

DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

369



NICE du 20 au 24 MAI 1985

PRECISION DES METHODES HAUTE RESOLUTION ET BORNES DE CRAMER - RAO

D. THUBERT , L. KOPP , J.P. LE CADRE*

THOMSON-CSF DIVISION DES ACTIVITES SOUS-MARINES 06801 CAGNES /MFR CEDEX
* GERDSM Le Brusac 83140 SIX FOURS LES PLAGES

RESUME

Le pouvoir de résolution angulaire d'un système de localisation passif en acoustique sous-marine est un critère de performance essentiel. Certaines méthodes haute résolution sont asymptotiquement optimales vis-à-vis de ce critère ; en particulier, lorsque le problème est parfaitement modélisé la méthode du goniomètre adaptatif réalise la déconvolution parfaite du champ sonore. Cependant le bruit de mesure induit une erreur inévitable. Ainsi, tenant compte de ce bruit perturbateur, nous avons situé, pour le goniomètre adaptatif, les performances en discrimination angulaire par rapport aux performances ultimes fixées par les bornes de Cramer-Rao. Ces bornes ont donc été évaluées en bande étroite, estimant conjointement l'ensemble des paramètres inconnus, paramètres spectraux et paramètres géométriques. Dans un deuxième temps, une approche asymptotique, développée pour le calcul des performances en localisation du goniomètre adaptatif [1], a été étendue aux traitements classiques et adaptatifs d'antenne. L'ensemble de ces résultats théoriques a été validé par quelques simulations sur une antenne linéaire à capteurs équidistants. Enfin, nous inspirant des mesures réalisées sur simulations, nous avons dégagé un critère de résolution angulaire permettant de chiffrer le chemin qui nous sépare aujourd'hui d'un système optimal. Cette approche montre que dans une gamme de rapports signaux à bruit réalistes, on peut encore gagner plus de trois dB en pouvoir de résolution angulaire.

SUMMARY

The angular resolving power for a passive localisation method is an essential criterion of performance. High resolution methods are asymptotically efficient with respect to this criterion, the eigen value method is especially able to achieve the perfect deconvolution if the model is completely known. But in practice there is always some noise measurement corrupting this result. Consequently the aim of this study is to place the performances in resolving power of high resolution methods with regard to the best expected performances given by Cramer-Rao bounds. One have evaluated these bounds for narrow band signals, taking jointly all unknown parameters into account, geometric and spectral parameters. Secondly one have extended to classical and adaptative beamforming technics, an asymptotic approximation [1] for computing performances of the eigen value method. Some simulation, with an equispace hydrophones linear array, have been carried out to confirm these theoretical computations. Then using these experimental results, a criterion for angular resolving power has been choosen in order to calculate the remaining distance between high resolution methods and the optimal one which reaches the Cramer-Rao bounds. This approach shows that for realistic signal to noise ratio it is possible to get more than three extra dB on the angular resolving power.



1 - BORNES DE CRAMER-RAO

Le contexte et le vocabulaire que nous utiliserons sont ceux de l'écoute passive en acoustique sous-marine, mais ce que nous exposons ici s'applique également à l'analyse spectrale. Dans un premier temps nous allons évaluer les performances optimales des paramètres en localisation, pouvant être indifféremment le gisement, le site ou la distance. Il s'agit donc d'estimateurs efficaces atteignant les bornes de Cramer-Rao du problème. La technique permettant le calcul de ces bornes est bien connue, on pourra se référer à l'article de P.M. SCHULTEISS [2], nous rappelons brièvement les différentes étapes du calcul et son contexte.

a/ Modélisation du problème

Soit $\underline{S}(t)$ le vecteur des signaux reçus sur les K capteurs d'une antenne à l'instant t et $\underline{X}(f)$ la T.F.D. de $\underline{S}(t)$ à la fréquence f sur L échantillons temporels consécutifs. Le processus $\underline{S}(t)$ est supposé gaussien centré, ainsi le processus $\underline{X}(f)$ est asymptotiquement gaussien complexe centré de matrice de covariance $\Gamma(f)$.

$$(1) \quad \Gamma(f) = \sum_{i=1}^p \gamma_i(f) \underline{d}_i(f) \underline{d}_i^*(f) + \sigma(f) J(f)$$

Cette matrice de covariance décrit un champ sonore constitué de p sources dans un bruit de fond de cohérence spatiale J(f).

