALEURS PROPRES DU BRUIT SEUL

A cause de la durée limitée d'observation, les valeurs propres de la matrice de covariance estimée présentent une certaine dispersion autour de la variance σ^2 du bruit. Cette dispersion est présente, même dans le cas d'un bruit blanc. Les simulations montrent que la distribution des valeurs propres est quasi-linéaire en fonction de leur rang. Ceci nous amène à supposer une variation linéaire :

$$\lambda_i = \sigma^2 \left(\frac{L+1}{2} - i \right) \Delta \lambda \quad (29)$$

où $\Delta \lambda$, différence entre les valeurs propres de rangs successifs, peut être calculé à partir de la loi de probabilité du bruit.

Soit $\hat{\underline{R}}_B$ la matrice de covariance estimée du bruit :

$$\hat{\underline{R}}_B \triangleq \frac{1}{KT} \sum_{k,t} \underline{B}_k(t) \underline{B}_k^+(t), \quad (30)$$

et $\hat{\underline{R}}_B$ sa moyenne statistique :

$$\underline{R}_B = E[\hat{\underline{R}}_B] = \sigma^2 \underline{I} \quad (31)$$

Dans l'hypothèse d'un bruit gaussien circulaire, on trouve :

$$E \left\{ \text{Tr} \left[(\hat{\underline{R}}_B - \underline{R}_B)^2 \right] \right\} = \sum_i (\lambda_i - \sigma^2)^2 = \frac{L^2}{KT} \sigma^4 \quad (32)$$

d'où en utilisant (29)

$$\Delta \lambda = \sqrt{\frac{12L}{(L^2-1)KT}} \sigma^2 \quad (33)$$

La figure 4 présente la distribution des valeurs propres du bruit calculée à partir de (29) et (33). Elle montre une bonne concordance avec les courbes obtenues par simulation.

En présence des signaux sources, on peut considérer que les M vecteurs propres correspondant aux M plus grandes valeurs propres sont peu perturbées. Ainsi, la démarche précédente pour estimer les valeurs propres du bruit, peut être appliquée dans l'espace complémentaire de dimension $L-M$ (espace bruit).

Dans ce sous espace $\Delta \lambda$ prend la forme :

$$\Delta \lambda_M = \sqrt{\frac{12(L-M)}{[(L-M)^2 - 1]KT}} \sigma^2 \quad (34)$$

Ce résultat concorde également avec les simulations, fig. 4 pour $M = 3$.

Ce résultat peut être utilisé pour définir un critère de décision sur la valeur de M en comparant la valeur moyenne de $\Delta \lambda_M$ avec $\lambda_m - \lambda_{m+1}$.

SEPARATION DE SOURCES CORRELEES VOISINES PAR LES METHODES SPECTRALES A HAUTE RESOLUTION

IV. PERTURBATION DE L'ESPACE SOURCE DUE A LA PRESENCE DU BRUIT

En présence du bruit, chaque vecteur propre \underline{v}_m de l'espace propre source subit une perturbation $\delta \underline{v}_m$. Cette dernière peut être décomposée en une composante appartenant à l'espace source et une composante $\delta \underline{v}_m$ appartenant à un espace orthogonal à cet espace source. C'est la composante orthogonale qui est responsable des erreurs d'estimation des vecteurs sources.

En supposant une faible perturbation, on trouve [4] :

$$\delta \underline{v}_m \approx \frac{1}{\lambda_m} \left\{ \frac{1}{KT} \sum_{k,t} \underline{B}_{\perp k}(t) \underline{X}_k(t)^+ \right\} \underline{v}_m \quad (35)$$

où $\underline{B}_{\perp k}(t)$ est la composante du vecteur bruit $\underline{B}_k(t)$, orthogonal à l'espace source.

