

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

483



NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

## IDENTIFICATION ADAPTATIVE DE REPONSES IMPULSIONNELLES FINIES PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE

Amarane HOUACINE et Guy DEMOMENT

Laboratoire des Signaux et Systèmes. Plateau du Moulon. 91190 - Gif-sur-Yvette- FRANCE.

et

Gréco 69 SARTA "Systèmes Adaptatifs".

---

### RESUME

On présente dans cette communication un algorithme rapide pour le calcul des  $m$  coefficients d'un filtre transverse adaptatif. La méthode proposée se distingue des solutions habituelles (moindres carrés récursifs rapides, LMS) par l'incorporation d'une information à priori permettant de stabiliser la solution de ce problème, tout en gardant un volume de calcul raisonnable ( $O(11m)$  à  $O(17m)$  par récursion). Une bonne stabilité numérique est obtenue par réinitialisation périodique, sans augmenter la complexité.

### SUMMARY

A new fast algorithm for fixed - order transversal filter adaptive estimation is developed in this paper. The ill - posedness of the conventional least - squares solution is faced by explicitly introducing an a priori information about the solution, which is computed with a fast exponentially weighted Kalman filter of complexity  $O(11m)$  to  $O(17m)$ . Good numerical properties are achieved by periodically reinitializing the algorithm without increasing this complexity.



IDENTIFICATION ADAPTATIVE DE REponses IMPULSIONNELLES FINIES  
PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE

Auteurs : Amrane HOUACINE et Guy DEMOMENT

### I-INTRODUCTION

De nombreux algorithmes rapides pour le calcul des coefficients de filtres transversaux, ou l'identification de systèmes à réponse impulsionnelle finie, ont été développés ces dernières années. Ce sont essentiellement des méthodes récursives de calcul d'une solution des moindres carrés, improprement appelées "algorithmes de Kalman Rapide" (FKE).

Ces algorithmes ont un volume de calcul réduit ( $O(5m)$  à  $O(13m)$  par récursion,  $m$  nombre de coefficients à estimer). Mais leur validité est réduite aux situations où une solution des moindres carrés est acceptable, c'est à dire quand la matrice normale associée est bien conditionnée. Cette condition est souvent remplie en égalisation, mais elle l'est moins en traitement de la parole et plus généralement lorsque le signal d'entrée a un contenu spectral pauvre et lorsque la sortie est fortement entachée de bruit.

Dans ce cas, plutôt que d'effectuer une "stabilisation" spectrale empirique en injectant un bruit blanc supplémentaire à l'entrée [1], il vaut mieux "régulariser" le problème en incorporant une information a priori explicite sur la solution. Ceci peut se faire sous la forme d'une loi de probabilité a priori: c'est l'approche bayésienne de Barraud [2] et de Godard [3] qui conduit à une estimation par filtrage de Kalman classique. Mais le volume prohibitif des calculs, lié à l'utilisation d'une équation de Riccati, en est le principal inconvénient.

Nous avons donc développé un nouvel algorithme rapide exploitant les propriétés de décalage qui existent entre les vecteurs d'entrée consécutifs. L'équation de convolution discrète est complétée par une équation d'état qui traduit la dynamique de la récursion. Le modèle d'état résultant étant constant, il est aisé de mettre à jour le vecteur-gain par des équations de Chandrasekhar au lieu de Riccati.

L'algorithme proposé présente les avantages  
-d'un volume de calcul réduit ( $O(11m)$  à  $O(17m)$  selon l'a priori),  
-d'une absence de problèmes de double récursion en temps et en ordre à l'initialisation,  
-et d'une possibilité d'adaptativité par pondération exponentielle des observations.

L'étude du cas nonstationnaire montre qu'une pondération exponentielle des données ne suffit pas à assurer à la fois l'adaptativité de la méthode et la stabilité numérique. Il est préférable d'introduire dans les équations d'état un modèle explicite de la non stationnarité. Mais ceci a pour conséquence d'augmenter sensiblement le volume des calculs. La méthode proposée offre un compromis acceptable entre vitesse de convergence initiale, adaptativité, stabilité et volume des calculs. Les exemples de Rabiner et Marple sont utilisés pour effectuer en simulation une comparaison entre notre méthode et celles des moindres carrés (algorithme de Marple [11], FTF [10]), et du gradient stochastique (LMS).