- $\gamma_i(f)$ = densité spectrale du signal de la i^{ème} source ;
- $\sigma(f)$ = densité spectrale du bruit de fond ;
- $\underline{d}_i(f)$ = vecteur modèle correspondant à la i^{ème} source, en θ_i

Nous nous limiterons au cas du bruit indépendant sur les capteurs de l'antenne ($J(f)$ = matrice identité $K \times K$) et pour alléger les notations nous ne ferons plus apparaître la fréquence ($\Gamma(f) = \Gamma$, $\underline{X}(f) = \underline{X}$, $\gamma_i(f) = \gamma_i$, $\sigma(f) = \sigma$, $\underline{d}_i(f) = \underline{d}_i$).

En pratique on dispose de N tranches temporelles indépendantes pendant lesquelles la situation est supposée stationnaire, ce qui conduit à une famille de N vecteurs $\underline{X}(f)$ indépendants. L'espace des observations est donc régi par une densité de probabilité $p_x(x_1, \dots, x_n)$

$$p_x(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^N \left\{ \prod_{k=1}^K \det(\Gamma) \exp \left\{ \text{tr}(\hat{\Gamma}_i \Gamma^{-1}) \right\} \right\} \quad (2)$$

$\hat{\Gamma}_i = \underline{X}_i \underline{X}_i^*$, tr(.) désigne la trace

Le calcul des bornes Cramer-Rao débute par la détermination de la matrice de Fisher des différents paramètres à estimer. Dans le problème qui nous intéresse il faut estimer l'ensemble des paramètres inconnus ; les paramètres spectraux γ_i et σ et les paramètres géométriques des différentes sources que nous noterons θ_i .

De façon parfaitement générale si \mathcal{L} désigne la vraisemblance logarithmique du processus considéré et E(.) l'espérance mathématique, la matrice de Fisher F s'exprime sous la forme suivante

$$F = E(\underline{\nabla} \mathcal{L} \underline{\nabla}^*) \quad \left\{ a_i \right\}, i=1, q \text{ désigne la famille des paramètres à estimer, (vecteur } \underline{a})$$

$$\left(\underline{\nabla} \mathcal{L} \right)_i = \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right) ; \quad \mathcal{L} = \text{Ln} (p_x(x_1, \dots, x_n))$$

La fonction \mathcal{L} se déduisant simplement de la relation (2), un peu d'algèbre matriciel conduit à l'expression condensée suivante :

$$(F)_{k,1} = -N \cdot \text{tr} \left\{ \frac{d}{da_k} \left(\Gamma^{-1} \right) \cdot \frac{d}{da_e} (\Gamma) \right\} = F(a_k, a_e) \quad (3)$$

L'inégalité de Cramer-Rao s'exprime de la façon suivante :

$$\text{cov}(\underline{a}) - F^{-1} \geq 0$$

Dans les calculs qui suivent nous n'estimerons qu'un seul paramètre par source, le gisement par exemple noté θ_i , $i=1, p$.

A partir des relations (1) et (3) on peut calculer les termes de la matrice de Fisher ($2p+1, 2p+1$)

Notations $\underline{u} = \frac{d}{d\theta}(\underline{d})$; $|| \cdot ||$ = module ;

Re { . } = partie réelle

$F(\sigma, \sigma) = N \text{tr}(\Gamma^{-2})$ $F(\sigma, \gamma_e) = N \Gamma^{-1} \underline{d}_e ^2$ $F(\sigma, \theta_e) = 2N \gamma_e \text{Re} \left\{ \underline{d}_e^+ \Gamma^{-2} \underline{u}_e \right\}$ $F(\gamma_k, \gamma_e) = N \underline{d}_k \Gamma^{-1} \underline{d}_e ^2$ $F(\gamma_k, \theta_e) = 2N \gamma_e \text{Re} \left\{ \underline{d}_k^+ \Gamma^{-1} \underline{d}_e \cdot \underline{u}_e^+ \Gamma^{-1} \underline{d}_k \right\}$ $F(\theta_k, \theta_e) = 2N \gamma_k \gamma_e \text{Re} \left\{ \underline{d}_k^+ \Gamma^{-1} \underline{d}_e \cdot \underline{u}_e \Gamma^{-1} \underline{u}_k + \underline{d}_k^+ \Gamma^{-1} \underline{u}_e \cdot \underline{d}_e^+ \Gamma^{-1} \underline{u}_k \right\}$	TABLEAU (1)
---	-------------

Ces relations permettent donc de calculer les bornes de Cramer-Rao des estimateurs de l'ensemble des paramètres inconnus pour un champ sonore constitué de p sources dans du bruit incohérent.

