

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

641



NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

## COMPLEXITE DE FILTRES NUMERIQUES ADAPTATIFS

Maurice BELLANGER

Cengiz EVCI

LSS - ESE, Plateau du Moulon  
91190 GIF sur Yvette

TRT, 5 Av. Réaumur  
92350 Plessis Robinson

---

### RESUME

### SUMMARY

Les filtres adaptatifs sont généralement définis à partir de deux spécifications qui sont le gain du système et la constante de temps. Les estimations de complexité obtenues à partir de ces spécifications sont rappelées et précisées pour un filtre RIF en structure directe avec l'algorithme du gradient. Le cas de signaux non stationnaires est également considéré. L'extension à la structure en treillis permet une comparaison avec la structure RIF directe.

The design of digital adaptive filters is generally based on two specifications, namely system gain and time constant. The complexity estimations obtained from these specifications for a gradient FIR filter indirect form are recalled and completed. Non stationary signals are also considered. The extension of these results to a gradient lattice structure provides elements for the comparison of lattice and FIR structures.



## I. INTRODUCTION

La réalisation de systèmes adaptatifs peut faire appel à différentes techniques aussi bien pour l'organisation des calculs que pour le choix du critère d'adaptation lui-même. Le critère le plus couramment utilisé est celui dit des moindres carrés moyens qui correspond à un algorithme simple pour la mise à jour des coefficients, l'algorithme du gradient. Cependant, avec les progrès en technologie d'une part et en réduction de redondance dans les opérations d'autre part, il devient possible de mettre en oeuvre économiquement des filtres adaptatifs basés sur le critère des moindres carrés.

Parmi ces techniques l'utilisateur fait son choix en considérant les performances et la complexité. L'objet du présent article est d'abord de rappeler et préciser les estimations de complexité obtenues à partir des spécifications pour un filtre RIF en structure directe [1], en présence de signaux stationnaires et non-stationnaires, et ensuite de montrer qu'elles peuvent s'étendre à la structure en treillis.

## II. SPECIFICATIONS DES FILTRES ADAPTATIFS

Le schéma de principe d'un filtre adaptatif utilisant l'algorithme du gradient est donné par la figure 1. La suite d'entrée est désignée par  $x(n)$ , la sortie du filtre par  $\tilde{y}(n)$  et le signal de référence par  $y(n)$ . La différence  $e(n) = y(n) - \tilde{y}(n)$  est le signal d'erreur. Les coefficients sont mis à jour, à chaque valeur de l'indice  $n$  en utilisant les produits  $e(n).g_i(n)$ , où  $g_i(n)$  est la dérivée du signal d'erreur par rapport au coefficient d'indice  $i$ , c'est-à-dire par la relation :

$$a_i(n+1) = a_i(n) + \delta e(n).g_i(n) ; 0 \leq i \leq N-1 \quad (1)$$

où  $N$  est le nombre de coefficients du filtre et  $\delta$  une constante positive appelée pas d'adaptation.

Les filtres adaptatifs utilisent les mêmes composants que les filtres à coefficients fixes et leurs paramètres de complexité sont les mêmes : cadence et précision des multiplications, quantité de mémoire nécessaire. Cependant les spécifications sont différentes et pour les faire apparaître clairement il est utile de rappeler les principales caractéristiques des filtres adaptatifs utilisant l'algorithme du gradient.

Dans le cas du filtre RIF réalisé sous forme directe, une condition pratique de stabilité est donnée par :

$$0 < \delta < \frac{2}{N\sigma_x^2} \quad (2)$$

où  $\sigma_x^2$  désigne la puissance du signal d'entrée, supposé stationnaire. Les valeurs optimales des coefficients conduisent au minimum  $E_{\min}$  de la puissance du signal d'erreur. Les valeurs réelles correspondent à une puissance  $E_R$  supérieure qui peut être approchée par :

$$E_R = \frac{E_{\min}}{1 - \frac{\delta N \sigma_x^2}{2}} \quad (3)$$

Quand  $\delta$  approche sa limite supérieure,  $E_R$  tend vers l'infini. En pratique il faut prendre pour  $\delta$  des valeurs nettement plus faibles, permettant l'approximation suivante :

$$E_R \approx E_{\min} \left[ 1 + \frac{\delta N \sigma_x^2}{2} \right] \quad (4)$$

Une estimation de la constante de temps  $\tau_e$  de l'amplitude de l'erreur est donnée par :

$$\tau_e \approx \frac{1}{\delta \sigma_x^2} \quad (5)$$

Ainsi il apparaît clairement que le pas d'adaptation  $\delta$  est le paramètre critique du filtre.

