

DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

PROBLEMES LIES A LA RECONSTRUCTION D'IMAGES PAR TOMOGRAPHIE MICROONDE ET ULTRASONORE

Deuxième partie: Limitations théoriques et pratiques des
algorithmes utilisés.

Ali Mohammad-Djafari et Guy Demoment.

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS/ESE), Plateau du Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette.

RESUME

Dans cette deuxième partie, nous analysons les méthodes de reconstruction tomographiques utilisées afin de mettre en évidence leurs hypothèses implicites et les limitations qu'elles entraînent.

Il s'agit d'un problème inverse, celui de la résolution d'une équation intégrale de première espèce à partir de mesures discrètes, et limitées en nombre, du champ diffracté par l'objet à reconstruire. Les techniques actuelles utilisent une extension du théorème de Radon, ou théorème de projection généralisée, appelée tantôt focalisation dynamique, tantôt rétropropagation, selon l'ordre des différents traitements. Ce théorème permet de relier les transformées de Fourier du champ diffracté et de l'objet.

On montre que les limitations de ces techniques sont à deux niveaux:

- au passage dans le domaine de Fourier, à cause de la limitation du support et du nombre de points de mesure du champ diffracté;

- au retour dans le domaine spatial, à cause des interpolations effectuées pour remplir le domaine de Fourier.

On montre les liens qui existent entre ces problèmes et ceux, bien connus, des interpolations trigonométriques ainsi que ceux de la reconstruction d'un signal multidimensionnel à spectre limité à partir d'échantillons sur un contour algébrique.

Les hypothèses implicites des méthodes existantes sont assez bien vérifiées lorsque l'on dispose d'un grand nombre de projections régulièrement espacées. Les limitations deviennent sévères lorsque les projections sont, pour des raisons techniques par exemple, réduites en nombre ou en angle. Il serait donc intéressant, dans ces cas là, d'améliorer les méthodes existantes. Le problème est en fait celui de la synthèse de Fourier et pourrait être abordé de façon globale comme un problème d'estimation à maximum d'entropie. Les difficultés sont alors celles d'un problème non-standard pour lequel on ne bénéficie pas, comme en analyse spectrale, des propriétés d'une covariance qui conduisent à une solution explicite.

SUMMARY

In this second part, We analyse the classical tomographic reconstruction methods and focus attention on their implicit hypothesis and their limitations.

The problem is an inverse one, that is the resolution of a first kind integral equation from the limited discretized measurements of the diffracted field. These classical methods use an extension of the Radon theorem, or generalized projection theorem, which is called either backpropagation, or dynamic focalization, depending on the order of the different processing. This theorem relates the Fourier Transform (FT) of the diffracted field measured on the ligne segments to the FT of the object.

We show that the limitations of these methods are on two levels:

-computation of the FT of the diffracted field, due to the limitation of the support and total number of measured data,

-computation of the 2D FT of the object, due to the interpolations made in the Fourier domain.

We show also the relations between these problems and those of trigonometric interpolation or the band limited reconstruction of multidimensional signals from their samples on an algebraic contour.

The implicit assumptions of the existing methods are pretty well verified when we have a great number of regularly spaced projections. Their limitations come more severe when the projections are reduced in number or restricted in limited angles. It is therefore interesting, in these cases, to propose some changes in these methods or to develop a new one. The problem is in fact a Fourier Synthesis one, which can be solved globally with a maximum entropy estimation. The difficulties in this case are those of a nonstandard problem in which we can't use the properties of a covariance, as is done in spectral analysis.



PROBLEMES LIES A LA RECONSTRUCTION D'IMAGES PAR TOMOGRAPHIE MICROONDE ET ULTRASONORE

Deuxième partie: Limitations théoriques et pratiques des algorithmes utilisés.

I-INTRODUCTION

Dans ce rapport nous nous proposons d'étudier le principe et les problèmes liés à la reconstruction d'images par tomographie microonde et ultrasonore.

La tomographie à diffraction est basée sur une solution linéaire de l'équation d'onde qui relie un objet et le champ diffracté. Les approximations linéaires jouent un rôle essentiel dans la tomographie à champ diffracté. C'est pourquoi il faut être vigilant quant aux hypothèses implicites ou explicites faites lors de la mise en oeuvre de ces méthodes.

Dans une première partie, nous rappelons les principales méthodes d'approximation linéaire utilisées. La théorie de l'inversion du champ diffracté scalaire sera résumée dans la seconde partie. Enfin dans une troisième partie nous analyserons les méthodes de reconstruction tomographiques existantes afin de mettre en évidence leurs hypothèses implicites et les limitations qu'elles entraînent.