2 - APPROCHE ASYMPTOTIQUE

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, les performances d'un traitement d'antenne sont intimement liées au pouvoir de résolution angulaire, une approche asymptotique présentée par K. SHARMAN, M. WAX et T. KAILATH permet de calculer les moments des estimateurs de localisation pour le modèle décrit par la relation (1). Le calcul effectué par les auteurs précités a été réalisé pour la technique du goniomètre adaptatif mais il peut être étendu au traitement classique et adaptatif d'antenne. Nous rappelons les principales étapes du calcul pour le goniomètre adaptatif et présentons les résultats pour les trois traitements d'antenne, classique, adaptatif et goniomètre. La technique du goniomètre adaptatif utilise la décomposition en éléments propres de la matrice de densité spectrale estimée $\hat{\Gamma}$. Asymptotiquement les éléments propres de cette matrice se divisent en deux sous-espaces orthogonaux, espace source (dimension p), et espace bruit (dimension K-p). Les estimateurs de localisation "naturels" des positions θ_i sont obtenus en repérant les minima de la projection du vecteur modèle \underline{d}_θ sur l'espace bruit, soit S($\hat{\theta}$) cette projection.

$$S(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{K-p} || \underline{d}_\theta^+ \hat{v}_i ||^2$$

$\left\{ \hat{v}_i, \hat{\sigma} \right\} i=1, k-p$ éléments propres associés à la plus petite valeur propre $\hat{\sigma}$ de $\hat{\Gamma}$ décrivant l'espace bruit.

$\left\{ \hat{v}_i, \hat{\lambda}_i \right\} i=1, K-p, K$ éléments propres décrivant l'espace source

Remarque : on suppose ici que $E(\Gamma) = \Gamma$

On peut également construire la fonction S(θ) obtenue à partir des éléments propres v_i de la matrice de densité spectrale Γ donnée par la relation (1),

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{K-p} || \underline{d}_\theta^+ v_i ||^2$$

Les fonctions $S(\hat{\theta})$ et $S(\theta)$ possèdent p minima qui définissent respectivement les estimateurs $\hat{\theta}$ et les positions véritables des sources θ . Cela implique donc que la dérivée g de S par rapport à θ s'annule respectivement aux points

- 1) $\theta_e, \{ \hat{v}_i \} \quad i = 1, K-p$
- 2) $\hat{\theta}_e, \{ \hat{v}_i \} \quad i = 1, K-p$

Considérons un développement limité au premier ordre de la fonction g au voisinage du point θ_e

$$g(\hat{\theta}_e, \{ \hat{v}_i \}) = g(\theta_e, \{ \hat{v}_i \}) + \left(\frac{dg}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_e} + \sum_{i=1}^{K-p} \left(\frac{dg}{d\hat{v}_i} \right)_{\theta=\theta_e} d\hat{v}_i$$

$$\Rightarrow d\theta_e = -h_e^{-1} \sum_{i=1}^{K-p} \left(\frac{dg}{d\hat{v}_i} \right)_{\theta=\theta_e} d\hat{v}_i \quad i \in \{1, p\}$$

$$\text{où } h_e = \left(\frac{d^2 S}{d\theta^2} \right)_{\theta=\theta_e} ; \left(\frac{dg}{d\hat{v}_i} \right)_{\theta=\theta_e} = 2 \frac{d^+}{d\hat{v}_i} d\hat{v}_i \hat{v}_i^+ u_e$$

en posant $d\hat{v}_i = \hat{v}_i - v_i$, $P_n = \sum_{i=1}^{K-p} v_i v_i^+$, $P_s = I - P_n$

$$d\theta_e = -2 h_e^{-1} \sum_{i=1}^{K-p} \left\{ \frac{d^+}{d\hat{v}_i} (P_s \hat{v}_i) (v_i^+ u_e) \right\}$$

