

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

ETUDE D'UN OPERATEUR DE CALCUL MATRICIEL MULTIPLE A STRUCTURE SYSTOLIQUE  
POUR LA RESOLUTION ITERATIVE DE L'EQUATION DE LIAPUNOV DISCRETE.

A. GIULIERI - H. MALKI

L.A.I.A.T. Université de Toulon 83130 LA GARDE

---

## RESUME

La définition d'un opérateur de calcul en temps réel qui résout l'équation de LIAPUNOV discrète de façon itérative, nécessite d'étudier les diverses méthodes d'obtention d'un produit matriciel multiple. Après avoir rappelé les différentes structures systoliques pour le calcul d'un produit matriciel ordinaire on étudie la possibilité de définir une structure pour le double produit matriciel en utilisant l'approche de QUINTON.

Une structure systolique est définie pour calculer un produit matriciel multiple à condition de disposer de cellules dont l'organisation des opérations élémentaires est programmable. Cependant cette structure étant mal adaptée au calcul itératif, l'opérateur de LIAPUNOV sera alors constitué avec une structure systolique permettant le calcul itératif sans réorganisation des données sur les bus.

## SUMMARY

The conception of a real-time calculating operator for the iterative resolution of discrete LIAPUNOV equation requires the various methods of getting a multiple array product to be studied. First the different simple array product systolic architectures are reminded, then the possibility of defining an architecture for matricial product using QUINTON wiew, is considered.

A systolic architecture is defined for multiple array product if the elementary operation sequency can be programmable. Yet as this structure is not well adapted to iterative computing, a conventionnal cascadable systolic structure constitutes the LIAPUNOV iterative operator, in which the data are not reorganized on different buses.



ETUDE D'UN OPERATEUR DE CALCUL MATRICIEL MULTIPLE A STRUCTURE SYSTOLIQUE POUR LA  
RESOLUTION ITERATIVE DE L'EQUATION DE LIAPUNOV DISCRETE.

### Introduction

La résolution itérative d'une équation de LIAPUNOV nécessite d'effectuer un produit matriciel multiple. Aussi on cherchera à définir une structure systolique qui réalise cette fonction. Cependant la nécessité d'effectuer deux calculs matriciels en parallèle et de façon itérative feront choisir une structure cascadable. Dans ce qui suit les exemples utiliseront des matrices d'ordre 3.

#### 1. Produit matriciel simple.

Différentes structures pour la multiplication matricielle ont été proposées par de nombreux auteurs. Nous rappelons à titre comparatif les différentes formes obtenues en utilisant l'approche proposée par QUINTON.

La multiplication de deux matrices A et B de dimension  $N \times N$  telle que  $C = A \times B$  se fait en calculant les coefficients

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj}$$

Dans une première étape, il faut définir le graphe de dépendance D en fonction de l'évolution des indices  $i, j, k$  et donc déterminer les équations récurrentes. Les coefficients  $a_{ik}, b_{kj}, c_{ij}$  étant indépendants respectivement de  $j, i$ , et  $k$ , la propagation de ces coefficients se fera alors de la façon suivante :

$$\begin{cases} c(i, j, k) = c(i, j, k-1) + a(i, j-1, k) \cdot b(i-1, j, k) \\ a(i, j, k) = a(i, j-1, k) \\ b(i, j, k) = b(i-1, j, k) \end{cases}$$

Le domaine de calcul est le cube défini par

$$D = \{i, j, k \mid 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq N\}$$

Les vecteurs de dépendances sont :

$$\begin{cases} \theta_a = (0, -1, 0)^T \\ \theta_b = (-1, 0, 0)^T \\ \theta_c = (0, 0, -1)^T \end{cases}$$

Les différentes structures sont alors obtenues à l'aide des projections (tableau 1.1) :

$\pi = (0, 0, 1)$  ou  $(0, 1, 0)$  ou  $(1, 0, 0)$   
projections selon les axes  $k, j, i$ .

$\pi = (0, 1, 1)$  ou  $(1, 0, 1)$  ou  $(1, 1, 0)$   
projections selon les bissectrices des plans  $(j, k), (i, k)$  et  $(i, j)$ .

$\pi = (1, 1, 1)$  projection selon la bissectrice du trièdre  $(i, j, k)$ .