Dans un milieu homogène, les ondes électromagnétiques satisfont l'équation de Helmholtz $(\nabla^2 + k_0^2)u_0(\vec{r}) = 0$ où k_0 est la fréquence spatiale de l'onde plane et u_0 est le champ. En imagerie on s'intéresse à un milieu non homogène. Si on néglige les effets de la polarisation, la forme générale de l'équation d'onde devient

$$[\nabla^2 + k^2(\vec{r})]u(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

où $k(\vec{r})$ représente l'indice de réfraction du milieu

$$k(\vec{r}) = k_0 n(\vec{r}) = k_0 [1 + f(\vec{r})] = [w^2 \mu(\vec{r}) \epsilon(\vec{r})]^{1/2} \quad (2)$$

et où k_0 est la valeur moyenne de la constante de propagation.

II-METHODES D'APPROXIMATION LINEAIRES

Pour résoudre l'équation (2) nous définissons les changements de variables suivants $v = g(u/u_0) = g(a)$ et $v_1 = u_0 g(a)$ d'où $(\nabla^2 + k_0^2)v_1 = -u_0 k_0^2 h(\vec{r})$

$$\text{où } h(\vec{r}) = -u_0 \left[\frac{dg(a)}{da} a k_0^2 f(\vec{r}) + \frac{d^2 g(a)}{da^2} (\text{grad } a)^2 \right] \quad (3)$$

Les deux approximations bien connues de Born et de Rytov correspondent à deux choix différents de $g(a)$. Si les termes du second degré sont négligés, on peut résoudre cette équation à l'aide de la fonction de Green $G(\vec{r}, \vec{r}')$

$$(\nabla^2 + k_0^2)G(\vec{r}, \vec{r}') = -k_0^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4)$$

Ce qui dans un espace à deux dimensions donne

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r} - \vec{r}') = (j/4) k_0^2 H_0^{(1)}(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (5)$$

où $H_0^{(1)}(x)$ est la fonction de Hankel d'ordre zéro. Ainsi la solution se met sous la forme d'une équation intégrale de convolution

$$v_1(\vec{r}) = \iint G(\vec{r} - \vec{r}') u_0(\vec{r}') h(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (6)$$

Dans le cas de l'approximation de Born on a

$$g(a) = a - 1, \quad v = (u - u_0)/u_0, \quad v_1 = (u - u_0) \text{ et,}$$

$$h(\vec{r}) = [1 + u_s(\vec{r})/u_0(\vec{r})] f(\vec{r})$$

En notant $u_s(\vec{r})$ le champ diffracté obtenu par l'approximation de Born d'ordre un, on obtient

$$u_s(\vec{r}) = \iint G(\vec{r} - \vec{r}') u_0(\vec{r}') f(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (7)$$

Dans le cas de l'approximation de Rytov on a

$$g(a) = \text{Ln}(a), \quad v = \text{Ln}(u/u_0) \text{ et,}$$

$$h(\vec{r}) = f(\vec{r}) - (1/k_0^2) [\text{grad } u(\vec{r})/u(\vec{r})]^2$$

Cette approximation est valable sous des contraintes un

peu moins sévères. Par approximation de Rytov d'ordre un on entend $(\text{grad } v_s)^2 \ll k_0^2 f(\vec{r})$ ce qui nous donne $v_s(\vec{r}) = u_s(\vec{r})/u_0(\vec{r}) = [1/u_0(\vec{r})] G(\vec{r} - \vec{r}') u_0(\vec{r}') f(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (8)$

Il est important de noter qu'en dépit de cette dernière relation, les deux approximations sont bien différentes [4].

III-IMAGERIE MICROONDE ET ULTRASONORE 2D

Dans ce cas, et en supposant que l'objet est illuminé par une onde plane polarisée rectilignement selon l'axe oz, on peut écrire [8]

$$E_z(\vec{r}) = E_z^i(\vec{r}) + \iint_S J(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' \quad (9)$$

où $J(\vec{r}') = [k^2(\vec{r}') - k_0^2] E_z(\vec{r}')$

En définissant $u(\vec{r}) = E_z^d(\vec{r})/E_z^i(\vec{r})$ et $K(\vec{r}') = J(\vec{r}')/E_z^i(\vec{r}')$ on a

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{E_z^i(\vec{r})} \iint_S G(\vec{r} - \vec{r}') K(\vec{r}') E_z^i(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (10)$$

Ainsi, si on s'intéresse au paramètre $K(\vec{r})$ qui représente la distribution de la densité de courant induite à l'intérieur de l'objet diffractant, normalisée par rapport au champ incident, l'équation (10) est une équation de même forme que (8).

IV-THEORIE DE L'INVERSION DU CHAMP DIFFRACTE SCALAIRE

Dans l'approximation du premier ordre de Born, l'équation (7) peut être considérée comme la convolution de la fonction de Green $G(r)$ avec le produit de l'objet et du champ incident $u_0(r)$.