Les limitations du nombre de bits des coefficients et des variables internes augmentent la puissance de l'erreur qui devient  $E_{RT}$ . Dans les applications, la première spécification consiste souvent à imposer un minimum  $G$  au rapport entre la puissance du signal de référence et celle de l'erreur :

$$\frac{\sigma_y^2}{E_{RT}} \geq G^2 \quad (6)$$

Le paramètre  $G$  est appelé gain du système et peut être par exemple un gain de prédiction ou un affaiblissement d'écho. La constante de temps  $\tau_e$  est un autre paramètre auquel une limite est généralement imposée. Les techniques du gradient ne sont bien entendu applicables que si ces limites sont compatibles ; en désignant par  $\Delta G$  l'écart relatif entre la limite du gain et le gain théorique et par  $\tau_m$  la limite imposée à la constante de temps, il vient :

$$\tau_m \Delta G \geq \frac{N}{2} ; 0 < \Delta G < 1 \quad (7)$$

L'algorithme des moindres carrés permet, dans une certaine mesure, de s'affranchir de cette contrainte fondamentale.

Les nombres de bits des coefficients et données internes peuvent être obtenus à partir des spécifications imposées au gain du système et à la constante de temps.

## III. FILTRE RIF EN STRUCTURE DIRECTE

Dans cette structure l'équation de définition :

$$\tilde{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i(n)x(n-i) \quad (8)$$

est réalisée directement et le schéma est donné par la figure 2. Les limitations de nombres de bits sont obtenues par arrondi en sortie des multiplieurs. La quantification des coefficients avec le pas  $q_1$  introduit un bruit de gradient supplémentaire  $B_{g1}$  donné par :

$$B_{g1} = \frac{1}{12} \left( \frac{q_1}{\delta} \right)^2 \quad (9)$$

Compte-tenu de l'arrondi des résultats de multiplications du filtre avec le pas  $q_2$ , il vient :

$$E_{RT} \approx E_{\min} \left( 1 + \frac{\delta N \sigma_x^2}{2} \right) + \frac{N}{78} \frac{q_1^2}{12} + N \frac{q_2^2}{12} \quad (10)$$

En supposant que, dans cette évaluation de l'erreur totale,  $E_{\min}$  est le terme prépondérant, en supposant équivalentes les contributions de l'algorithme du gradient et des arrondis, on obtient l'expression suivante pour le nombre de bits  $b_c$  des coefficients :

$$b_c \approx \log_2(\tau_e) + \log_2(G) + \log_2 \left[ a_{\max} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \right] \quad (11)$$

où  $a_{\max}$  désigne la plus grande amplitude de coefficient.



Le terme  $a_{\max} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$  est lié à la nature des signaux ; pour une valeur suffisante du gain on peut écrire, en notations vectorielles :

$$y^2(n) \approx A^t(n)X(n)X^t(n)A(n)$$

En prenant l'espérance des deux membres, il vient à l'optimum des coefficients :

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \cdot A_{\text{opt}}^t R_N A_{\text{opt}}$$

où  $R_N$  désigne la matrice d'auto-corrélation du signal  $x(n)$ , normalisée et d'ordre  $N$ .

D'où, en désignant par  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$  les valeurs propres minimale et maximale de  $R_N$  :

$$\frac{1}{N\lambda_{\max}} \leq a_{\max}^2 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \quad (12)$$

Ainsi pour des bruits, le terme  $a_{\max} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$  a une borne supérieure qui se rapproche de l'unité, mais pour des signaux à spectre étroit il peut prendre de grandes valeurs, par exemple dans le cas de la prédiction linéaire. De plus si les signaux ne sont pas stationnaires, alors leur dynamique peut intervenir dans ce terme et le nombre de bits  $b_c$  se trouver augmenté en conséquence.