### II-CAS STATIONNAIRE

On veut calculer les composantes d'un vecteur  $\underline{h}^*$  représentant la réponse impulsionnelle finie du système inconnu.

$$\underline{h}^* = [h_{m-1}^*, h_{m-2}^*, \dots, h_0^*]^t \quad (1)$$

La sortie du système est supposée donnée par

$$y(i) = \sum_{k=0}^{m-1} h^*(k)x(i-k-1) + b(i) \quad i=1,2,\dots \quad (2)$$

où  $x(i)$  est le signal d'entrée et  $b(i)$  un bruit additif non corrélé (avec  $x$ ). L'ordre  $m$  du modèle est fixé a priori et choisi suffisamment grand pour assurer la validité de (2). Dans toute cette partie,  $\underline{h}^*$  est supposé invariant. L'erreur à l'instant  $i$  est

$$e(i) = y(i) - [x(i) \dots x(i-m+1)]\underline{h}(i) \quad (3)$$

Les solutions habituelles consistent à minimiser un critère quadratique de la forme

$$J(i) = \sum_{k=1}^i e^2(k) \quad (4)$$

Ce qui conduit à résoudre un système d'équations normales [1,6,10,11,12] qui peut être très mal conditionné lorsque par exemple, l'entrée est à contenu spectral limité [4]. Pour stabiliser le problème, on le régularise en introduisant une information explicite sur la solution [2,4], sous forme bayésienne.

$$\begin{aligned} E\{\underline{h}\} &= \underline{h}_0 & E\{(\underline{h}-\underline{h}_0)(\underline{h}-\underline{h}_0)^t\} &= \Pi_0 \\ E\{\underline{b}\} &= \underline{0} & E\{b_i b_j\} &= r_b \delta_{ij} & E\{\underline{b} \underline{h}^t\} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

On est donc conduit à minimiser un critère modifié de la forme

$$J(i) = (\underline{h}-\underline{h}_0)^t \Pi_0^{-1} (\underline{h}-\underline{h}_0) + \sum_{k=1}^i r_k^{-1} e^2(k) \quad (6)$$

La solution est alors obtenue par filtrage de Kalman [2,3]. Mais le défaut des équations de Riccati est qu'elles n'exploitent pas les propriétés d'invariance par translation d'une convolution. Pour y remédier, on définit le vecteur étendu à  $n$  composantes ( $n$  fini ou infini):

$$\underline{H}_i = [0_i^t \ h_{m-1} \dots h_0 \ 0_{n-m-i}^t] \quad (7)$$

et on considère le vecteur d'entrée global

$$\underline{X} = [x_{-m+1} x_{-m} \dots x_0 \dots x_{n-m}]^t \quad (8)$$

Le problème peut alors être décrit par les équations d'état:

$$\underline{H}_{i+1} = D^t \underline{H}_i \quad (9)$$

$$y(i) = \underline{X}_{i+1}^t \underline{H}_i + b_i \quad (10)$$

$D$  étant l'opérateur de décalage.



**IDENTIFICATION ADAPTATIVE DE REPONSES IMPULSIONNELLES FINIES  
PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE**

Auteurs : Amrane HOUACINE et Guy DEMOMENT

L'estimation récurrente de la solution peut être obtenue par un filtre de Kalman :

$$\underline{h}_{i+1} = D^t \underline{h}_i + \underline{K}_i (r_i)^{-1} (y(i) - \underline{x}_i^t \underline{h}_i) \quad (11)$$

$$r_i = \underline{x}_i^t P_i \underline{x}_i + r_b \quad (12)$$

$$\underline{K}_i = D^t P_i \underline{x}_i \quad (13)$$

$$P_{i+1} = D^t P_i D - \underline{K}_i (r_i)^{-1} \underline{K}_i^t \quad (14)$$

Avec les conditions initiales :

$$\underline{h}_0 = [h_0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (15)$$

$$r_0 = \underline{x}_0^t P_0 \underline{x}_0 + r_b$$

$$\underline{K}_0 = D^t P_0 \underline{x}_0$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il peut paraître surprenant que, pour réduire le volume des calculs, on commence par augmenter de façon importante les dimensions de l'état. En fait, à chaque récursion, le nombre de coordonnées non nulles du vecteur-gain restera égal à  $m$ . De plus, ce nouveau modèle d'état étant invariant ( $D$  et  $\underline{x}$  constants) et à bruit stationnaire, on peut remplacer les équations de Riccati [12,14] par des équations de Chandrasekhar, ce qui, au bout du compte, permet d'obtenir un algorithme de complexité  $O(m)$  par récursion. Un autre avantage des équations type Chandrasekhar est qu'elles permettent d'aboutir naturellement à des algorithmes en racine carrée. Une meilleure stabilité est ainsi obtenue.