La solution de l'équation intégrale (7) dans le domaine de Fourier nous donne

$$\hat{u}(w) = G(w) [f(w) * \hat{u}_0(w)] \quad (11)$$

où * représente l'opérateur de convolution et où $\hat{\quad}$ désigne une transformée de Fourier (fig. 1).

$$f(w) = \iint f(r) \exp(-jw \cdot r) dr$$

Dans le cas de l'illumination avec une onde plane on a $\hat{u}_0(w) = 2\pi \delta(w - k_0)$ et $f(w) * \hat{u}_0(w) = 2\pi f(w - k_0)$

L'effet de la convolution dans l'équation (11) est donc une multiplication dans le domaine de Fourier:

$$u_s(w) = [2\pi / (w^2 - k_0^2)] f(w - k_0) \exp(-jw \cdot r') \quad (12)$$

Considérons maintenant pour simplifier que le champ incident se propage en direction de l'axe y positif, et que le champ diffracté est mesuré sur une ligne droite $x = x_0$. Ce champ est obtenu en calculant la TF inverse de l'équation (12):

$$u_s(r) = (1/2\pi) \iint [f(w - k_0) / (w^2 - k_0^2)] \exp[jw \cdot (r - r')] dw$$

Le calcul de cette intégrale peut être fait sur un contour autour des points singuliers $w^2 - k_0^2 = 0$. En notant $w_x = a$, on obtient ainsi

$$u(x = x_0, y) = \int Q_1(a) \exp(jay) da + \int Q_2(a) \exp(jay) da \quad (13)$$

où $Q_{1,2}(a) = [1 / (+j2\gamma)] f(a, b) \exp(\pm jbx_0)$
 $\gamma = (k_0^2 - a^2)^{1/2}$ et $b = -k_0 + \gamma$

En examinant ces deux équations on constate que $Q_1(a)$ représente la solution en terme des ondes planes se propageant dans la direction des x croissant, tandis que $Q_2(a)$ représente la solution en terme des ondes planes se propageant dans la direction des x décroissant. $Q(a)$ est d'une part la TF des mesures $u_s(x_0, y)$ et d'autre part proportionnelle à la TF en 2-D de l'objet $f(r)$ calculée sur des demi-cercles. Dans le cas de la tomographie à transmission les mesures sont effectuées à $x = +x_0$, donc seule $Q_1(a)$ intervient dans

**PROBLEMES LIES A LA RECONSTRUCTION D'IMAGES PAR TOMOGRAPHIE
MICROONDE ET ULTRASONORE**
Deuxième partie: Limitations théoriques et pratiques des algorithmes utilisés.

la solution (demi-cercle en trait plein dans la figure (2)), tandis que dans la tomographie à réflexion seule $Q_2(a)$ intervient dans la solution (demi-cercle en traits pointillés dans la figure 2).

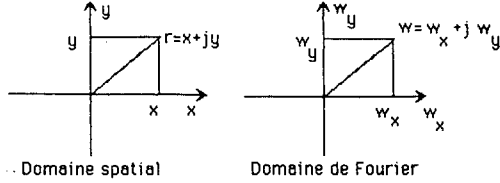


Figure 1: Les coordonnées cartésiennes dans le domaine spatial et le domaine de Fourier.

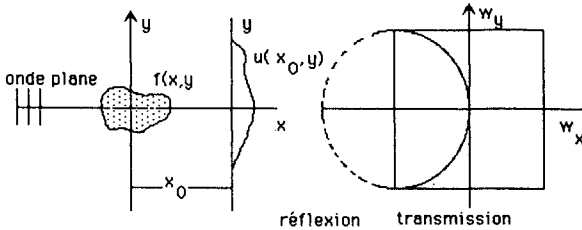


Figure 2: a) l'objet est illuminé par une onde plane et le champ diffracté est mesuré sur une ligne droite. b) relation entre la TF du champ diffracté et la TF 2-D de l'objet.

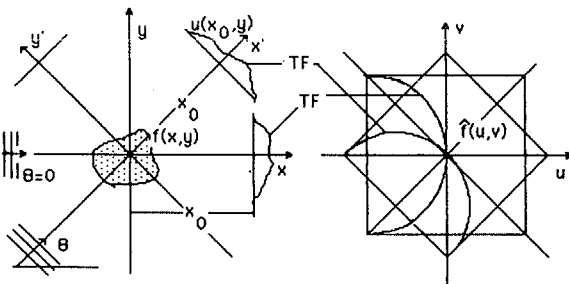


Figure 3: relation entre la TF du champ diffracté et la TF 2-D de l'objet.

Ce résultat connu sous le nom de théorème de Radon généralisé relie ainsi la distribution de l'objet diffractant au champ diffracté mesuré sur une ligne droite. Plusieurs procédures expérimentales peuvent être utilisées pour collecter les données et remplir le domaine de Fourier afin de reconstruire l'objet par une TF inverse. Ceci peut être fait soit en changeant la fréquence de l'onde incidente (rayon k_0), soit en tournant l'objet (l'ensemble des demi-cercles de rayons k_0 centrés sur un cercle de rayon k_0).