Le nombre de bits  $b_i$  des données internes se détermine également à partir de la relation (10). En faisant un ensemble d'hypothèses réalistes, on montre que :

$$b_i \approx 2 + \log_2 \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \right) + \log_2(G) + \frac{1}{2} \log_2(\tau_e) \quad (13)$$

Les deux expressions (11) et (13) font apparaître directement la liaison entre les spécifications du filtre et la précision nécessaire dans les calculs.

Par exemple, pour le filtre de prédiction linéaire dans un codeur de signal téléphonique utilisant la technique du Mic différentiel adaptatif on peut prendre  $\tau_e = 128$  (16 ms pour une fréquence d'échantillonnage de 8 kHz) et  $G = 16$ . Comme dans ce cas  $\sigma_x = \sigma_y$  et que généralement pour un prédicteur de signaux téléphoniques  $a_{\max} \leq 2$ , on obtient  $b_c = 12$  bits. Si la dynamique du signal est de 36 dB (6 bits) le nombre de bits des données internes s'élève à  $b_i = 16$  bits.

Cependant, l'effet des non stationnarités du signal ne se limite pas à une augmentation directe des valeurs  $b_c$  et  $b_i$  ; il faut reconsidérer l'erreur totale [2].

#### IV. CAS DES SIGNAUX NON STATIONNAIRES

Une difficulté dans l'étude des signaux non stationnaires est précisément la représentation de la caractéristique de non stationnarité [3].

L'hypothèse qui va être prise d'abord est que la non stationnarité se traduit par le fait que les valeurs optimales des coefficients aux indices  $n$  et  $n+1$  diffèrent et que cette différence est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance  $\alpha^2$  pour chaque coefficient. Si de plus cette variable est supposée indépendante des autres, alors son introduction dans les calculs conduisant à estimer l'erreur résiduelle donne pour l'erreur  $E_{\text{RNS}}$  dans ce cas :

$$E_{\text{RNS}} \approx E_{\min} \left( 1 + \frac{\delta N \sigma_x^2}{2} \right) + \frac{\alpha^2}{2\delta} N \sigma_x^2 \quad (14)$$

Dans ces conditions il existe une valeur optimale  $\delta_{\text{opt}}$  pour le pas d'adaptation :

$$\delta_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{E_{\min}}}{\alpha} \quad (15)$$

A titre d'illustration une étude a été faite sur un filtre de prédiction à 12 coefficients appliqué à un signal de parole, échantillonné à 8 kHz et de bande limitée à 3,4 kHz. La figure 3 montre les variations du gain de prédiction  $G$  en fonction du pas d'adaptation  $\delta$  pour 3 phrases différentes. On constate nettement la présence d'un maximum. Cependant on observe également que la relation (14) ne correspond pas aux pentes des courbes pour  $\delta$  petit. Une analyse plus approfondie est nécessaire dans ce cas.

Les performances du filtre adaptatif en présence de signaux non stationnaires peuvent être améliorées par une estimation de puissance du signal  $x(n)$  et avec la procédure suivante :

$$a_i(n+1) = a_i(n) + \frac{\delta}{P_0 + \frac{1}{N_0} \sum_{j=0}^{N_0-1} x^2(n-j)} e(n)x(n-i) \quad (16)$$

Pour la parole on peut prendre  $N_0 = 100$  et  $P_0 = 0,5$ , si la puissance moyenne du signal  $x(n)$  est voisine de l'unité.

La figure 4 donne les variations du gain de prédiction  $G$  en fonction du pas d'adaptation  $\delta$  ; une amélioration sensible apparaît alors. Cependant la mise en oeuvre de la procédure (16) est relativement compliquée. Une approche très simple qui permet de réduire l'effet des non stationnarités est l'algorithme du signe, correspondant à l'expression :

$$a_i(n+1) = a_i(n) + \delta \text{signe}[e(n).x(n-i)] \quad (17)$$

La figure 5 donne les résultats obtenus. Le choix  $\delta = 2^{-7}$  correspond au gain maximal pour les trois phases. C'est celui qui est généralement retenu dans les codeurs Mic DA [4]. Pour affiner l'évaluation de la précision à donner aux calculs, il faut reprendre la démarche du paragraphe précédent avec l'expression (14) comme équation de base.

Les résultats obtenus pour le filtre RIF vont maintenant être étendus au filtre en treillis.

