

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

465



NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

COMPARAISON DES DEUX PRINCIPALES METHODES D'ANALYSE SPECTRALE : LA METHODE DU PERIODOGRAMME MOYENNE (ANALYSEURS A FFT) ET LA METHODE DU CORRELOGRAMME (ANALYSEURS PAR TRANSFORMATION DE FOURIER NUMERIQUE DE LA FONCTION DE CORRELATION)

Jacques MAX\*, Marc DIOT \*\*

\* CEA-CEN/G LETI/MCTE - 85 X - 38041 GRENOBLE CEDEX (FRANCE)

\*\* UNIVERSITE DE TOULON

---

## RESUME

Les deux méthodes essentielles pour obtenir des densités spectrales sont la méthode du périodogramme (analyseurs à FFT) et la méthode du corrélogramme (analyseurs à corrélation).

Nous montrons que, contrairement à l'opinion répandue, ces deux méthodes ne sont pas équivalentes. Nous comparons donc ces deux méthodes et en déduisons la supériorité de la méthode par corrélation du point de vue de la précision de l'estimation, de la résolution et de l'étendue spectrale des signaux que l'on peut traiter.

## SUMMARY

There are two main ways for digital spectral analysis. Spectral analysis by mean of FFT (so called periodogram method) and spectral analysis by mean of Fourier transform of correlation function (so called correlogram method).

We show that, on the contrary of general opinion, these two methods are not equivalent.

In this paper we compare both methods and we infer superiority of correlogram method (accuracy, resolution, flexibility, bandwidth).



## 1 - INTRODUCTION

En 1969, FAUQUE, BERTHIER, MAX et BONNET [1] proposèrent une méthode d'analyse spectrale (appelée par la suite méthode du corrélogramme) basée sur le théorème de WIENER-KINCHINE. Cette méthode trouvait son intérêt dans les travaux antérieurs de cette même équipe LETI-CEPHAG [2,3] qui montraient qu'un codage très grossier (6, 4, 2 et même 1 bits) permettait d'obtenir la fonction de corrélation et donc la densité spectrale avec une excellente précision. Cette méthode qui a donné lieu à un certain nombre de réalisations industrielles (S.A.I.P., INTERTECHNIQUE) a été rapidement supplantée, pour les signaux jusqu'aux fréquences acoustiques, par les analyseurs de spectre à FFT importés des U.S.A. (méthode dite du périodogramme). Depuis il a été admis que ces deux méthodes étaient équivalentes. Cependant de nombreux expérimentateurs, dont FEST [4], MASSON [5] ont constaté que la méthode du corrélogramme donnait de meilleurs résultats que la méthode du périodogramme. Il y avait là un paradoxe [6] que nous nous sommes attachés à lever.

## 2 - TRANSFORMEE DE FOURIER (TF) ; TRANSFORMEE DE FOURIER NUMERIQUE (TFN) ; TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE (TFD)

Un signal  $x(t)$  a une transformée de Fourier :

$$Y(v) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-2\pi jvt] dt \quad (1)$$

Si le signal  $x(t)$  est à support borné  $(0, T)$

$$Y(v) = \int_0^T x(t) \exp[-2\pi jvt] dt$$

Si  $x(t)$  est échantillonné conformément au théorème de SHANNON afin que le repliement de spectre soit négligeable, et si  $x(t)$  se compose de  $N$  échantillons :

$$\left\{ x_k \right\}_N \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\left\{ x_k \right\}_N \quad \text{a une TF :}$$

$$TF \left[ \left\{ x_k \right\}_N \right] = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) \cdot \exp[-2\pi jvkT_e] \quad (2)$$

Comme l'on opère par voie numérique,  $v$  doit être discrétisé :  $v = \Delta v$

on a alors la TFN

$$TFN \left[ \left\{ x_k \right\}_N \right] = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) \exp[-2\pi \Delta v kT_e] \quad (3)$$

$\Delta v$  doit être choisi de telle manière que la TF soit échantillonnée conformément au théorème de SHANNON [7,15]

Si  $N = 2^p$  on définit la TFD

$$TFD \left[ \left\{ x_k \right\}_N \right] = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) \exp[-2\pi j \frac{k\Delta}{N}] \quad (4)$$

Cette TFD est justiciable des algorithmes de calcul rapide, dits FFT (Cooley-Tukey ; Sande ; Vinograd).