Les équations d'estimation s'écrivent (voir annexe) sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{v}_{i-1} &= Y_{i-1}^t \underline{x} \\ \underline{w}_{i-1} &= M_{i-1} \underline{v}_{i-1} \\ M_i &= M_{i-1} + \underline{w}_{i-1} (r_{i-1})^{-1} \underline{w}_{i-1}^t \\ \underline{k}_i &= \underline{k}_{i-1} + D^t Y_{i-1}^t \underline{w}_{i-1} \\ r_i &= r_{i-1} + \underline{v}_{i-1}^t \underline{w}_{i-1} \\ Y_i &= D^t Y_{i-1} - \underline{k}_i (r_i)^{-1} \underline{v}_{i-1}^t \end{aligned} \quad (16)$$

Avec des conditions initiales supplémentaires sur  $Y_i$  et  $M_i$  dépendantes de la factorisation de  $dP_1$  (voir annexe) soit :

$$dP_1 = Y_0 M_0 Y_0^t \quad (17)$$

$M_0$  étant une matrice carrée ( $c,c$ ) et  $Y_0$  une matrice ( $n,c$ ) et  $c$  rang de la matrice  $dP_1$ .

Une écriture condensée de l'algorithme est possible en ne faisant apparaître que les parties intervenant effectivement à chaque récursion dans le calcul. On définit :

$$\underline{h}_i = (h_{m-1,i} \ h_{m,i} \ \dots \ h_{0,i})^t \quad (18)$$

$$\underline{k}_i = (k_{0,i} \ k_{1,i} \ \dots \ k_{m-1,i})^t \quad (19)$$

$$\underline{x}_i = (x_{i-m+1} \ \dots \ x_i)^t \quad (20)$$

$$\text{On a : } \underline{H}_i = (\underline{O}_i^t \ \underline{h}_i^t \ \underline{O}_i^t)^t \quad (21)$$

$$\underline{K}_i = (\underline{O}_{i+1} \ \underline{k}_i \ \underline{O}_{n-m-i-1})^t \quad (22)$$

$$\underline{x} = (x_{-m+1} \ \dots \ x_{i-m+1} \ x_i \ x_{i+1} \ \dots \ x_{n-m})^t \quad (23)$$

Soit  $S_i$  la matrice  $(m+1,c)$  telle que :

$$Y_i = [0_{c,i} \ S_i^t \ 0_{c,n-m-i-1}]^t \quad (24)$$

L'algorithme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \underline{v}_{i-1} &= S_{i-1}^t \begin{bmatrix} x_{i-m} \\ \underline{x}_i \end{bmatrix} \\ \underline{w}_{i-1} &= M_{i-1} \underline{v}_{i-1} \\ M_i &= M_{i-1} + \underline{w}_{i-1} (r_{i-1})^{-1} \underline{w}_{i-1}^t \\ r_i &= r_{i-1} + \underline{v}_{i-1}^t \underline{w}_{i-1} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{k}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{k}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + S_{i-1} \underline{w}_{i-1} \\ S_i &= S_{i-1} - \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{k}_i \end{bmatrix} (r_i)^{-1} \underline{v}_{i-1}^t \end{aligned} \quad (25)$$

Et l'estimation du vecteur réponse impulsionnelle est faite suivant l'équation :

$$\underline{h}_{i+1} = \underline{h}_i + \underline{k}_i (r_i)^{-1} (y(i) - \underline{x}_i^t \underline{h}_i) \quad (26)$$

Le volume des calculs dépend de la factorisation de l'incrément  $dP_1$ . Le calcul du vecteur-gain nécessite :  
 $3cm + 2c^2 + 4$  multiplications/récursion  
 $3cm + 2c^2$  additions/récursion.