Par ailleurs on connaît la distribution asymptotique (N grand) de la projection $P_s \hat{v}_i$, $i \in \{1, K-p\}$ [4]

$$P_s \hat{v}_i \rightarrow \mathcal{N} \left(0, \sum_{j=1}^{K-p} \beta_j v_j v_j^+ \right) \quad i \in \{1, K-p\}$$

$$\beta_j = \frac{\sigma}{N} \frac{\lambda_j}{(\lambda_j - \sigma)^2}$$

$$\text{cov} (P_s \hat{v}_i, P_s \hat{v}_j) = 0 \quad i \neq j$$

ceci conduit au résultat suivant : (4)

$$-E(d\theta_e) = 0 \quad \hat{\theta}_e \text{ est asymptotiquement sans biais}$$

$$-E(d\theta_e d\theta_k^+) = \frac{1}{2} h_e^{-1} \text{Re} \left\{ \left(\frac{d^+}{d\hat{v}_k} u_e^+ P_n u_k \right) h_e^{-1} (e, k) \right\} \in [1, p]^2$$

$$\text{où } \alpha_{ek}^+ = \frac{d^+}{d\hat{v}_k} \left(\sum_{j=1}^{K-p} \beta_j v_j v_j^+ \right) d_k, \quad h_e = \text{Re} \left\{ u_e^+ P_n u_e \right\}$$

Remarque : Traitement classique $S(\hat{\theta}) = d_{\hat{\theta}}^+ \Gamma d_{\hat{\theta}}$

$$\text{Traitement adaptatif } S(\hat{\theta}) = (d_{\hat{\theta}}^+ \Gamma^{-1} d_{\hat{\theta}})^{-1}$$

Pour ces deux derniers traitements une difficulté supplémentaire apparaît car ces méthodes biaisent l'ensemble des paramètres de localisation par construction. Ainsi si plus de deux sources sont présentes dans le champ aux positions θ_e , les deux traitements même asymptotiquement situent ces sources dans des positions biaisées notées α_e .

Avec ces notations on trouve en posant $S_e = \left(\frac{d d}{d\theta} \right)_{\theta=\alpha_e}$

$$t_e = \left(\frac{d^2 d}{d\theta^2} \right)_{\theta=\alpha_e}$$

Traitement classique : (5)

$$E(d\alpha_e) = 0$$

$$E(d\alpha_e d\alpha_k^+) = h_e^{-1} B_{ek} h_k^{-1}$$

$$\text{où } h_e = 2 \text{Re} \left\{ t_e^+ \Gamma \frac{d^+}{d\hat{v}_e} S_e^+ \Gamma S_e \right\}$$

$$B_{ek} = \frac{2}{N} \text{Re} \left\{ \frac{d^+}{d\hat{v}_e} \Gamma \frac{d^+}{d\hat{v}_k} S_k^+ \Gamma S_e^+ + \frac{d^+}{d\hat{v}_e} \Gamma S_k \frac{d^+}{d\hat{v}_k} \Gamma S_e \right\}$$

Pour le traitement adaptatif on obtient un résultat formellement identique en remplaçant dans les deux dernières expressions Γ par Γ^{-1} . Ainsi à partir des différentes relations que nous avons établies il est possible d'évaluer asymptotiquement l'expression des variances et covariances des estimateurs des paramètres géométriques inconnus pour les trois traitements d'antenne. On peut montrer dans le même contexte que si le champ sonore est constitué d'une seule source dans du bruit incohérent les trois traitements sont asymptotiquement équivalents et atteignent la borne de Cramer-Rao.

Ainsi si θ désigne le gisement d'une source seule dans du bruit incohérent la borne de Cramer-Rao du problème est donnée par

$$E((\hat{\theta} - \theta)^2) \geq \frac{K^2}{2N} \left(\frac{1 + \frac{K\lambda}{\sigma}}{\frac{K\lambda}{\sigma}} \right) \left(K \|u_{\theta}\|^2 - \|d_{\theta}^+ u_{\theta}\|^2 \right)^{-1}$$

En développant les relations établies en (4) et (5) on montre que les résultats coïncident avec la borne de Cramer-Rao. Naturellement pour le problème à 2 sources il n'est plus possible de faire cette correspondance, les estimateurs des différentes méthodes ne sont pas efficaces.