La comparaison de (2), (3) et (4) montre que la TFD est la TF échantillonnée au pas  $\Delta F = F_e/N$ .

Lorsqu'on utilise la TFD, on ne peut choisir  $\Delta v$  qui est alors égal à  $\Delta F = F_e/N$ , il n'est donc pas certain que ce pas d'échantillonnage respecte le théorème de SHANNON. Il est donc capital de ne pas confondre Transformée de Fourier discrète et Transformée de Fourier.

Rappelons que, dans leur publication originale COOLEY et TUKEY ne parlèrent pas de Transformée de Fourier, mais de Série de Fourier, ce qui n'est évidemment pas équivalent.

## 3 - ANALYSE SPECTRALE DE SIGNAUX ALEATOIRES STATIONNAIRES

### 3.1. Méthode du périodogramme (Analyseurs à FFT) [6]

#### 3.1.1. Filtrage du spectre

Le signal temporel  $x(t)$  de spectre  $S(v)$  est échantillonné à la fréquence  $F_e = 1/T_e$  et est divisé en sections de  $N$  mots, donc de durée  $\theta = NT_e$ . On calcule la TFD puis la densité spectrale discrète de chaque section  $S_m(\frac{\Delta F_e}{N}, NT_e)$  et l'on montre que

$$E \left[ S_m \left( \frac{\Delta F_e}{N}, NT_e \right) \right] = S \left( \frac{\Delta F_e}{N}, NT_e \right) \quad \text{avec}$$

$$S \left( \frac{\Delta F_e}{N}, NT_e \right) = S(v) * NT_e \left[ \frac{\sin \pi v NT_e}{\pi v NT_e} \right]^2 \quad v = \frac{\Delta F_e}{N} \quad (5)$$

La relation (5) montre que le sectionnement du signal temporel  $x(t)$  introduit sur le spectre un filtrage en

$$\left[ \frac{\sin \pi v NT_e}{\pi v NT_e} \right]^2$$

certain auteurs appellent biais ce filtrage.

#### 3.1.2. Variance de l'estimation

Du fait de la durée d'analyse forcément finie et limitée à  $n$  sections soit une durée  $n.N.T_e = MT_e = T$ , il y a une erreur d'estimation dont la variance est [8]

$$V_p = \frac{1}{n} = \frac{N}{M} \quad (6)$$



COMPARAISON DES DEUX PRINCIPALES METHODES D'ANALYSE SPECTRALE : LA METHODE DU PERIODOGRAMME MOYENNE (ANALYSEURS A FFT) ET LA METHODE DU CORRELOGRAMME (ANALYSEURS PAR TRANSFORMATION DE FOURIER NUMERIQUE DE LA FONCTION DE CORRELATION)

Si l'on admet (mais est-ce correct ? voir Fig. 1) que le filtrage en  $\left[ \frac{\text{Sin} \pi \nu N T_e}{\pi \nu N T_e} \right]^2$  équivaut à un filtre idéal (rectangulaire) de largeur  $\Delta F = \frac{1}{N T_e} = \frac{F_e}{N}$  on peut écrire :

$$V_p = \frac{N}{M} = \frac{N T_e}{M T_e} = \frac{1}{T \Delta F} \quad (7)$$

$\Delta F$  étant appelé "finesse d'analyse".