#### V. FILTRE EN TREILLIS

La structure en treillis peut être utilisée en filtrage adaptatif et notamment en prédiction linéaire. Il est intéressant d'analyser les précisions de calcul auxquelles elle conduit. Un filtre d'ordre  $N$  à  $N$  étages comme indiqué sur la figure 6. Pour chaque étage les signaux d'entrée sont notés  $e_{i-1}(n)$  et  $b_{i-1}(n)$ , les signaux de sortie  $e_i(n)$  et  $b_i(n)$  et les coefficients  $k_i$  sont définis par [5] :

$$k_i = 2 \frac{E[e_{i-1}(n)b_{i-1}(n-1)]}{E[e_{i-1}^2(n)] + E[b_{i-1}^2(n-1)]}; \quad 1 \leq i \leq N \quad (18)$$

Les signaux  $e_i(n)$  et  $b_i(n)$  sont les erreurs de prédiction avant et arrière ; leur puissance décroît



quand l'indice  $i$  croît et il en est de même en général des coefficients  $k_i$  qui sont inférieurs à 1 en valeur absolue. Le gain de prédiction du filtre s'écrit :

$$G^2 = \frac{E[x^2(n)]}{E[e_N^2(n)]} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - k_i^2} \quad (19)$$

D'après leur définition, les coefficients  $k_i$  minimisent la somme des carrés des erreurs de prédiction avant et arrière. Dans une approche adaptative la mise à jour des coefficients peut être faite pour obtenir cette minimisation à chaque valeur de l'indice :

$$k_i(n+1) = k_i(n) + \delta_t \frac{1}{2} [e_i(n)b_{i-1}(n-1) + b_i(n)e_{i-1}(n)] \quad (20)$$

où  $\delta_t$  est le pas d'adaptation. Pour le premier étage il vient :

$$k_1(n+1) = k_1(n) + \delta_t \left[ x(n)x(n-1) - k_1(n) \frac{x^2(n) + x^2(n-1)}{2} \right] \quad (21)$$

Il est intéressant de faire la comparaison avec le filtre RIF du premier ordre, qui lui ne fait pas intervenir la prédiction arrière :

$$a(n+1) = a(n) + \delta_1 [x(n)x(n-1) - a(n)x^2(n-1)] \quad (22)$$

On peut s'attendre à un bruit de gradient un peu plus faible dans la relation (21). En supposant néanmoins que l'erreur supplémentaire  $E_t$  apportée par l'algorithme du gradient est la même il vient :

$$E_t = (1 - k_1^2) \sigma_x^2 \frac{\delta_t}{2} \sigma_x^2 \quad (23)$$

Cette erreur est amplifiée par les étages suivants, pour lesquels les pas d'adaptation sont , afin d'obtenir l'homogénéité des constantes de temps. Globalement on peut estimer que  $E_t$  représente l'erreur totale pour le filtre en treillis. Un filtre RIF à  $N$  coefficients et pas d'adaptation  $\delta$  donne la même erreur supplémentaire si l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sigma_x^2 \prod_{i=1}^N (1 - k_i^2) \frac{\delta}{2} \sigma_x^2 = (1 - k_1^2) \sigma_x^2 \frac{\delta_t}{2} \sigma_x^2 \quad (21)$$

Pour des constantes de temps similaires, c'est-à-dire  $\delta \approx \delta_t$  l'approche avec structure en treillis est plus intéressante si :

$$\prod_{i=2}^N \frac{1}{(1 - k_i^2)} < N \quad (22)$$

ou encore quand le gain du système est faible et que le premier étage est très efficace. Si cette inégalité est vérifiée alors on peut évaluer la précision des calculs dans le treillis en l'assimilant à un filtre RIF d'ordre 1, c'est-à-dire que les nombres de bits des coefficients et des variables internes sont donnés par :

$$b_c \approx \log_2(\tau_e) + \log_2 G$$

$$b_i \approx 2 + \log_2 G + \frac{1}{2} \log_2(\tau_e)$$

Il faut souligner que dans le cas du treillis, le pas d'adaptation doit être rendu proportionnel à l'inverse de la puissance des signaux pour chaque cellule, ce qui représente une charge de calcul importante.