Exemples en simulation: On identifie une réponse impulsionnelle de  $m = 7$  points [1,12], dans le cas d'une entrée bruit blanc, d'une entrée filtrée par un filtre à 25 points [1,12] et d'une entrée non stationnaire (chirp)  $x(i) = \sin(z \pi i^2 / m)$  avec  $z=0,04$ . La qualité de l'estimation est mesurée à chaque récursion par le critère  $Q_i$  :

$$Q_i = 10 \cdot \text{Log}_{10} \left[ \frac{(\underline{h} - \underline{h}_i)^t (\underline{h} - \underline{h}_i)}{\underline{h}^t \underline{h}} \right] \quad (27)$$

nous observons dans les trois cas une convergence très rapide. On vérifie bien de plus que l'introduction d'une information a priori assure la stabilité de la solution et procure de ce fait, un avantage évident par rapport aux solutions des moindres carrés.

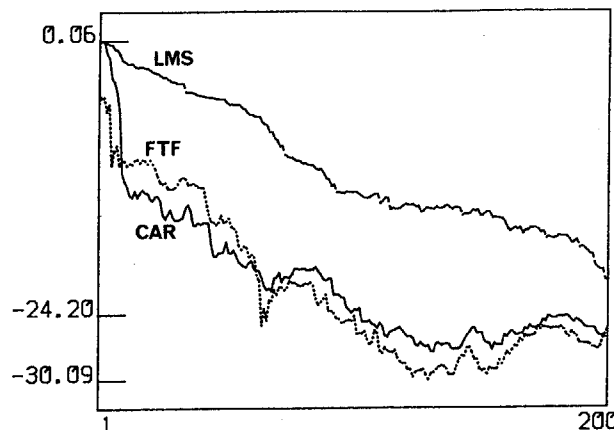


fig. 1 - Cas d'une entrée bruit blanc, sortie bruitée avec un rapport signal/bruit de 10 dB.  
 (erreur obtenue avec l'algorithme [11]: -22,4 dB).



**IDENTIFICATION ADAPTATIVE DE REponses IMPULSIONNELLES FINIES  
PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE**

Auteurs : Amrane HOUACINE et Guy DEMOMENT

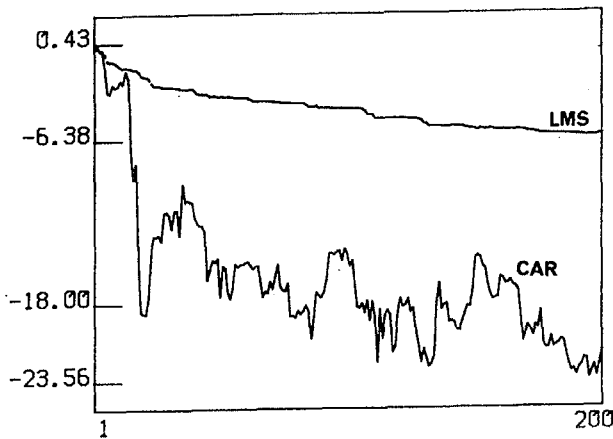


fig. 2 - Cas d'une entrée filtrée, sortie bruitée avec un rapport signal/bruit de 20 dB. L'algorithme de Marple [11] et le FTF [10] divergent nettement dans ce cas.

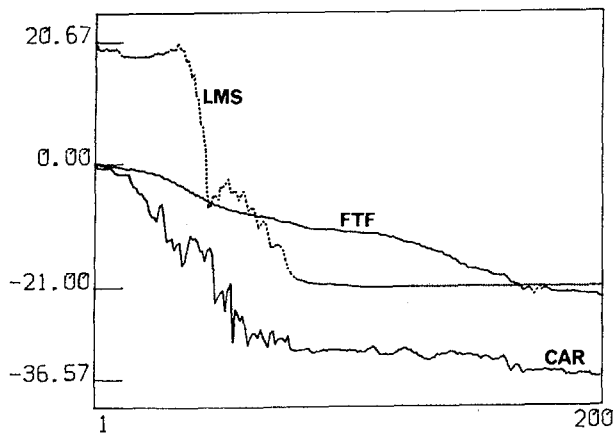


fig. 3 - Cas d'une entrée non stationnaire, sortie bruitée avec un rapport signal/bruit de 20 dB.

### III-CAS NON STATIONNAIRE

On cherche cette fois à identifier une réponse impulsionnelle qui varie au cours du temps avec des variations lentes par rapport au pas d'échantillonnage. La méthode précédente n'est plus du tout adaptée au problème puisque le vecteur-gain  $\gamma$  converge rapidement vers le vecteur nul. Une idée très répandue consiste à tenter de concilier convergence initiale rapide et adaptativité en effectuant une pondération exponentielle des données.