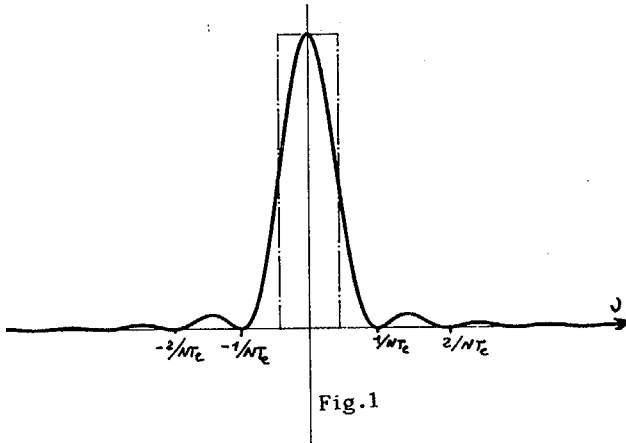


Fig.1

3.1.3. Compromis Variance-Filtrage

D'après (6), plus N est petit, plus la variance est faible, mais plus est important l'effet de filtrage. Pour que cet effet de filtrage soit négligeable, il faut que :

$$S(\nu) * N T_e \left[ \frac{\text{Sin} \pi \nu N T_e}{\pi \nu N T_e} \right]^2 \neq S(\nu) \quad (8)$$

ou, par TF

$$c(\tau) * \left[ 1 - \frac{|\tau|}{N T_e} \right] \neq c(\tau) \quad (9)$$

ce qui nécessite (Fig. 2) que le rayon de corrélation du signal soit très inférieur à la durée  $N T_e$  de la section du signal

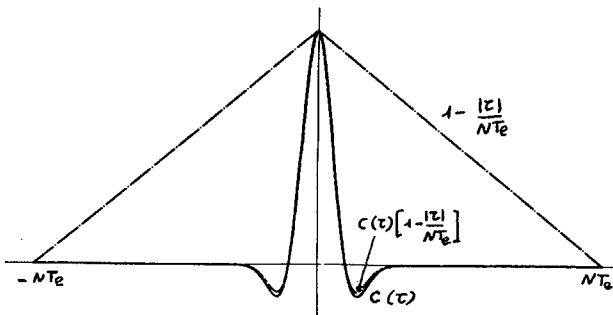


Fig.2

Il y a donc une contradiction entre une analyse fine et une variance faible, ce qui ressort bien de la relation (7).

3.1.4. Utilisation de fenêtres de pondérations

Si l'on souhaite utiliser une fenêtre de pondération [10] celle-ci doit être appliquée à chaque section du signal temporel, il faut donc décider a priori du choix de la fenêtre et une fois l'analyse commencée, il n'est plus possible de revenir sur ce choix.

3.2. Méthode du corrélogramme [8,9]

3.2.1. Filtrage du spectre

On calcule d'abord (une estimation de) la fonction de corrélation, puis on en fait la transformée de Fourier (numérique) et non la TFD car, comme on ne fait cette TFN qu'une fois, il n'est pas nécessaire d'aller très vite, et l'on peut donc choisir le pas d'échantillonnage en fréquence aussi petit que nécessaire. En réalité la fonction de corrélation sera limitée par le décalage maximum réalisable  $\tau_0 = N_0 T_e$  ; on aura alors

$$C(\tau, \tau_0) = C(\tau) * \text{rect} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) \quad (10)$$

et, en appliquant le théorème de WIENER-KINCHINE :

$$S(\nu, \tau_0) = S(\nu) * 2\tau_0 \left[ \frac{\text{Sin} 2\pi \nu \tau_0}{2\pi \nu \tau_0} \right] \quad (11)$$

Cette relation montre que la troncature inévitable de la fonction de corrélation introduit sur le spectre un filtrage en  $\frac{\text{Sin} 2\pi \nu \tau_0}{2\pi \nu \tau_0}$  (filtrage appelé biais par certains auteurs).