Type d'opérateur	cubique	carré	mixte	hexagonal
Projections		(0,0,1) (0,1,0) (1,0,0)	(0,1,1) (1,0,1) (1,1,0)	(1,1,1)
Nombre de cellules	$n^3$	$n^2$	$2n^2 - n$	$3n^2 - 3n + 1$
Nombre de ports d'entrée	$2n^2$	$2n$ ou $n + n$ registres	$2n$ ou $3n - 1$	$4n - 2$
Nombre de ports de sortie	$n^2$	$n$ registres ou $n$	$2n - 1$ ou $n$	$2n - 1$
Temps de calcul d'une matrice (transit) T = temps transit d'une cellule	$nT$	$nT$	$(2n - 1)T$	$(2n - 1)T$
Cascadable	oui	non sauf cas particulier	difficilement	oui

Tableau 1.1 Comparaison des différentes formes de réseau systolique pour le calcul du produit de matrices  $n \times n$ .



ETUDE D'UN OPERATEUR DE CALCUL MATRICIEL MULTIPLE A STRUCTURE SYSTOLIQUE POUR LA  
RESOLUTION ITERATIVE DE L'EQUATION DE LIAPUNOV DISCRETE.

## 2. Double produit matriciel

Le double produit matriciel  $D = A \cdot B \cdot C$  se fait à l'aide des équations

$$f_{ik} = \sum_{l=1}^N a_{il} b_{lk} \quad (F = A \cdot B)$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^N f_{ik} c_{kj}$$

et donc

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

il vient alors les équations suivantes

$$\begin{aligned} a(i,j,k,1) &= a(i,j,k-1,1) \\ b(i,j,k,1) &= b(i-1,j,k,1) \\ c(i,j,k,1) &= c(i-1,j,k,1) \\ f(i,j,k,1) &= f(i,j-1,k,1) + a(i,j,k-1,1) \cdot b(i-1,j,k,1) \\ d(i,j,k,1) &= d(i,j,k-1,1) + f(i,j-1,k,1) \cdot c(i-1,j,k,1) \end{aligned}$$

Les paramètres  $a$  et  $d$  ainsi que  $b$  et  $c$  se propagent suivant la même direction, ce qui est possible puisqu'ils sont introduits dans des cellules différentes.

Le domaine de calcul est alors constitué de deux cubes qui ont une face commune.

Les vecteurs de dépendance sont :

$$\begin{aligned} \theta_a &= (0, 0, -1, 0)^T \\ \theta_b &= (-1, 0, 0, 0)^T \\ \theta_c &= (-1, 0, 0, 0)^T \\ \theta_d &= (0, 0, -1, 0)^T \\ \theta_f &= (0, -1, 0, 0)^T \end{aligned}$$

Les différentes projections appliquées permettent alors de définir :

- Soit des structures correspondant à la mise en cascade de deux opérateurs de produits simples.

- Soit des montages particuliers plus complexes tel que celui de la figure 2.1 où le sens de propagation des données et l'ordre des opérations élémentaires de chaque cellule changent au cours du calcul des coefficients. En effet, pendant la première moitié des calculs, les coefficients  $a$  se propagent verticalement, les  $b$  restent à l'intérieur de chaque cellule et les coefficients  $f = f + ab$  se propagent horizontalement. Durant la seconde moitié des calculs, les  $b$  sont remplacés par les  $c$  et les résultats  $d = d + fc$  se propagent verticalement.

Ce montage présente l'avantage de pouvoir réaliser le produit d'un nombre important de matrices de mêmes dimensions dans la mesure où il est possible d'intervertir le branchement des entrées et des sorties de chaque cellule de calcul après chaque produit matriciel tout en gardant le même ordonnancement des données sur les bus.

Pour les calculs itératifs, cette structure n'est cependant pas optimale, et il sera préféré une solution utilisant un opérateur de produit matriciel simple cascable.