Pondération exponentielle des données: Cette technique consiste à réduire l'effet des observations les plus anciennes dans le critère d'optimalité [5,6,7]. Du fait de la simplicité de sa mise en oeuvre, elle présente un intérêt certain vis-à-vis des techniques de fenêtres glissantes [13].

Le critère d'optimalité correspondant s'écrit

$$J(i) = (\underline{h} - \underline{h}_0)^t \Pi_0^{-1} (\underline{h} - \underline{h}_0) + \sum_{k=1}^i s^{i-k} r_k^{-1} e^2(k) \quad (28)$$

Ou en multipliant par  $s^{-i}$ :

$$J'(i) = (\underline{h} - \underline{h}_0)^t s^{-i} \Pi_0^{-1} (\underline{h} - \underline{h}_0) + \sum_{k=1}^i s^{-k} r_k^{-1} e^2(k) \quad (29)$$

Le problème revient donc à minimiser à chaque instant  $i$  un critère:

$$J''(i) = (\underline{h} - \underline{h}_0)^t \Pi_{0,i}^{-1} (\underline{h} - \underline{h}_0) + \sum_{k=1}^i s^{-k} r_k^{-1} e^2(k) \quad (30)$$

Avec à chaque instant  $i$  la condition initiale

$$\Pi_{0,i} = s^{-i} \Pi_0 \quad (31)$$

Ce problème peut à son tour être résolu par un filtre de Kalman, mais avec la difficulté d'un changement de conditions initiales à chaque récursion. Cette difficulté peut être levée par utilisation de méthodes du type Chandrasekhar-dual [15]. La démarche serait la suivante:

1 - Calculer, par une méthode du type Chandrasekhar pondéré (voir annexe), la solution qui minimise le critère:

$$J''(i) = (\underline{h} - \underline{h}_0)^t \Pi_0^{-1} (\underline{h} - \underline{h}_0) + \sum_{k=1}^i s^{-k} r_k^{-1} e^2(k) \quad (32)$$

2 - Calculer la correction nécessaire, par une méthode du type Chandrasekhar-dual pour tenir compte de l'évolution parallèle de la variance du bruit d'observation et de la covariance a priori

$\Pi_{0,i} = s^{-i} \Pi_0$ . Malheureusement, cette dernière étape nécessite des calculs de complexité  $O(m.i)$  par récursion ce qui en interdit l'emploi dans un algorithme dont la complexité est limitée à  $O(m)$  volontairement.

La principale différence entre notre approche bayésienne et les méthodes existantes, est qu'elles minimisent des critères de la forme  $J''(i)$  avec  $\Pi_{0,i} = \Pi_0$  ou  $\Pi_0^{-1} = 0$ . Lorsque  $s \neq 1$ , l'équilibre entre information a priori et information apportée par les observations est rompu, et la pondération exponentielle a alors pour effet d'aggraver le mauvais conditionnement des équations normales [14].

Solution de compromis: L'approche Bayésienne avec pondération exponentielle des données ne permettant pas de satisfaire l'exigence de complexité  $O(m)$ , un compromis entre vitesse de convergence initiale, complexité, adaptativité et stabilité consiste à remplacer l'étape de correction du type Chandrasekhar-dual par une réinitialisation périodique de l'algorithme du type Chandrasekhar pondéré, avec une période choisie a priori en fonction du degré de non-stationnarité du système.

Formulation de l'algorithme adaptatif: Les

IDENTIFICATION ADAPTATIVE DE REPONSES IMPULSIONNELLES FINIES  
PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE

Auteurs : Amrane HOUACINE et Guy DEMOMENT

équations correspondantes à l'algorithme type Chandrasekhar pondéré (voir annexe) peuvent être écrites sous la forme réduite:

$$\begin{aligned}
 \underline{v}_{i-1} &= S_{i-1}^t \begin{bmatrix} x_{i-m} \\ x_i \end{bmatrix} \\
 \underline{w}_{i-1} &= M_{i-1} \underline{v}_{i-1} \\
 M_i &= s(M_{i-1} + \underline{w}_{i-1}(r_{i-1})^{-1} \underline{w}_{i-1}^t) \\
 r_i &= r_{i-1} + \underline{v}_{i-1}^t \underline{w}_{i-1} \\
 \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{k}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{k}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + S_{i-1} \underline{w}_{i-1} \\
 S_i &= S_{i-1} - \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{k}_i \end{bmatrix} (r_i)^{-1} \underline{v}_{i-1}^t
 \end{aligned} \tag{33}$$

Etape de réinitialisation à l'instant k:

$$\begin{aligned}
 \underline{k}_k &= \prod_0 \underline{x}_k \\
 r_k &= \underline{x}_k^t \underline{k}_k \\
 S_k &= \begin{bmatrix} 0 & \underline{a} & \underline{a}' \\ \underline{k}_k & & \end{bmatrix} \\
 M_k &= \begin{bmatrix} -s/r_k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{34}$$

$\underline{a}$  et  $\underline{a}'$  sont les vecteurs définis lors de la factorisation initiale (voir annexe).