Soit $Q_{mk}(t)$ la composante normalisée de $\underline{Y}_k(t)$ projeté sur \underline{v}_m :

$$Q_{mk}(t) = \frac{-1/2}{\lambda_m} \underline{v}_m + \underline{Y}_k(t) \quad (36)$$

afin que :

$$\frac{1}{KT} \sum_{k,t} |Q_{mk}(t)|^2 = \frac{1}{\lambda_m} \underline{v}_m + R_y \underline{v}_m = 1 \quad (37)$$

et soit $\alpha_{mk}(t)$ la composante du signal bruité $\underline{X}_k(t)$ projeté sur \underline{v}_m :

$$\alpha_{mk}(t) = \frac{-1/2}{\lambda_m} \underline{v}_m + \underline{X}_k(t) \quad (38)$$

Ainsi (35) devient

$$\delta \underline{v}_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \left\{ \frac{1}{KT} \sum_{k,t} \alpha_{mk}^*(t) \underline{B}_{\perp k}(t) \right\} \quad (39)$$

En liaison avec ce qui a été dit précédemment (section III), cette perturbation est d'autant plus importante que λ_m est faible, d'où l'intérêt d'avoir une matrice bien conditionnée.

Le calcul de la perturbation est poursuivi ci-dessous dans le cas d'une seule source ; le résultat obtenu s'appliquerait au cas de sources bien séparées (dans ce cas les vecteurs sources sont approximativement vecteurs propres pour R_y). [11].

A partir de (39) et des définitions de $\alpha_{mk}(t)$ et de $\underline{B}_{\perp k}(t)$:

$$E \|\delta \underline{v}_1\|^2 = \frac{L-1}{3K^2T} \frac{\sigma^2}{\lambda_1} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\sigma^2}{\lambda_1} \right) \quad (40-a)$$

si $L \leq \frac{(N+1)}{2}$ et

$$E \|\delta \underline{v}_1\|^2 = \frac{1}{T} \frac{\sigma^2}{\lambda_1} \left\{ \left[\frac{L-K}{K} + \frac{K^2-1}{3LK} \right] + \left[\frac{L-K}{K} + \frac{2(K^2-1)}{3LK} \right] \frac{\sigma^2}{\lambda_1} \right\} \quad (40-b)$$

si $L \geq \frac{(N+1)}{2}$

Ce résultat nous permet d'étudier le comportement de la perturbation de l'espace propre en fonction de l'ordre de L.

La figure (5) montre que la courbe calculée à partir de (40) concorde bien avec la courbe obtenue par simulation.

VI. Variance sur l'estimation de ω_1 (une source)

La pulsation est cherchée par la méthode du vecteur orthogonal \underline{A} . Pour une source, le vecteur propre, unique, non bruité serait le vecteur source \underline{s} lui-même ; le poly-

nome $A(z)$ aurait donc exactement comme zéro $Z_1 = e^{j\omega_1}$. Le vecteur orthogonal au vecteur propre bruité est lui-même perturbé, mais il garde une racine $Z_1 + \Delta Z_1$ voisine

de Z_1 . Par une méthode de perturbation on peut calculer la variance de l'erreur correspondante $\Delta \omega_1$, sur ω_1 [11] :

$$E \{ \Delta \omega_1^2 \} = \frac{L}{2} \frac{\underline{A}^+ R_{\perp} \underline{A}}{|\underline{A}^+ \underline{s}|^2} \quad (41)$$

avec

$$R_{\perp} = E \left[\begin{array}{c} \delta \underline{v}_1 \\ \delta \underline{v}_1^+ \end{array} \right] \\ \underline{s} = \left[-\frac{L-1}{2} Z_1^{-\frac{L-1}{2}}, \dots, \frac{L-1}{2} Z_1^{\frac{L-1}{2}} \right] \quad (42)$$

Cette variance dépend du choix du vecteur \underline{A} dans l'espace orthogonal ; (41) serait minimal pour $\underline{A} = \underline{s}$ [11]. Une valeur proche de ce minimum est donnée par la méthode de Tuft-Kumaresan [6]. Cette méthode consiste à faire un choix particulier de \underline{A} dans l'espace propre source. On prend $a_0 = 1$ et on choisit le vecteur \underline{A} de norme minimale.