Par la suite nous supposons que les données sont obtenues en tomographie à transmission et en tournant l'objet pour obtenir un nombre fini de "vues" repérées par des valeurs discrètes θ_i . Ainsi l'équation générale de propagation s'écrit

$$(\nabla^2 + k_0^2)u^\theta(r) = -u_0(r)h^\theta(r) \quad (14)$$

et en se référant aux notations de la figure (3) on a

$$\hat{h}\left(\theta \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\right) = (2j\gamma)Q(a)\exp(-jbx_0)$$

où $Q(a) = TF [u_s(x=x_0, y)]$, $\gamma = (k_0^2 - a^2)^{1/2}$ et $b = -k_0 + \gamma$, et où $h(x, y)$ est une fonction 2-D proportionnelle à la distribution de l'objet.

Il existe deux approches différentes pour la résolution du problème de reconstruction.

i) Méthodes analytiques: Dans ces méthodes, une solution du problème sous forme analytique est obtenue dans une première étape. Cette équation est ensuite

discretisée et résolue par des méthodes numériques. Dans le paragraphe 4.1 nous étudierons deux types d'algorithmes de ce genre qui ont été proposés dans la littérature.

ii) Méthodes algébriques: Dans ces méthodes l'équation intégrale reliant l'objet aux mesures est discretisée dès le départ, ensuite on résout le système d'équations linéaires ainsi obtenu. Nous n'étudierons pas ces méthodes dans cette communication.

**V-ALGORITHMES DE RECONSTRUCTION
(METHODES ANALYTIQUES)**

Considérons une fonction 2-D $h(x, y)$. Nous avons une information partielle $f(b, a)$ sur $\hat{h}(u, v)$, où (b, a) sont reliées aux coordonnées cartésiennes (u, v) par une transformation T:

$$\hat{h}(u, v) = f(b, a) \text{ où } (u, v) = T(b, a) = [T_1(b, a), T_2(b, a)] \quad (15)$$

et où T_1 et T_2 sont supposées être continues. Les lieux des points définis par T forment un ensemble de contours dans le domaine de Fourier.

Dans le cas de la tomographie à onde diffractée nous avons

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(\theta, a) \\ T_2(\theta, a) \end{bmatrix} \quad (16)$$

où $b = -k_0 + (k_0^2 - a^2)^{1/2}$

Dans ce cas les contours définis par T sont des demi-cercles de rayons k_0 [cf. fig.(3)].

On obtient, par TF inverse

$$f(x, y) = \int \hat{f}(\theta, a) J(\theta, a) \exp\{j[T_1x + T_2y]\} d\theta da \quad (17)$$

où $J(\theta, a)$ est le jacobien donné par

$$J(\theta, a) = \begin{vmatrix} dT_1/d\theta & dT_1/da \\ dT_2/d\theta & dT_2/da \end{vmatrix} \quad (18)$$

On montre que dans notre cas on a

$$J(\theta, a) = k_0 a / (k_0^2 - a^2)^{1/2}$$

L'équation (17) et sa TF inverse montre que l'on peut développer deux types de méthodes d'interpolation suivant l'ordre des intégrations.

i) Interpolation dans le domaine de Fourier.

Soit

$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases} \text{ et sa TF } I(u, v) = \iint_D \exp[-j(ux+vy)] dx dy$$

La TF inverse de l'équation (17) peut être écrite

$$f(u, v) = \iint f(\theta, a) J(\theta, a) \exp[-j((u-T_1)x + (v-T_2)y)] dx dy d\theta da$$

ou bien

$$f(u, v) = \iint f(\theta, a) J(\theta, a) I[(u-T_1), (v-T_2)] d\theta da \quad (19)$$

En pratique on connaît $f(\theta, a)$ pour les valeurs discrètes de θ_m et de a_n et nous supposons qu'on puisse écrire

$$f(\theta, a) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f(\theta_m, a_n) (\theta - \theta_m) (a - a_n) \quad (20)$$

dans ce cas on a

$$f(u, v) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f(\theta_m, a_n) J(\theta_m, a_n) I[(u_1 - T_1(\theta_m, a_n), v_j - T_2(\theta_m, a_n))] \quad (21)$$

L'interpolation dans le domaine de Fourier et la reconstruction de $f(x, y)$ s'obtient par la TF inverse de $f(u, v)$.