La pondération exponentielle augmente les calculs de  $c^2$  multipl./récursion seulement. La réinitialisation nécessite  $2m$  multiplications supplémentaires.

Exemples en simulation: On reprend le même exemple que dans le cas stationnaire, mais avec une réponse impulsionnelle variant dans le temps, suivant le modèle  $\underline{h}_{i+1} = a \underline{h}_i + b \underline{u}_i$  où  $\underline{u}_i$  est un bruit blanc.

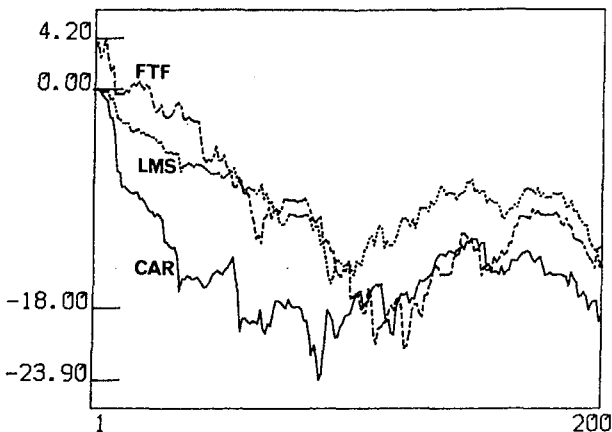


fig. 4 - Cas d'une entrée bruit blanc, sortie bruitée avec un rapport signal/bruit de 20 dB,  $\underline{h}_{i+1} = \underline{h}_i + b \underline{u}_i$ ,  $b = 0,001$ .

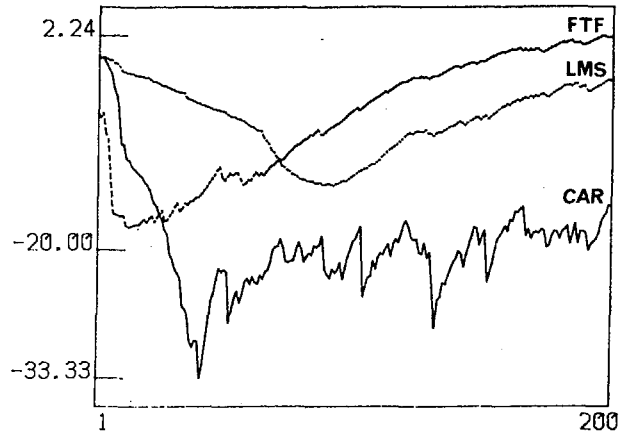


fig. 5 - Cas d'une entrée bruit blanc, sortie bruitée avec un rapport signal/bruit moyen de 20 dB,  $\underline{h}_{i+1} = a \underline{h}_i$ ,  $a = 0,99$ .

IV-CONCLUSIONS

L'étude précédente montre qu'il est possible de développer des algorithmes récursifs de complexité  $O(m)$  pour l'estimation des coefficients de filtres transverses, par une approche différente de [10] ou [16], le principal avantage est que l'information a priori nécessaire à une bonne stabilité, est naturellement incluse dans la formulation du problème. L'étude du cas non stationnaire montre qu'une pondération exponentielle des données ne suffit pas, lorsqu'on maintient l'exigence de complexité, à assurer à la fois l'adaptativité et la stabilité. Un compromis consiste comme dans [8], à effectuer des réinitialisations périodiques.