3 - SIMULATIONS

a/ Ecart types des paramètres de localisation

Dans un premier temps nous avons voulu valider l'approche asymptotique que nous avons étendue au traitement classique d'antenne. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux antennes linéaires à capteurs équidistants et omnidirectionnels. Nos simulations ont été réalisées sur une antenne de 9 capteurs espacés d'une demi longueur d'onde. Les matrices de densité spectrale utilisées pour conduire nos simulations sont estimées par la méthode du périodogramme.

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i X_i^+ \quad \dim(X_i) = \text{nombre de capteurs} = K$$

Les vecteurs X_i sont les transformées de Fourier, à la fréquence considérée, des signaux temporels reçus sur les capteurs de l'antenne, sur N supports temporels indépendants.

Pour un champ sonore constitué de deux sources de même puissance dans du bruit incohérent un des paramètres important pour caractériser le pouvoir de résolution angulaire est l'écart angulaire séparant ces deux sources (noté $\Delta\theta$). Nous avons concentré notre attention sur ce paramètre et avons analysé son comportement statistique en fonction du rapport signal à bruit. Sur la figure 1 nous avons comparé les résultats théoriques décrits par la relation (5) avec des estimations réalisées sur 50 tirages aléatoires indépendants. Nous avons donc analysé l'évolution de l'écart type de $\Delta\theta$ noté $\sigma(\Delta\theta)$, en fonction de $\Delta\theta$ pour différents rapports signaux à bruits calculés au niveau des capteurs (noté S/b). Sur les deux axes les coordonnées sont exprimées en fonction de la largeur du lobe classique à 3 dB (noté 2.t3). Les ordonnées sont exprimées en dB. Le nombre de tranches temporelles indépendantes N que l'on peut assimiler au BT est de 100.



On constate que l'approche asymptotique, qui n'est valable en toute rigueur que pour des valeurs élevées de N , constitue déjà une approximation satisfaisante pour 100 spectres indépendants. On note également un comportement du traitement classique assez inattendu en fonction de $\Delta\theta$. L'écart type $\sigma(\Delta\theta)$ n'est pas une fonction monotone décroissante de $\Delta\theta$. Il existe des directions privilégiées pour lesquelles la variance de mesure sur l'écart angulaire est plus faible. En développant la relation (5) il apparaît clairement qu'il s'agit des points où la fonction de directivité présente une dérivée nulle. Par contre les zones où la variance est maximum correspondent aux points où les deux sources sont orthogonales.

Sur les deux figures suivantes (2 et 3) sont présentés dans un système d'axe identique à celui de la figure 1 les résultats obtenus par la méthode adaptative et par le goniomètre. Ici encore l'approche asymptotique constitue une bonne approximation pour une large gamme de rapports signaux à bruits. Le comportement se dégrade en limite de détection ce qui s'explique par un nombre de tirages efficaces trop faible. Nous avons constaté que pour des valeurs de $\Delta\theta / 2t_3$ supérieures à 1.5 les deux traitements convergent vers la borne de Cramer-Rao du problème à 2 sources. Plus finement on trouve une dépendance de $\sigma(\Delta\theta)$ vis-à-vis du rapport signal à bruit de la forme suivante :

$$\sigma(\Delta\theta) = \frac{f(\Delta\theta)}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{1 + K \gamma/\sigma}}{K \gamma/\sigma} \quad \Delta\theta \geq 1.5 * (2t_3)$$

$f(\Delta\theta)$ étant une fonction à déterminer mais variant peu avec $\Delta\theta$

Sur la figure 4 nous avons représenté pour différents rapports signaux à bruits la borne de Cramer-Rao et l'écart type asymptotique donné par la relation (4). Le goniomètre approche la borne de Cramer-Rao d'autant plus vite que le rapport signal à bruit est élevé, à $\Delta\theta$ fixé. Cependant en se rapportant à la figure 3 on note que c'est précisément dans la zone où les écarts entre le goniomètre et la borne de Cramer-Rao sont les plus sensibles que se situent les limites de détection du goniomètre. Toujours sur la figure 4 on remarque un comportement inattendu de la borne de Cramer-Rao pour de forts rapports signaux à bruits et de faibles écarts angulaires. Ce comportement a été souligné par F.M. White [3], il semble indiquer que pour un même rapport signal à bruit, il existe un domaine d'écarts angulaires où la variance de mesure d'un système de localisation optimal diminue alors que les 2 sources se rapprochent l'une de l'autre.