3.2.2. Variance de l'estimation

La fonction de corrélation étant calculée sur une durée limitée ( $T = M T_e$ ) du signal, il en résulte une erreur d'estimation sur cette fonction de corrélation, et, après une TF une erreur d'estimation sur le spectre. On démontre [8] que la variance sur les spectre est :

$$V_c = \frac{2\tau_0}{M} = \frac{2N_0 T_e}{M T_e} = \frac{2N_0}{M} \quad (12)$$

Si l'on admet (mais est-ce correct ? voir Fig. 3) que le filtre en  $\frac{\text{sin} 2\pi \nu \tau_0}{2\pi \nu \tau_0}$  est équivalent à un filtre idéal de largeur  $\Delta F = \frac{1}{2\tau_0}$

on peut écrire la variance sous la forme

$$V_c = \frac{2\tau_0}{T} = \frac{1}{T \Delta F} \quad (13)$$

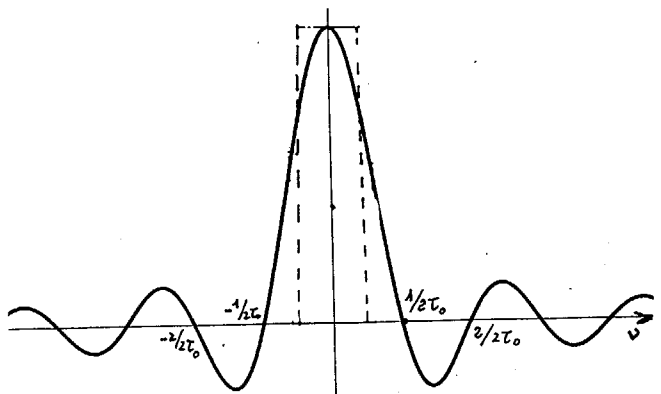


Fig.3

Il semble que ce soit l'identité formelle des relations (13) et (7) qui ait entraîné la conclusion de l'équivalence des deux méthodes, conclusion qui ne n'impose plus si l'on considère les relations (6) et (12).



3.2.3. Compromis variance-filtrage

Dans le cas de la méthode du corrélogramme, s'il est exact que plus  $N_0$  sera petit, plus faible sera la variance, la relation (10) montre que pour que l'effet de filtrage soit négligeable il suffit que la durée de la fonction de corrélation soit égale ou supérieure au rayon de corrélation du signal. Il suffit donc pour se mettre dans les conditions optimales de ne conserver de la fonction de corrélation que la partie correspondant au rayon de corrélation  $N_1 T_e$  du signal (fig. 4)

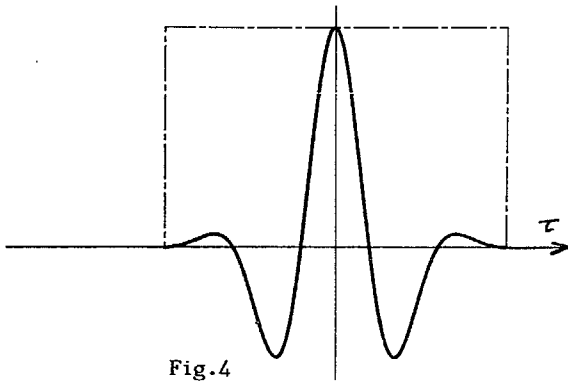


Fig.4

Du point de vue pratique, cette troncature de la fonction de corrélation peut se faire après coup, une fois la fonction de corrélation acquise.

Supposons un corrélateur à 1024 retards, si le signal comporte M mots on pourrait dire que la variance sera  $\frac{2 \times 1024}{M}$ .

Mais si la fonction de corrélation est pratiquement nulle au-delà du 50e retard, les valeurs correspondant aux retards supérieurs ne comportent que de l'erreur d'estimation ; on ne les fera pas intervenir et le spectre sera :

$$\sum_{m=0}^{50} C(mT_e) e^{-2\pi j \Delta v m T_e} \quad (14)$$

La variance ne sera plus alors que  $\frac{2 \times 50}{M}$  ; elle sera 20 fois plus faible.

De tels cas sont fréquents, et en général il suffit d'un nombre de points de corrélation compris entre 30 et 80. On pourra alors avoir le spectre avec une finesse aussi grande que l'on voudra, il suffira de choisir  $\Delta v$  assez petit.

La fonction de corrélation étant acquise, on pourra faire plusieurs essais de troncature, de manière à choisir le meilleur compromis variance-filtrage.

3.2.4. Utilisation de fenêtres de pondération

Il est clair que la fenêtre de pondération étant appliquée sur la fonction de corrélation après obtention de celle-ci, il sera possible d'essayer successivement plusieurs fenêtres de pondérations et de choisir celle qui convient le mieux au but recherché [10].