V-ANNEXE

Les équations de filtrage de Kalman pondéré appliquées à notre modèle peuvent s'écrire, [14], sous la forme:

$$\begin{aligned}
 \underline{H}_{i+1} &= D^t \underline{H}_i + \underline{K}_i (r_i)^{-1} (y(i) - \underline{X}^t \underline{H}_i) & (a1) \\
 r_i &= \underline{X}^t \underline{P}_i \underline{X} + r_b & (a2) \\
 \underline{K}_i &= D^t \underline{P}_i \underline{X} & (a3) \\
 \underline{P}_{i+1} &= s(D^t \underline{P}_i D - \underline{K}_i (r_i)^{-1} \underline{K}_i^t) & (a4)
 \end{aligned}$$

On définit les incréments:

$$\begin{aligned}
 d\underline{P}_i &= \underline{P}_i - \underline{P}_{i-1} & (a5) \\
 d\underline{K}_i &= \underline{K}_i - \underline{K}_{i-1} & (a6) \\
 dr_i &= r_i - r_{i-1} & (a7) \\
 d\underline{P}_{i+1} &= s D^t d\underline{P}_i D - s \underline{K}_i (r_i)^{-1} \underline{K}_i^t + s \underline{K}_{i-1} (r_{i-1})^{-1} \underline{K}_{i-1}^t & (a8) \\
 dr_i &= \underline{X}^t d\underline{P}_i \underline{X} & (a9) \\
 d\underline{K}_i &= D^t d\underline{P}_i \underline{X} & (a10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{On définit: } \underline{K}_{gi} &= \underline{K}_i (r_i)^{-1} & (a11) \\
 \underline{K}_{gi-1} &= (\underline{K}_i - d\underline{K}_i) (r_{i-1})^{-1} \\
 d\underline{K}_{gi} &= \underline{K}_{gi} - \underline{K}_{gi-1} = (D^t - \underline{K}_{gi} \underline{X}^t) d\underline{P}_i \underline{X} (r_{i-1})^{-1} & (a12)
 \end{aligned}$$

Soit, en remplaçant (a11) et (a12) dans (a8):

$$d\underline{P}_{i+1} = [D^t - \underline{K}_{gi} \underline{X}^t] s [d\underline{P}_i + d\underline{P}_i \underline{X} (r_{i-1})^{-1} \underline{X}^t d\underline{P}_i] \tag{a13}$$



**IDENTIFICATION ADAPTATIVE DE REPONSES IMPULSIONNELLES FINIES  
PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE**

Auteurs : Amrane HOUACINE et Guy DEMOMENT

En écrivant que  $dP_i = Y_{i-1} M_{i-1} Y_{i-1}^t$  et en remplaçant dans (a13), nous obtenons  $Y_i$  et  $M_i$  telles que:

$$dP_{i+1} = Y_i M_i Y_i^t$$

D'où les équations type Chandrasekhar "pondéré":

$$K_i = K_{i-1} + D^t Y_{i-1} M_{i-1} Y_{i-1}^t X \quad (a14)$$

$$M_i = s(M_{i-1} + M_{i-1} Y_{i-1}^t X (r_{i-1})^{-1} X^t Y_{i-1} M_{i-1}^t) \quad (a15)$$

$$r_i = r_{i-1} + X^t Y_{i-1} M_{i-1} Y_{i-1}^t X \quad (a16)$$

$$Y_i = D^t Y_{i-1} - K_i (r_i)^{-1} X^t Y_{i-1} \quad (a17)$$

Initialisation de l'algorithme: L'étape d'initialisation est essentielle dans le développement d'un algorithme du type Chandrasekhar puisqu'elle conditionne le volume des calculs par le type d'information a priori introduite. La factorisation de l'incrément  $dP_1$  n'est pas toujours simple. On considère le cas important où:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} q_0 s^{-m+1} & q_1 s^{-m+2} & \dots & 0 \\ q_1 s^{-m+2} & q_0 s^{-m+2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ q_{m-1} & \dots & \dots & q_0 \end{bmatrix} \quad (a18)$$

On définit la matrice P:

$$P_0 = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0^t & 0 \end{bmatrix} \quad (a19)$$

et le vecteur  $K_0 = (0 \quad K_0^t s / r_0)$  (a20)

Soit  $dP_1 = (sD^t P_0 D - P_0) - K_0 K_0^t$  (a21)

On définit les vecteurs:

$$\underline{a} = (q_0^{1/2} s^{(-m+1)/2} \quad 0 \quad \dots \quad 0)^t \quad (a22)$$

$$\underline{b} = (0 \quad q_1 s^{-m+2} \quad \dots \quad q_{m-1})^t q_0^{1/2} s^{(m-1)/2} \quad (a23)$$

$$\underline{a}' = (0 \quad \dots \quad 0 (s q_0)^{1/2})^t \quad (a24)$$

$$\underline{b}' = (0 \quad q_{m-1} \quad \dots \quad q_1)^t q_0^{-1/2} s^{1/2} \quad (a25)$$