## VI. CONCLUSION

Les estimations de précision des calculs qui ont été faites en fonction des spécifications pour la structure RIF sous forme directe et pour l'algorithme du gradient peuvent s'étendre à la structure en treillis. La comparaison entre les deux structures montre que le treillis ne peut présenter d'avantages du point de vue de la précision des calculs que pour les systèmes à gain faible ; de plus il nécessite une quantité de calculs globale nettement plus importante, d'une part en raison de sa définition même, d'autre part en raison de l'estimation de puissance du signal qui est à faire à l'entrée de chaque cellule pour ajuster le gain d'adaptation.

Les performances des deux types de filtres adaptatifs considérés peuvent être améliorées par l'utilisation de l'algorithme des moindres carrés au lieu de l'algorithme des moindres carrés moyens. Les estimations de complexité et de précision des calculs sont à reprendre dans ce cas ; ce travail est en cours.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BELLANGER, chapitre XI dans "Traitement Numérique du Signal", 2<sup>e</sup> Edition, Masson Paris, 1984.
- [2] B. WIDROW and E. WALACH, "On the Statistical Efficiency of the LMS algorithm with non stationary inputs", IEEE Trans., Vol. IT-30, N° 2, Mars 1984, pp. 211-221.
- [3] O. MACCHI, "Optimization of Adaptive Identification for time-varying Filters", Conference on Decision Control, USA, Dec. 1984.
- [4] CCITT, Rec. G721, "Codage Mic-Differential Adaptatif à 32 kbits/s", Doc. AP VIII-96, Genève, Juin 1984.
- [5] P.M. GRANT and M.J. RUTTER, "Application of Gradient Adaptive Lattice Filters to Channel Equalization", IEE Proc., Vol. 131, Part F, N° 5, pp. 473-479, Août 1984.