Nous pouvons simplifier cette équation en nous



**PROBLEMES LIES A LA RECONSTRUCTION D'IMAGES PAR TOMOGRAPHIE
MICROONDE ET ULTRASONORE**

Deuxième partie: Limitations théoriques et pratiques des algorithmes utilisés.

limitant au lobe principal de la fonction $I(u,v)$:

$$f(u_i, v_j) = \sum_{m,n \in \text{lobe principal de } I} f(\theta_m, a_n) J(\theta_m, a_n) I[(u_i - T1(\theta_m, a_n), v_j - T2(\theta_m, a_n))] \quad (22)$$

Par expérience nous avons trouvé qu'il suffisait de limiter l'utilisation des données aux quatre voisins les plus proches pour obtenir des résultats de même qualité que ceux obtenus par les techniques d'interpolation spatiale appelées encore rétropropagation. De plus la forme exacte du lobe principal de la fonction $I(u,v)$ n'a pas un rôle crucial dans le résultat, et une approximation linéaire de cette fonction peut aussi fournir de bons résultats.

ii) Interpolation dans le domaine spatial

Définissons les coordonnées (x', y') telles que

$$T1x + T2y = (x, y) \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \end{bmatrix} = (x, y) \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = (x', y') \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = x'b + y'a \quad (23)$$

Définissons aussi une nouvelle fonction $I_\theta(x', y')$ appelée "fonction rétropropagée" [3], par

$$I_\theta(x', y') = \int f(\theta, a) J(\theta, a) \exp(jbx') \exp(jay') da = TF [f(\theta, a) J(\theta, a) \exp(jbx')] \quad (24)$$

Ainsi l'équation (17) peut être écrite

$$f(x, y) = \int d\theta I_\theta(x \cos\theta + y \sin\theta, -x \sin\theta + y \cos\theta) \quad (25)$$

Ce qui dans le cas discret donne

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^M \Delta\theta I_{\theta_m}(x \cos\theta_m + y \sin\theta_m, -x \sin\theta_m + y \cos\theta_m) \quad (26)$$

iii) Difficultés pratiques de mise en oeuvre

Les algorithmes de reconstruction existant supposent qu'on dispose d'un nombre suffisamment grand de projections uniformément distribuées autour de l'objet à reconstruire. En pratique et dans beaucoup de circonstances ceci n'est pas réalisable. Généralement on ne dispose que d'un nombre limité de projections, qui ne sont pas nécessairement distribuées d'une façon uniforme autour de l'objet. De plus elles sont aussi limitées par la longueur de la ligne de mesure et le nombre de points de mesure sur cette ligne.

Le résultat de ces contraintes expérimentales est que l'espace de Fourier de la fonction à reconstituer n'est pas rempli de façon assez dense ou bien ce remplissage n'est que sectoriel. Par conséquence, les méthodes discutées plus haut ne donnent plus de résultats satisfaisants et peuvent même induire des erreurs. Les difficultés majeures sont alors à deux niveaux :

- au passage dans le domaine de Fourier, à cause de la limitation du support et du nombre de points de mesure du champ diffracté;
- au retour dans le domaine spatial, à cause des interpolations effectuées pour remplir le domaine de Fourier

Il existe d'autres méthodes d'interpolation qui peuvent être utilisées, soit dans le domaine de Fourier en faisant l'hypothèse d'un support borné de la fonction dans le domaine spatial, soit, dans le domaine spatial en faisant l'hypothèse d'un support borné du spectre de la fonction.

Dans les méthodes de reconstruction basées sur l'interpolation trigonométrique on fait l'hypothèse de

la limitation du support du spectre de l'objet. Ainsi la fonction $f(r, \theta)$ admet une décomposition en série de Fourier. Supposons qu'on dispose de M points de la fonction $f(r, \theta)$ distribués d'une façon arbitraire. On peut alors écrire:

$$\sum_{k=-K}^K C_k(r) \exp(jk\theta) = f(r, \theta_m) \quad m=1, \dots, M$$

ou, sous forme matricielle $E(0)C(r) = f(r, \theta)$ où E est une matrice de dimensions $(M \times 2K+1)$ avec pour éléments $E_{m,k} = \exp(jk\theta_m)$ et $C(r)$ est un vecteur contenant les coefficients (c_k) et, où, finalement, F est un vecteur contenant les valeurs de $f(r, \theta_k)$. L'inversion généralisée de cette équation nous donne les coefficients d'interpolations $\hat{c}(r)$, et ainsi la fonction $f(r, \theta)$ peut être interpolée en tout point θ .

Il existe aussi un certain nombre de méthodes de reconstructions itératives. Ces méthodes consistent en différentes variantes des méthodes itératives de Gerchberg-Papoulis, et imposent une contrainte sur la fonction à reconstruire qui est supposée à spectre ou à support limité.

Les inconvénients majeurs de ces méthodes sont:

- la nature itérative de méthodes dont la convergence et la stabilité ne sont pas parfaitement définies ou précisées à l'avance.

- ces méthodes ne prennent en compte ni l'information a priori sur la structure de la représentation des fonctions 2-D ni le bruit de mesure.

Dans le chapitre suivant un certain nombre de résultats de simulations sont présentés qui mettent en évidence ces difficultés.