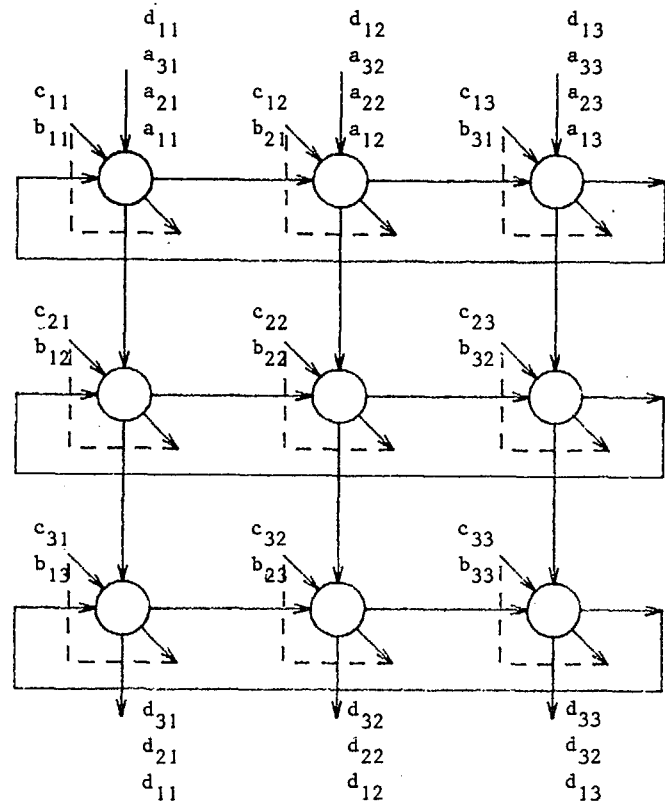


Figure 2.1 Opérateur de double produit matriciel

## 3. Détermination de la structure de l'opérateur de LIAPUNOV

Compte tenu des études algorithmiques précédentes, l'équation de LIAPUNOV discrète est résolue par l'équation récursive à convergence quadratique :

$$P_{2k+1} = (\phi^{2k}) P_{2k} (\phi^{2k})^T + P_{2k} \quad \text{avec} \quad P_0 = Q$$

Cette équation peut se décomposer en deux équations pour mettre en évidence le parallélisme de calcul :

$$P_{k+1} = \phi_k P_k \phi_k^T + P_k$$

$$\phi_{k+1} = \phi_k \phi_k$$

Les équations récurrentes sont alors :

$$(1) \quad u_{1,k} = u_{2,k-1} \cdot u_{1,k-1} \cdot u_{2,k-1}^T + u_{1,k-1}$$

$$(2) \quad u_{2,k} = u_{2,k-1} \cdot u_{2,k-1}$$

Le domaine de dépendance (figure 3.1) est constitué de deux segments de droites parallèles  $\{k \mid 1 < k < K\}$  où  $K$  est fixé par le critère de convergence. On associe une cellule ronde à l'équation 1 et une cellule carrée à l'équation 2 pour représenter le domaine de dépendance.

Pour définir la fonction de temps, on fait l'hypothèse que le calcul de  $u_{1,k}$  et celui de  $u_{2,k}$  occupent le même temps, hypothèse qui peut toujours être réalisée en ajoutant une cellule de retard.

Une projection possible est alors celle le long de l'axe  $k$ .



ETUDE D'UN OPERATEUR DE CALCUL MATRICIEL MULTIPLE A STRUCTURE SYSTOLIQUE POUR LA RESOLUTION ITERATIVE DE L'EQUATION DE LIAPUNOV DISCRETE.

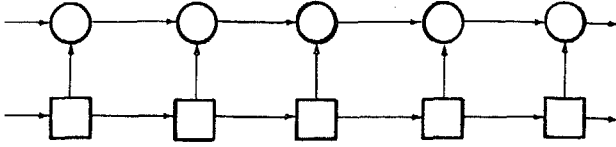


Figure 3.1 Domaine de calcul de l'équation de LIAPUNOV accéléré.

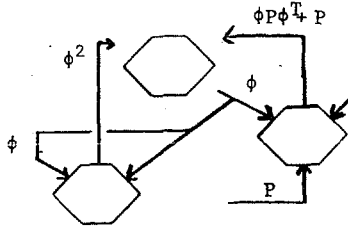


Figure 3.3 Principe de fonctionnement de l'opérateur de LIAPUNOV accéléré.

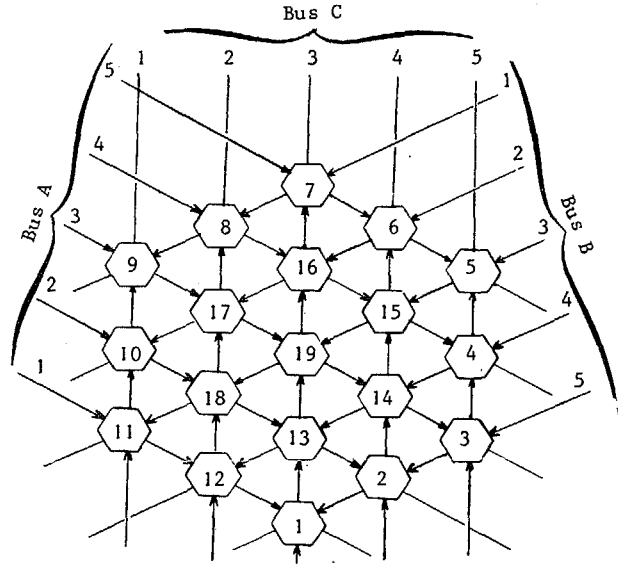


figure 3.2 - Définition des bus et numérotation des cellules correspondant au tableau 3.4