b/ Un critère de résolution

Nous nous sommes intéressés au pouvoir de résolution angulaire du goniomètre pour un nombre de spectres intégrés N donné et une gamme réaliste de rapport signaux à bruit. Pour évaluer ce pouvoir de résolution nous avons déterminé sur 800 tirages indépendants l'écart angulaire minimum pour lequel la probabilité de détection est de 0.5. Nous avons constaté sur l'ensemble des simulations que le rapport de l'écart type $\sigma(\Delta\theta)$ divisé par $\Delta\theta$ est indépendant du rapport signal à bruit et du nombre de spectres intégrés quand on atteint une probabilité de détection de 0.5

$$(6) \quad \frac{\sigma(\Delta\theta)}{\Delta\theta} = \text{Cte} / P_d = 0.5 \Rightarrow \Delta\theta = k \text{résolutions}$$

Sur la figure 5 nous avons représenté ce rapport en fonction du rapport signal à bruit pour $N = 100$.

De même pour un rapport signal à bruit de 0 dB nous avons représenté son évolution pour N variant de 50 à 10 000 Fig. 6. On peut admettre, comme en témoignent ces deux courbes, que ce rapport est une constante du problème à nombre de capteurs donné. Elle se situe aux alentours de 0,16 pour 9 capteurs. En supposant qu'un système optimal de localisation posséderait la vertu énoncée en (6) il est possible de déterminer la borne de Cramer-Rao du pouvoir de résolution et par conséquent d'évaluer le gain d'un système optimal sur le traitement classique dont la résolution angulaire est fixée par $2t_3$. Sur la figure 7 nous avons représenté cette borne en supposant que pour un système optimal cette constante se situerait autour de 0.2. On trouvera donc sur cette figure le gain (exprimé en dB) sur le traitement classique d'un système atteignant la borne de Cramer-Rao comparé d'une part aux mesures réalisées par le test de détection (test de sphéricité) sur les valeurs propres de la matrice l' d'autre part aux mesures réalisées avec le goniomètre. On rappelle que le test de sphéricité est le suivant :

$$T(p) \underset{H_p}{\overset{H_p}{\sum}} \eta_p \quad \text{prob} \left\{ T(p) \leq \eta_p / \text{exactement} \right\} = \alpha_p$$

Le seuil η_p détermine le taux de fausse alarme (ici $p_{fa} = 10^{-2}$)

H_p = hypothèse "au plus p sources"

\bar{H}_p = hypothèse "au moins $p + 1$ sources"

$$T(p) = \left(\frac{g(p)}{a(p)} \right)^{k-p}$$

où g_p et a_p désignent respectivement les moyennes géométriques et arithmétiques des p plus petites valeurs propres de \hat{l}

On remarque une différence sensible des gains entre la méthode du goniomètre qui utilise la projection du vecteur modèle sur l'espace engendré par les 7 plus petites valeurs propres de la matrice de densité spectrale \hat{l} et le test de sphéricité. Ce dernier semble approcher rapidement la borne de Cramer-Rao quand le rapport signal à bruit augmente, la tendance s'inverse pour le goniomètre. Au vu de ces courbes, et en admettant un critère de résolution de la forme $\sigma(\Delta\theta)/\Delta\theta = \text{Cte}$ il apparaît qu'un chemin important reste à parcourir pour discriminer deux sources de façon optimale. On peut encore gagner 5 dB à 0 dB de rapport signal à bruit et presque 3 dB à -10 dB. Cependant toute cette analyse repose sur l'hypothèse que la résolution optimale peut être définie au moyen de la relation (6) et on peut envisager certains cas où une telle définition est mise en défaut. En effet, un système de localisation pour lequel la variance de l'écart croît fortement, quand l'écart entre 2 sources diminue et de façon si importante qu'il est toujours possible de détecter deux sources en étant parfaitement incapable de les localiser. Cela signifie que la variance sur la position d'une des sources $\sigma(\theta)$ sera comparable à l'écart angulaire séparant les deux sources. Pour définir de façon réaliste le pouvoir de résolution angulaire il faut adjoindre à la condition (6) une limite sur l'écart type d'une des sources. Sur les simulations que nous avons réalisées le rapport $\sigma(\theta_i) / \Delta\theta$ ($i = 1, 2$) se situe aux alentours de 0,1 pour une probabilité de détection de 0,5. (θ_i , $i = 1, 2$) représente la position des 2 sources).