VI-RESULTATS DE SIMULATION

Dans les exemples présentés, nous nous sommes limités à l'approximation de Born, pour trois types d'objet:

- O1) Un dirac pour mettre en évidence la réponse impulsionnelle du processus de reconstruction et,
- O2) un objet cylindrique pour mettre en évidence sa réponse indicielle (fig. A).

Pour chacun de ces deux objets nous avons calculé le champ diffracté et utilisé les deux méthodes de reconstruction:

- M1) méthode de reconstruction par TF 2-D,
- M2) méthode de reconstruction par rétropropagation.

Nous avons organisé ces résultats pour séparer les effets des différents paramètres sur la qualité de la reconstruction. Dans ces Figures:

- N_p est le Nombre de projections,
- L est la longueur de la ligne de mesure.

Effet de la longueur de la ligne de mesure (fig. B et C)

- Méthode M1, $N_p = \infty$.
- B) résultats de reconstruction avec $L = 8$.
- C) résultats de reconstruction pour $L = 16$.

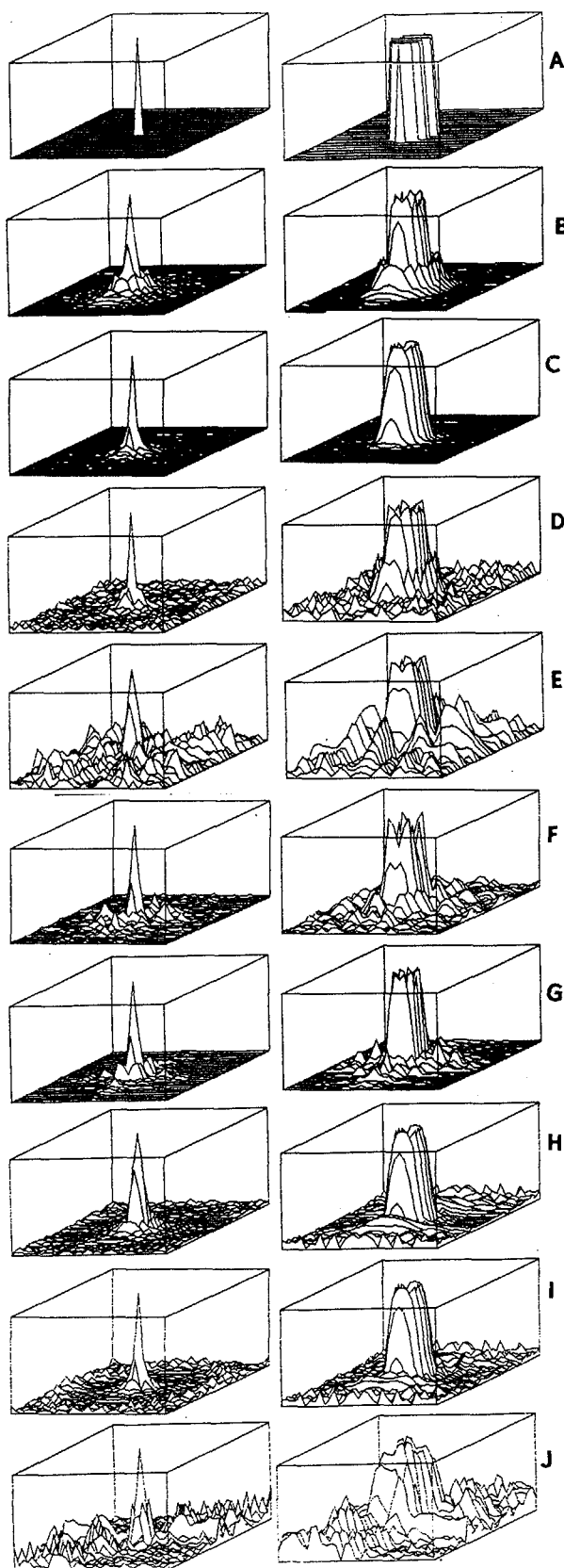
Effet du nombre de projections (fig. C, D et E)

- Méthode M1, $L = 16$.
- C) résultats de reconstruction avec $N_p = \infty$.
- D) résultats de reconstruction avec $N_p = 32$
- E) résultats de reconstruction avec $N_p = 4$



PROBLEMES LIES A LA RECONSTRUCTION D'IMAGES PAR TOMOGRAPHIE
MICROONDE ET ULTRASONORE

Deuxième partie: Limitations théoriques et pratiques des algorithmes utilisés.