Dans le cas d'une seule fréquence, \underline{A} s'écrit :

$$\underline{A} = \frac{1}{L-1} [L-1, -Z_1, -Z_1^2, \dots, -Z_1^{L-1}]^T \quad (43)$$

Après développement des calculs [11], on obtient :

$$E [\Delta \omega_1^2] = \frac{4 \sigma^2}{3g_1^2 L K^2 T} \frac{L-1/2}{L-1} \left\{ 1 + \left(\frac{K}{L} + \frac{L+1}{4(L-1/2)} \right) \frac{\sigma^2}{L g_1^2} \right\} \quad (44)$$

Il est bien connu que pour des rapports signal/bruit très forts, la méthode de covariance à erreur de prédiction minimale [12] présente un faible biais et elle est presque équivalente à la méthode de Tuft-Kumaresan.

Or pour un ordre L et un rapport signal/bruit assez élevés, (40) se réduit à

$$E \{ \Delta \omega_1^2 \} \approx \frac{4 \sigma^2}{3g_1^2 L K^2 T} \quad (45)$$

Ce qui correspond au résultat asymptotique établi par Lang [13] dans le cas où il n'y a pas de moyennage temporel (T=1).

La comparaison de (44) avec les simulations est donnée par la figure (6). Elle montre que la courbe théorique constitue une bonne approximation pour la courbe réelle. La courbe théorique présente deux minima au-dessus et au dessous de N/2 ; l'un ou l'autre peut correspondre au minimum absolu selon le rapport signal sur bruit.

CONCLUSION

La dégradation des performances des méthodes haute résolution pour la localisation de sources corrélées ou à faible séparation angulaire est liée dans une large mesure au mauvais conditionnement de la matrice interspectrale. Il a été montré, en particulier dans le cas de deux sources, comment la situation peut être améliorée par l'utilisation d'un moyennage spatial et d'une méthode directe inverse d'estimation.

Cette analyse a été complétée en prenant en compte l'effet du bruit sur l'estimation. Un modèle pour la répartition des valeurs propres estimées du bruit a été introduit et peut servir de base pour la détermination du nombre de sources présentes. L'importance du bon conditionnement de la matrice est confirmé par le fait que la perturbation des vecteurs propres est d'autant plus grande que la valeur propre associée est faible. Enfin les résultats concernant la précision de localisation d'une source montrent que, indépendamment du problème de conditionnement de la matrice, l'introduction de moyennage spatial peut diminuer la variance d'estimation ; pour N capteurs la dimension optimale L de la matrice se situe entre 2N/3 et 3N/2 selon le rapport signal sur bruit.



SEPARATION DE SOURCES CORRELEES VOISINES PAR LES METHODES SPECTRALES A HAUTE RESOLUTION

REFERENCES

- [1] H. MERMOZ, "Imagerie, correlations et modèles", Annales des Télécommunications, vol. 31, n°1-2, janvier-février 1976 p. 17-36.
- [2] B. LUMEAU, H. CLERGEOT, "Séparation de sources dans le cas de signaux bruités à bruits décorrés", Colloque GRETSI, Nice, mai 1983, pp. 271-275.
- [3] G. BIENVENUE, L. KOPP, "Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach", ASSP. 31 n°5, pp. 1235-1245, Oct. 1983.
- [4] H. CLERGEOT, A. OUAMRI, S. TRESSSENS, "High resolution spectral methods for optimal discrimination of closely spaced correlated sources", ICASSP 1985.
- [5] J.P. PIGNON, "Goniomètre-téléométrie simultanées par la méthode des vecteurs propres en présence de trajets multiples : quelques résultats de simulation", colloque GRETSI, Nice, mai 1983, pp. 247- 252.
- [6] D.W. TUFTS, R. KUMARESAN, "Improved spectral resolution", Proc. IEEE (Lett), Vol 68, n°3, pp. 419-420, March 80.
- [7] D.W. TUFTS, R. KUMARESAN, "Estimating the angle of arrival of multiple plane waves", Vol AES-19, pp. 134-139.
- [8] O.L. FROST, "Power spectrum Estimation", in Proc. 1976 NATO Advanced Study Institute on Signal Processing, Portovenere (La Spezia), Italie, Sept. 1976.
- [9] T. DURRANI, K.C. SHARPMAN, "Eigenfilter approaches to adaptative array processing", IEE Proc. Vol. 130, pp. 2-28, Feb. 1983.
- [10] T.J. SHAN, T. KAILATH, "New adaptive processor for coherent signal and interference", ICASSP 84, pp. 3351-3354.
- [11] A. OUAMRI, S. TRESSSENS, "Méthodes à haute résolution d'identification des sources corrélées". Rapport interne, 1985.
- [12] D.W. TUFTS, R. KUMARESAN, "Estimating the frequencies of multiple sinusoïdes : making linear prediction perform like maximum likelihood", Proc. IEEE, Vol. 70, pp. 975-989, Sept. 1982.
- [13] S. LANG, "Near optimal frequency/angle of arrival estimates based on maximum entropy spectral techniques", ICASSP 80, pp. 829-832.