4 - ANALYSE SPECTRALE DE SIGNAUX PERIODIQUE

4.1. Méthode du périodogramme

Soit  $x(t) = A \cos(2\pi F_0 t - \phi)$

le spectre du signal périodique obtenue selon la même méthode qu'au paragraphe 3.1. est donné par

$$S(v, NT_e) = \frac{A^2}{2} \left[ \left| \frac{\sin(\pi(v-F_0)NT_e)}{\pi(v-F_0)NT_e} \right|^2 + \left| \frac{\sin(\pi(v+F_0)NT_e)}{\pi(v+F_0)NT_e} \right|^2 \right] \quad (15)$$

ou en première approximation :

$$S(v, NT_e) = \frac{A^2}{2} \left| \frac{\sin(\pi(v-F_0)NT_e)}{\pi(v-F_0)NT_e} \right|^2 \quad (16)$$

échantillonné au pas  $\frac{F_e}{N}$

On montre aisément que

$$TF [S(v, NT_e)] = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi F_0 \tau \left[ 1 - \frac{|\tau|}{NT_e} \right] = C(\tau, NT_e) \quad (17)$$

donc le support de  $C(\tau, NT_e)$  est  $(-NT_e, NT_e)$  et il faut alors échantillonner  $S(v, NT_e)$  avec un pas :

$$\Delta v \leq \frac{1}{2NT_e} = \frac{F_e}{2N}$$

La TFD, qui échantillonne au pas  $\frac{F_e}{N}$ , produit TOUJOURS un sous échantillonnage du spectre d'un signal PERIODIQUE.

Il n'est donc plus possible de retrouver, dans le spectre d'une section de signal périodique (pas plus que dans la moyenne des spectres des différentes sections) la fréquence du signal et son amplitude. Si, comme c'est le cas le plus souvent, on privilégie la connaissance de l'amplitude au détriment de celle de la fréquence, on utilise une fenêtre à "toit plat" qui conserve l'amplitude du signal, mais interdit toute localisation précise de la fréquence puisque on ne peut plus localiser le maximum du spectre (Fig. 5).

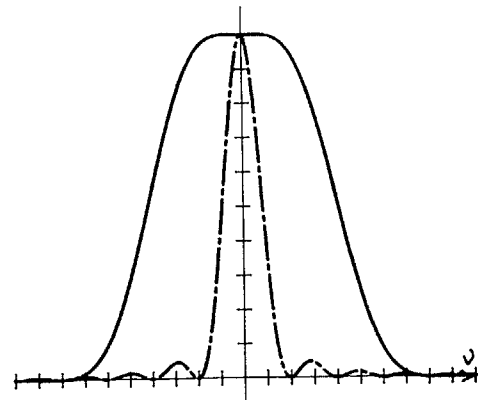


Fig.5

4.2. Méthode du corrélogramme [9,10]

La fonction d'autocorrélation du signal  $x(t)$  défini en 4.1. est :  $\frac{A^2}{2} \cos 2\pi F_0 \tau$  (17)

d'où

$$C(\tau, \tau_0) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi F_0 \tau \quad (18)$$

d'où, pour le spectre, en première approximation

$$S(v, \tau_0) = \frac{A^2}{2} \left| \frac{\sin 2\pi(v-F_0)\tau_0}{2\pi(v-F_0)\tau_0} \right|^2$$

On peut donc, en choisissant  $\Delta v$  aussi petit que l'on veut déterminer le maximum de  $S(\Delta v, \tau_0)$  donc déterminer  $F_0$  et  $A$ .