Comparaison entre les deux méthodes (fig. H,I et J)

Méthode M2 (retropropagation)

H) $L=8$, $N_p=32$ (à comparer avec B)

I) $L=16$, $N_p=32$ (à comparer avec C)

J) $L=16$, $N_p=4$ (à comparer avec D)

Les résultats de simulation confirment les conclusions qui se dégagent de la comparaison des principes des méthodes de reconstruction existantes.

i) Dans des conditions idéales, c'est à dire un nombre de projections très grand, une longueur des lignes de mesure très grande, et des mesures sans bruit, les deux méthodes de reconstruction 1 et 2 fournissent des résultats identiques et de bonne qualité.

ii) Le choix de l'interpolation doit être fait à partir des connaissances a priori sur la fonction à reconstruire.

iii) Dans des conditions défavorables, c'est à dire un nombre de projections faible ou restreint à un angle limité, une longueur de la ligne de mesure réduite, il est difficile de comparer ces méthodes. Il est d'ailleurs très difficile de faire confiance aux résultats alors obtenus car le choix des paramètres de l'interpolation joue un rôle important dans les résultats et ce choix ne peut être fait que d'une façon empirique.

VII-PERSPECTIVES

Dans une situation défavorable (limitation du nombre de vues, du nombre de points de mesure, de l'étendue du segment de mesure), le principal défaut des méthodes exposées tient dans les hypothèses a priori faites sur l'objet. Quand elles ne sont pas implicites (interpolation), elles sont faites plus par commodité que par conviction. La situation est en fait celle où les données observées sont largement insuffisantes pour déterminer la solution. Il nous semble que l'on gagnerait à reconnaître cette situation et à l'affronter avec des méthodes d'inférence plus cohérentes.

Le principe du maximum d'entropie (ME), nous semble un bon candidat pour développer une méthode de reconstruction d'images à partir de données incomplètes et bruitées.

L'utilisation de ce principe repose sur l'assignation d'une mesure d'entropie pour caractériser le caractère incertain ou aléatoire de l'objet dans son environnement statistique. Chaque mesure effectuée ou chaque élément d'une information a priori, en supposant qu'ils soient sans contradiction entre eux, diminue le caractère aléatoire et les degrés de liberté du problème. Si les données sont insuffisantes pour éliminer tout le caractère incertain des paramètres à estimer, ce principe garantit que la solution fournie n'est que le reflet de la description incomplète du problème, c'est à dire que l'on ne va pas ajouter d'information où il n'y en a pas.

Il existe deux types d'entropie d'une image. Kikuchi et Soffer [10] ont montré, par une approche quantique, qu'il s'agissait en fait de deux approximations différentes d'une même mesure

Effet du choix de l'interpolation (fig. E,F et G)

Méthode M1, $N_p=4$ et $L=16$.

E) Interpolation d'ordre zéro (voisin le plus proche).

F) Interpolation d'ordre un en limitant le domaine de l'interpolateur à la longueur du lobe principal.

G) Interpolation d'ordre un en limitant le domaine de l'interpolateur à 4 fois la longueur du lobe principal.



PROBLEMES LIES A LA RECONSTRUCTION D'IMAGES PAR TOMOGRAPHIE
MICROONDE ET ULTRASONORE

Deuxième partie: Limitations théoriques et pratiques des
algorithmes utilisés.

d'information, correspondant à des situations physiques différentes. Pour un problème de tomographie à onde diffractée, nous choisissons de définir l'entropie de l'objet par:

$$H = - \iint \log f(x,y) dx dy \quad (28)$$

Si dans un premier temps, on fait abstraction des difficultés liées au passage du domaine des mesures au domaine de Fourier, le problème de reconstruction peut se formuler ainsi: estimer au mieux $f(x,y)$ connaissant un nombre fini d'échantillons de sa TF 2-D. Une reconstruction à ME pourrait donc être définie comme le problème d'optimisation suivant:

$$\text{Maximiser } H(f) = - \iint \log f(x,y) dx dy \text{ sous les contraintes}$$

$$f(x,y) \exp[-j(ux+vy)] dx dy = m_i \quad i=1, \dots, M \text{ et,}$$

$$f(x,y) > 0 \quad \text{si } (x,y) \in D$$

Il n'existe pas de solution explicite à ce problème et l'existence de la solution n'est pas toujours assurée. De plus, on ne tient pas compte du bruit sur les observations.

Une façon plus générale consisterait à supposer que les données mesurées sont reliées à l'objet à reconstruire f par

$$m_i = \sum_{n=1}^N A_{in} f_n + b_i \quad i=1, \dots, M \text{ ou bien, sous forme matricielle}$$

$m = Af + b$ où b_i sont des termes de bruit avec une distribution gaussienne $N(0, \sigma_i^2)$.

Pour tenir compte du bruit et pour éviter le problème d'optimisation avec contraintes précédent, il est remplacé par le problème d'optimisation sans contrainte suivant

$$\text{Maximiser } J(f) = H(f) - a \sum_{i=1}^M (1/\sigma_i^2) (m_i - \hat{m}_i)^2 \quad (30)$$

où a joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange. La maximisation de J peut être considérée comme un effort pour à la fois maximiser l'entropie et minimiser l'erreur moyenne quadratique résiduelle avec une importance relative donnée par le paramètre a [6,7].