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
ENTRÉES	1				a13									
	2			a12		a23								
	3	a11		a22		a33								
	4		a21		a32									
	5			a31										
	BUS	1				b13								
		2		b12		b23								
		3	b11		b22		b33							
		4		b21		b32								
		5			b31									
	DE	1				c13								
		2		c12		c23								
		3	c11		c22		c33							
		4		c21		c32								
		5			c31									
DONNÉES SORTIES	1					a13								
	2				a12		a23							
	3	a3			a11		a22		a33					
	4		a21			a32								
	5			a31										
DES OCCUPATIONS	1	X		X		X		X		X		X		
	2		X		X		X		X		X		X	
	3	X		X		X		X		X		X		
	4		X		X		X		X		X		X	
	5	X		X		X		X		X		X		
6		X		X		X		X		X		X		
7			X		X		X		X		X		X	
8		X		X		X		X		X		X		
9	X		X		X		X		X		X		X	
10		X		X		X		X		X		X		
11			X		X		X		X		X		X	
12		X		X		X		X		X		X		
13			X		X		X		X		X		X	
14		X		X		X		X		X		X		
15	X		X		X		X		X		X		X	
16		X		X		X		X		X		X		
17			X		X		X		X		X		X	
18		X		X		X		X		X		X		
19			X		X		X		X		X		X	

Figure 3.4 Distribution des données et occupation des cellules d'un produit matriciel hexagonal.

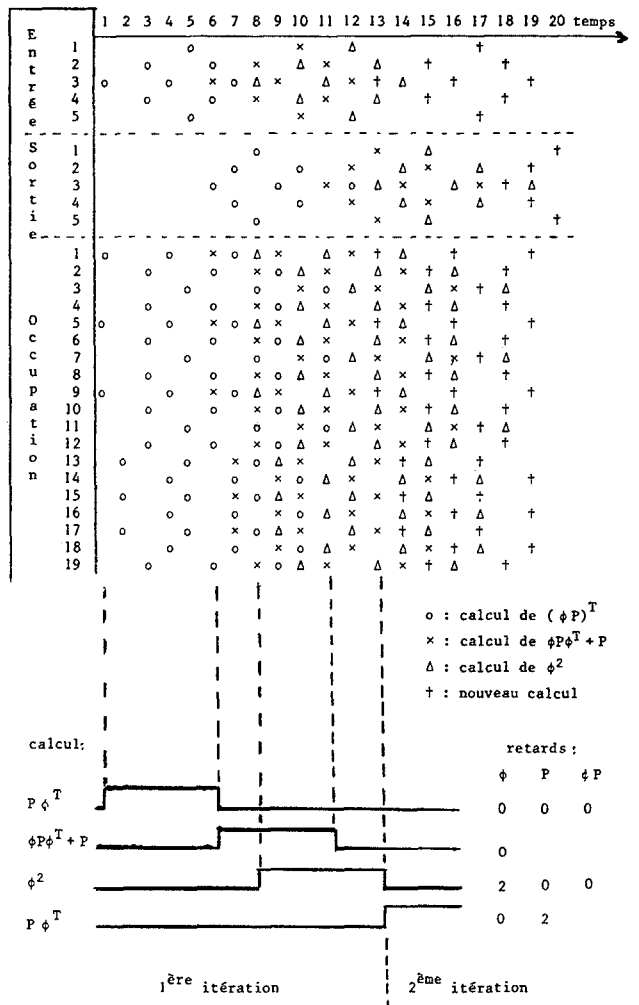


Figure 3.5 Distribution des données et occupation des cellules de l'opérateur de LIAPUNOV accéléré.



ETUDE D'UN OPERATEUR DE CALCUL MATRICIEL MULTIPLE A STRUCTURE SYSTOLIQUE POUR LA  
RESOLUTION ITERATIVE DE L'EQUATION DE LIAPUNOV DISCRETE.