Conclusion

Nous avons utilisé comme point de départ de cette étude le calcul des bornes de Cramer-Rao, en bande étroite, des différents estimateurs qui interviennent dans la modélisation d'un problème d'acoustique sous-marine passive à plusieurs sources. Nous avons évalué la matrice de covariance des estimateurs efficaces



PRECISION DES METHODES HAUTE RESOLUTION ET BORNES DE CRAMER-RAO

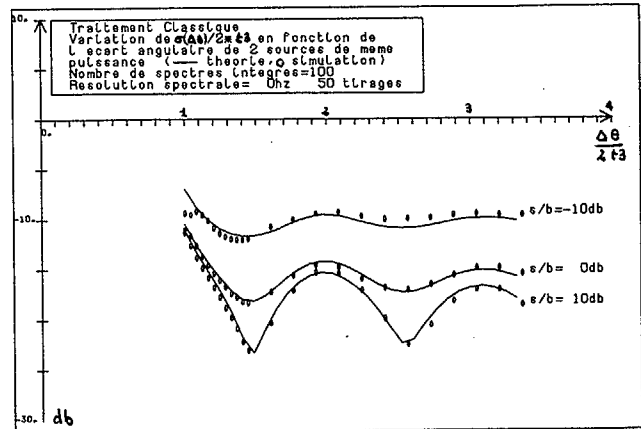
des paramètres géométriques et spectraux pour un champ sonore constitué de p sources spatialement parfaitement cohérentes dans un bruit de fond incohérent. Dans une approche asymptotique des performances en localisation des méthodes classiques, adaptative et du goniomètre adaptatif nous avons calculé les variances et covariance des paramètres de position. Ce calcul a été validé par des simulations sur une antenne linéaire. Ces mêmes simulations ont montré que le pouvoir de résolution angulaire du goniomètre adaptatif pour une probabilité de détection de 0,5 est assez bien caractérisé par le rapport suivant :

$$\frac{\sigma(\Delta\theta)}{\Delta\theta} = \text{Cte} \sqrt{N} \quad \text{et le rapport signal à bruit} \\ \Delta\theta \quad P_d = 0,5$$

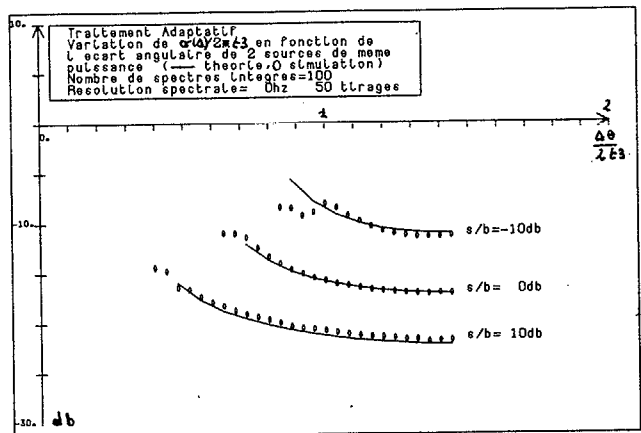
Nous avons utilisé ce même critère pour définir le pouvoir de résolution angulaire d'un système atteignant les bornes de Cramer-Rao. On constate que dans une gamme de rapport signaux à bruit réaliste, il reste entre 3 dB à 5 dB à gagner en pouvoir de résolution angulaire. Cependant il faut souligner que ces résultats sont fondés sur l'hypothèse qu'un système qui discrimine correctement deux sources, doit être également un système qui localise efficacement, ce qui dans la pratique semble être une hypothèse raisonnable.