Nous avons utilisé une méthode du gradient conjugué pour résoudre ce problème car on a accès au gradient de $J(f)$. Nous l'avons appliquée au problème de la reconstruction d'images à partir des mesures du champ diffracté, dans les deux situations suivantes:

i) les m_i sont les données obtenues par TFD des mesures du champ diffracté. Dans ce cas les éléments de la matrice A sont:

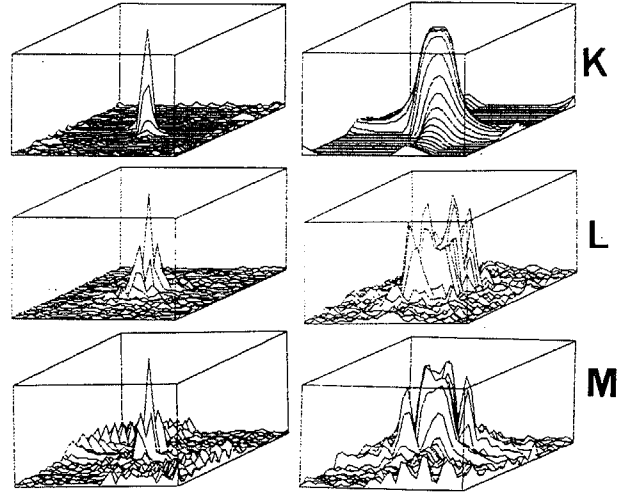
$$A_{in} = \exp[-j(u_i x'_n + v_i y'_n)] \quad (31)$$

ii) les m_i sont directement les données mesurées du champ diffracté. Dans ce cas les éléments de la matrice A sont:

$$A_{in} = \exp[-jk_0(x_0 - x'_n)] G(x_0 - x'_n, y_1 - y'_n) \quad (32)$$

où $G(x,y)$ est la fonction de Green donnée par l'équation (13).

Les figures suivantes montrent des résultats préliminaires obtenus par cette méthode dans un cas difficile où les vues sont non seulement limitées en nombre ($N_p=8$), mais de plus réparties dans un angle limité à 90° . La comparaison entre la reconstruction ME (fig. K) et les reconstructions conventionnelles M1 (fig. L) et M2 (fig. M), effectuées dans les mêmes conditions, montre à l'évidence qu'il s'agit d'une approche à creuser.



X-BIBLIOGRAPHIE

- [1] Pan S.X., Kak A.C., "A Computational Study of Reconstruction Algorithms for Diffraction Tomography : Interpolation Versus Filtered Backpropagation." IEEE Trans., vol. ASSP-31, pp:1262-1275, 1983.
- [2] Soumekh M., Kaveh M., "Image reconstruction from frequency domain data on arbitrary contours." Proc. of IEEE, ICASP 84, pp:12A.2.1,12A.2.4, 1984.
- [3] Devaney A.J., "A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography." Ultrasonic Imaging, Vol. 4, pp:336-350, 1982.
- [4] Slaney M., Kak A.C., Larsen L.E., "Limitations of the Imaging with First-Order Diffraction Tomography." IEEE Trans., vol. MIT-32, pp:860-874, 1984.
- [5] Minerbo G., "Ment : A maximum entropy algorithm for reconstructing a source from projection data." Comput. Graph. Image Process., vol. 10, pp:48.68, 1979.
- [6] Wernecke S.J., D'Addario L.R., "Maximum Entropy Image Reconstruction." IEEE Trans., vol. C-26, pp:351-364, 1977
- [7] Mohammad-Djafari A., Demoment G., "Problèmes liés à la reconstruction d'images par tomographie microonde et ultrasonore." Rapport interne du LSS, Janvier 1985.
- [8] Pichot ch., Jofre L., Peronnet G., Bolomey J., "Active Microwave Imaging of Inhomogeneous bodies." à paraître dans IEEE Trans., Vol. AP, April 1985.
- [9] Wilkins S.W., Varghese J.N., and Lehmann M.S., "Statistical geometry." Acta Cryst., vol. A39, pp:47-60, 1983.
- [10] Kikuchi R., and Soffer B.H., "Maximum entropy image restoration I. The entropy expression." J. Opt. Soc. Am., vol. 67, pp:1656-1665, 1977
- [11] Sanz J.L.C., "On the Reconstruction of Band-limited Multidimensional Signals from Algebraic Sampling Contours." IBM Research Report, RJ 4351 (47429), 1984.
- [12] Kaveh M., Soumekh M., and Greenleaf J.F., "Signal Processing for Diffraction Tomography." IEEE trans., Vol. SU-31, pp:230-239, 1984.
- [13] Nahamoo D., Pan S.X., and Kak A.C., "Synthetic Aperture Diffraction Tomography and its Interpolation-Free Computer Implementation." IEEE Trans., Vol. SU-31, pp:218-229, 1984.