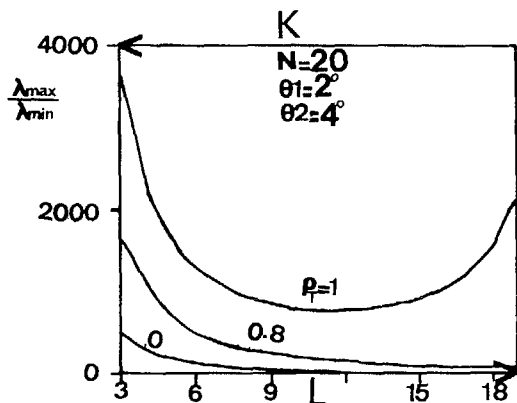


Figure 2. : Dispersion $\lambda_{max}/\lambda_{min}$.

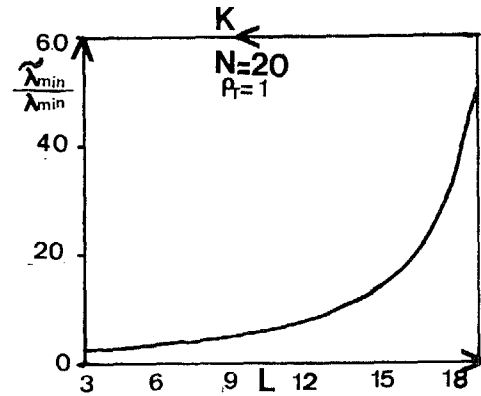


Figure 3. : Rapport $\tilde{\lambda}_{min}/\lambda_{min}$.

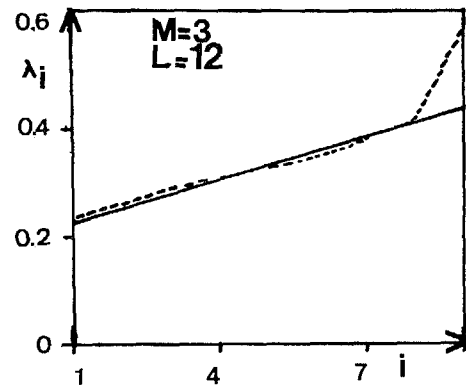


Figure 4. : Dispersion du bruit.

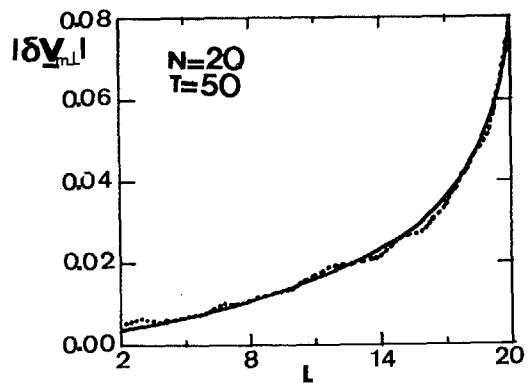


Figure 5. : Perturbation du vecteur propre.

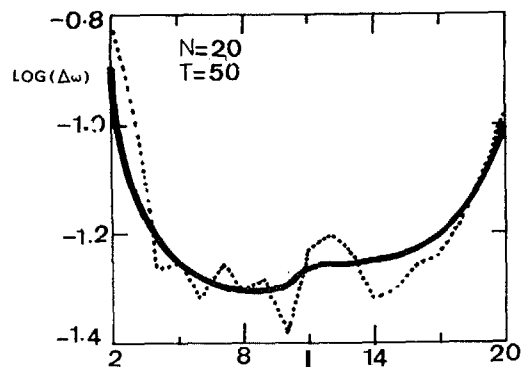


Figure 6. : Variance de ω - une source.