$dP_1$  peut s'écrire sous la forme:

$$dP_1 = -K_0 K_0^t - \underline{a} \underline{a}'^t - \underline{b} \underline{b}'^t - \underline{b} \underline{a}'^t + \underline{a}' \underline{a}^t + \underline{b}' \underline{b}^t + \underline{b}' \underline{a}'^t \quad (a26)$$

On aboutit ainsi à une factorisation avec l'ordre

$$c = 5, \text{ soit: } dP_1 = S_0 M_0 S_0^t \quad (a27)$$

Avec:  $S_0 = (K_0 \quad \underline{a} \quad \underline{b} \quad \underline{a}' \quad \underline{b}')$  (a28)

$$M_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans le cas stationnaire, ( $s=1$ ),  $\Pi_0$  est une matrice Toeplitz et on a  $\underline{a}' = J \underline{a}$ ,  $\underline{b}' = J \underline{b}$  avec J opérateur d'inversion de l'ordre.

Lorsque les composantes du vecteur réponse impulsionnelle sont supposées a priori non corrélées, soit  $q_i = 0$ ,  $i=1, \dots, m-1$ , La matrice  $\Pi_0$  est diagonale ( $q_0 I$  dans le cas stationnaire). On arrive alors à une factorisation avec l'ordre  $c = 3$ , soit:

$$S_0 = (K_0 \quad \underline{a} \quad \underline{a}')$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a29)$$

**REFERENCES**

- [1] S.Marple, L.R.Rabiner, "Performance of a fast algorithm for FIR system identification using least squares analysis", Bell Tech.J., vol.62, pp.717-742, 1983.
- [2] A.Barraud, "Contribution à l'identification des séquences de pondération des systèmes dynamiques", Thèse Doct. Ing., ENSM, Nantes 1971.
- [3] D.Godard, "Channel equalisation using a Kalman filter for fast data transmission", IBM J. Res. Develop., pp.267-273, May 1974.
- [4] G.Demoment, "Déconvolution", Cours E.S.E. n°2964, 1984.
- [5] G.A.Mack, Vijay K.Jain, "Speech parameter estimation by time-weighted-error Kalman filtering", IEEE Trans., vol. ASSP-31, pp1300-1303, 1983.
- [6] D.D.Falconer, L.Ljung, "Application of fast estimation to adaptive equalisation", IEEE Trans., vol.COM-26, pp.1439-1446, 1978
- [7] W.J.Done, "Use of the fast Kalman estimation algorithm for adaptive system identification", Proc. IEEE ICASSP(1981), pp.886-889.
- [8] D.W.Lin, "On digital implementation of fast Kalman algorithms", IEEE Trans., vol.ASSP-32, pp.998-1005, 1984.
- [9] M.Morf, G.S.Sidhu, T.Kailath, "Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systems", IEEE Trans., vol.AC-19, pp.315-323, 1974.
- [10] J.M.Cioffi, T.Kailath, "Fast, recursive-least-squares transversal filters for adaptive filtering", IEEE Trans., vol ASSP-32, pp.304-337, 1981.
- [11] S.L.Marple, "Efficient least squares FIR system identification", IEEE Trans., vol. ASSP-29, pp.62-73, 1981.
- [12] L.R.Rabiner, R.E.Crochiere, J.B.Allen, "FIR system modeling and identification in the presence of noise and with band-limited input", IEEE Trans., vol. ASSP-26, pp.319-333, 1978.
- [13] A.Houacine, G.Demoment, "Fast, recursive, fixed-length data window, least squares estimation algorithm, -Application to adaptive identification of FIR systems", Rapport interne L2S, (à paraître).
- [14] A.Houacine, Du-Xue-cheng, G.Demoment, "Comments on exponential data weighting for adaptive filtering", Rapport interne L2S, (à paraître).
- [15] Du-Xue-cheng, D.Saint-Felix, G.Demoment, "Dual Chandrasekhar equations: the discrete case", Rapport interne L2S, (à paraître).
- [16] N.Kalouptsidis, G.Carayannis, D.Manolakis, "A fast covariance type algorithm for sequential least squares filtering and prediction", IEEE Trans., vol.AC-29, pp.752-755, 1984.