REFERENCES

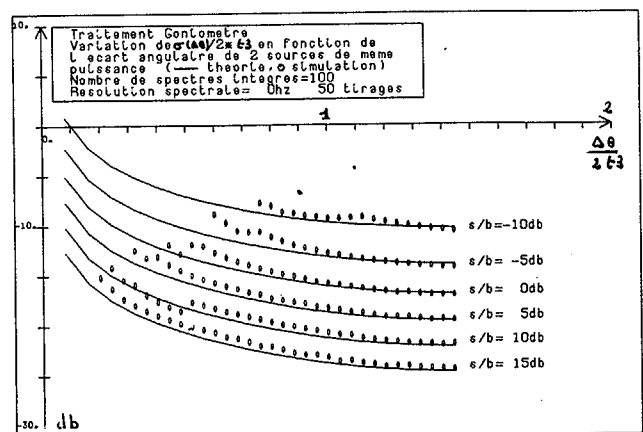
- [1] K. SHARMAN, M. WAX, T. KAILATH
"Asymptotic statistic of covariance eigenstructure spectral analysis methods" A paraître dans I3E, trans on ASSP
- [2] P.M. SCHULTEISS
"Locating a passive source with array measurement" A summary of results Icassp 79
- [3] F.M. White (Group 44 Standford)
"Performances of Bayes - optimal angle of arrival estimators" Report TR -654
- [4] G. BIENVENU, L. KOPP
"Optimality of high resolution array processing using the eigen system approach" IEEE Trans. ASSP 31, 5, pp 1235-1248, Oct. 1983
- [5] J. MUNIEK
"Pouvoir séparateur en estimation non linéaire en présence de bruit faible". Actes du Colloque GRETSI.



- FIGURE 1 -



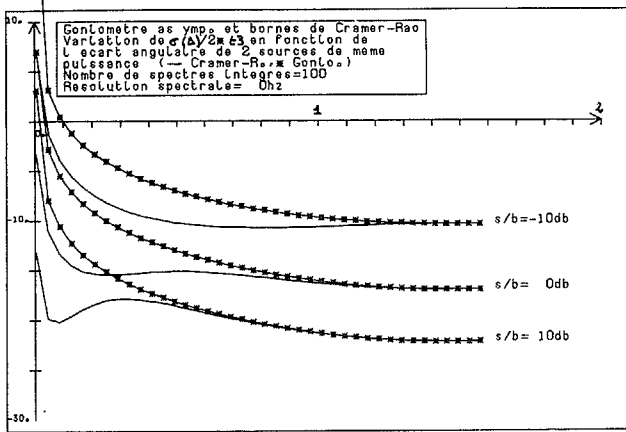
- FIGURE 2 -



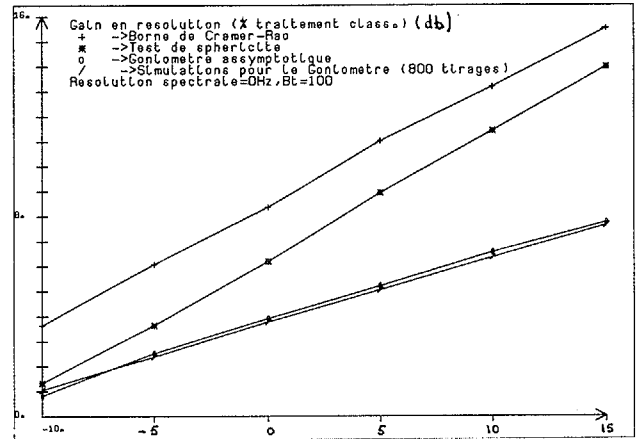
- FIGURE 3 -



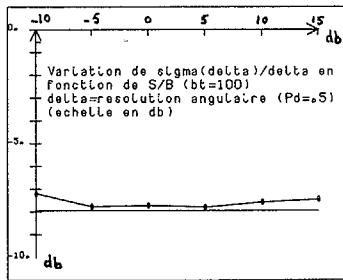
PRECISION DES METHODES HAUTE RESOLUTION ET BORNES DE CRAMER-RAO



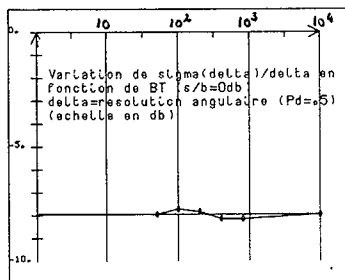
- FIGURE 4 -



- FIGURE 7 -



- FIGURE 5 -



- FIGURE 6 -