COMPLEXITE DE FILTRES NUMERIQUES ADAPTATIFS

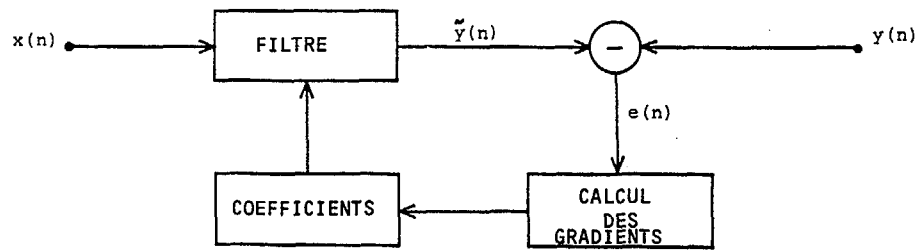


FIGURE 1 : Filtrage adaptatif par gradients

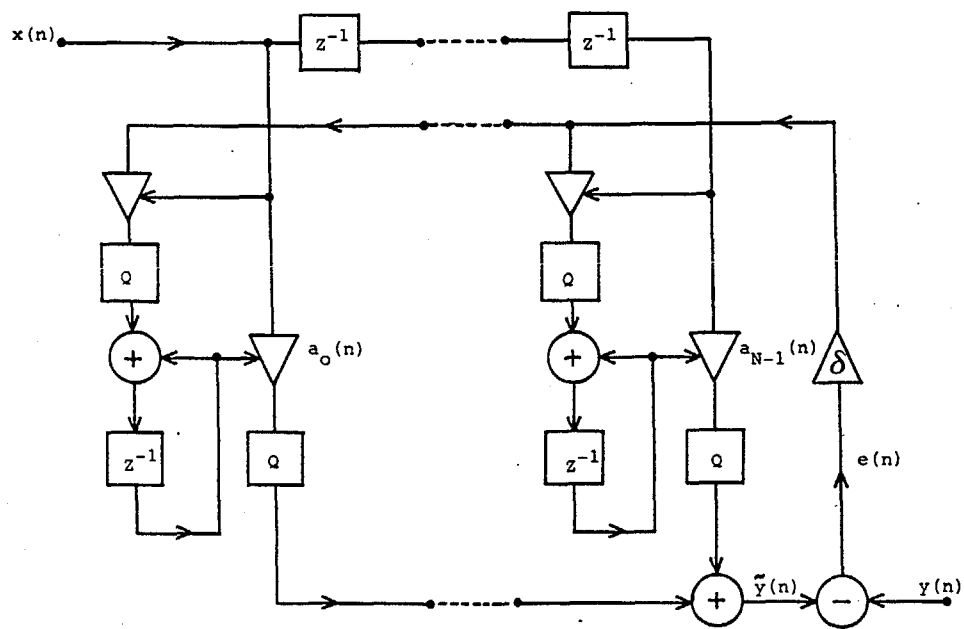


FIGURE 2 : Filtre adaptatif RIF

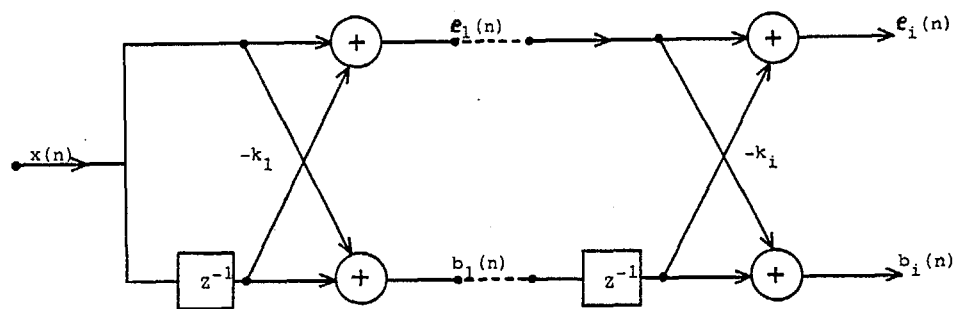


FIGURE 6 : Filtre RIF en treillis



GAINS DE PREDICTION EN FONCTION DU PAS D'ADAPTATION  
POUR TROIS PHASES :

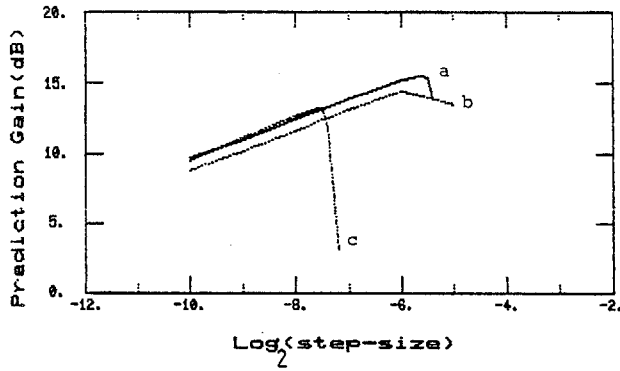


FIGURE 3 : avec pas d'adaptation fixe

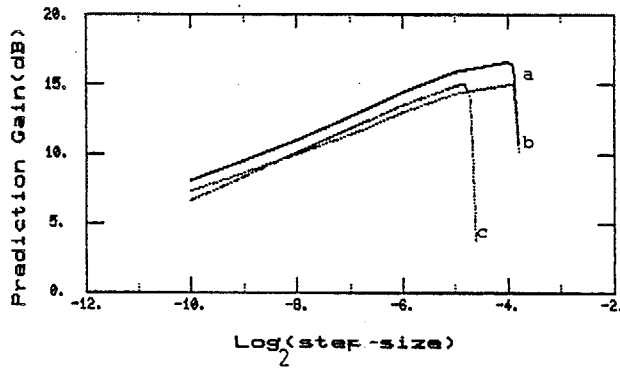


FIGURE 4 : avec pas d'adaptation variable

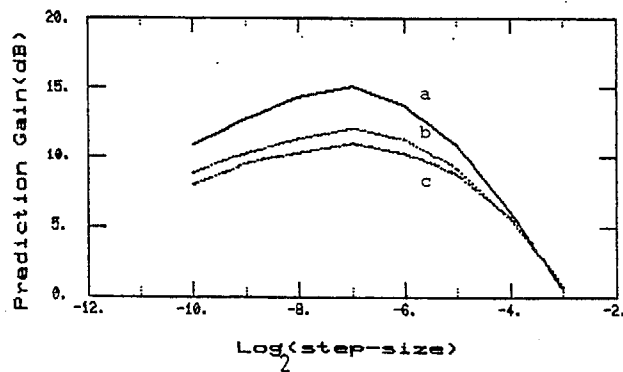


FIGURE 5 : pour l'algorithme des signes