COMPARAISON DES DEUX PRINCIPALES METHODES D'ANALYSE SPECTRALE : LA METHODE DU PERIODOGRAMME MOYENNE (ANALYSEURS A FFT) ET LA METHODE DU CORRELOGRAMME (ANALYSEURS PAR TRANSFORMATION DE FOURIER NUMERIQUE DE LA FONCTION DE CORRELATION)

Si les lobes du  $\frac{\sin 2\pi\nu\tau_0}{2\pi\nu\tau_0}$  sont gênants, il suffira d'appliquer à  $C(\tau)$  une fenêtre de pondération. par exemple à fenêtre de BARTLETT [10] qui conduit à un spectre :

$$\frac{A^2}{2} \left| \frac{\sin \pi(\nu-F_0)\tau_0}{\pi(\nu-F_0)\tau_0} \right|^2, \text{ à rapprocher de (16)}$$

ou bien la fenêtre de PARZEN qui conduit à un spectre

$$\frac{A}{2} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\nu-F_0)\tau_0}{\frac{\pi}{2}(\nu-F_0)\tau_0} \right|^4$$

Dans les deux cas, il est possible de déterminer  $F_0$  et  $A$  ce que ne permet pas la fenêtre "à toit plat".

### CONCLUSION

La méthode du corrélogramme présente les avantages suivants :

- 1) Codage des signaux à très peu de digits, ce qui entraîne une réalisation aisée et la possibilité de traiter des signaux jusqu'à 100 MHz [11,12,13], alors que par FFT on ne dépasse guère 100 KHz en temps réel.
- 2) Indépendance de l'échantillonnage temporel et de l'échantillonnage fréquentiel, ce qui donne la possibilité d'échantillonner le spectre avec un pas en fréquence aussi fin que l'on souhaite, puisqu'il n'est plus nécessaire de faire la TF en un temps aussi court que possible.
- 3) Possibilité d'utiliser successivement plusieurs fenêtres de pondération selon le résultat souhaité, alors que, dans la méthode du périodogramme la fenêtre est appliquée au signal temporel elle doit donc être choisie a priori, et ce choix est définitif.
- 4) Enfin, dans le cas des signaux périodiques possibilité d'appliquer à la fonction de corrélation une méthode paramétrique (maximum d'entropie, modèle autorégressif, méthode de Pizarenko...).

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] FAUQUE JM, BERTHIER D, MAX J, BONNET G.  
Analyse spectrale par corrélation  
Rapport CEA R3672 - 1969
- [2] BONNET G  
Les corrélateurs utilisant la quantification des signaux  
Cours d'été OTAN - Marine Nationale Sept. 1962
- [3] MAX J  
Les corrélateurs automatiques en temps réel : une nouvelle génération d'appareils de mesure  
1er congrès GRETSI - NICE 1967
- [4] FEST D  
Caractérisation des oscillateurs de très haute précision par une méthode de corrélation  
Thèse de Docteur ingénieur 16.03.82 - BESANCON
- [5] MASSON J  
Mesure de débits par corrélation dans l'industrie nucléaire  
Thèse de docteur ingénieur 23.09.82 - GRENOBLE
- [6] MAX J  
Méthodes et techniques de traitement du signal  
3e édition Tome 1 Chapitre XIII - MASSON
- [7] MAX J  
Filtrage par pondération de la Transformée de Fourier Discrète (FFT) du signal  
Note Technique LETI-MCTE 1469 31 juillet 1984
- [8] DIOT M  
Rapport de stage de fin d'étude 1983  
M.S.T. Télécommunications Université de TOULON
- [9] MAX J  
Méthodes et techniques de traitement du signal  
4e édition Vol. 1 Chapitre XIII Ed. MASSON
- [10] Idem chapitre XIV
- [11] ALEXANDRE B, TRYSTRAM Ph, MAX J  
Corali, Corrélateur Rapide Linéaire et Impulsionnel  
Séminaire GUTS-URSI-SEE, GRENOBLE 8-9 avril 1984
- [12] CHABERT B, DUTANG P, SANCHEZ G  
Comulab 16, corrélateur multibit à large bande (16 MHz)  
Note LETI/MCTE 1048 - 8.10.84
- [13] CHABERT B, MAX J, VIDAL-MADJAR D  
Application à l'étude de l'ionosphère de l'optimisation du codage dans le calcul des fonctions de corrélation.  
Colloque national sur le traitement du signal et ses applications. NICE 16-21 juin 1975.