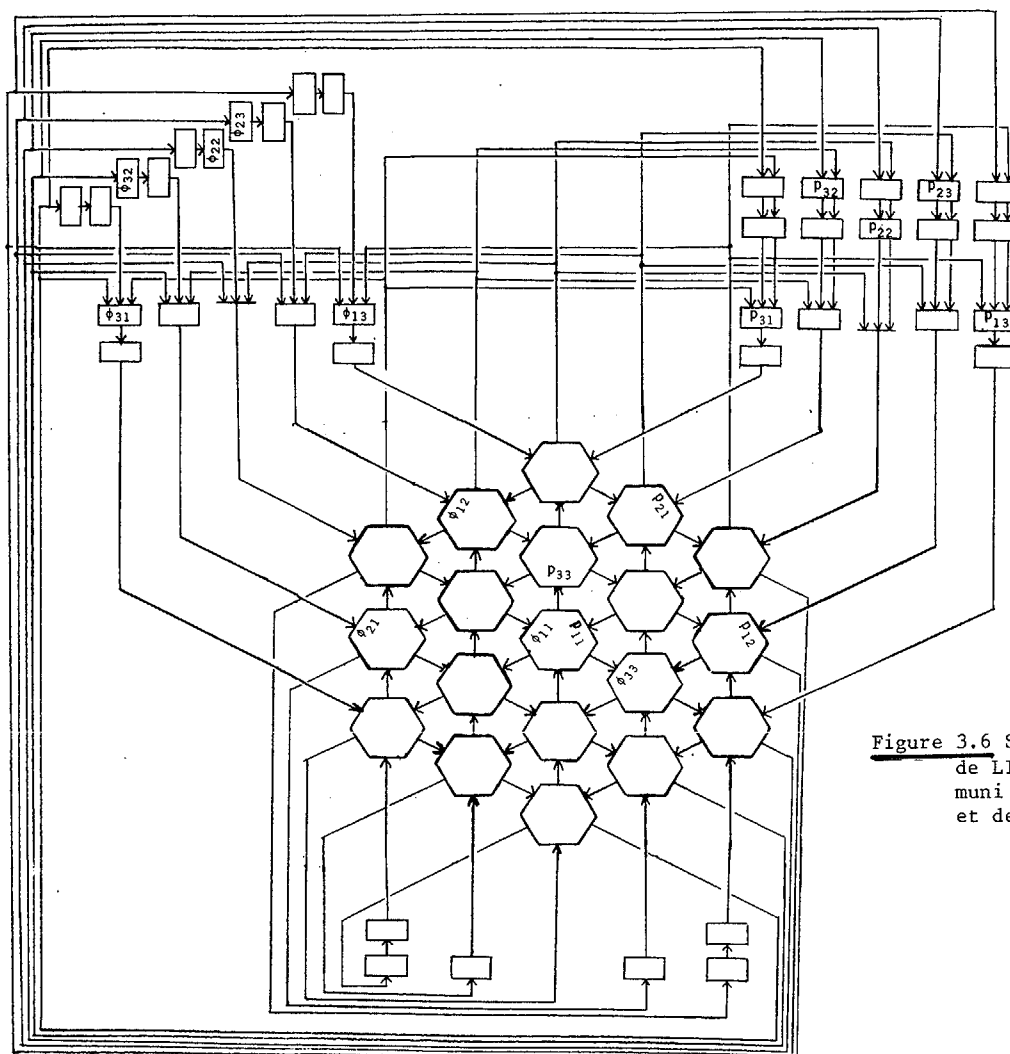


Figure 3.6 Structure de l'opérateur de LIAPUNOV accéléré d'ordre 3 muni de ses registres de retard et de ses multiplexeurs.

La réalisation de la cellule exécutant le calcul de l'équation 1 se fait avec deux cellules hexagonales qui travaillent à tour de rôle alors que le calcul de l'équation 2 nécessite une cellule hexagonale et une cellule de retard. Pour réaliser ce retard, il est alors possible d'utiliser la cellule hexagonale inutilisée par la cellule de l'équation 1, ce qui donne alors la forme de l'opérateur de LIAPUNOV accéléré de la figure 3.3 sur laquelle a été précisé son fonctionnement.

Le choix de la cellule de produit matriciel de forme hexagonale (figure 3.2) est justifié par la possibilité de cascader ce type de cellule sans précaution compte tenu de la propagation des données qui conservent leur ordonnancement pendant tous les calculs.

Une étude plus approfondie nous amène à préciser la distribution des données sur les différents bus ainsi qu'à déterminer le fonctionnement des cellules dans le temps (figure 3.4) pour une cellule de structure hexagonale. On constate alors que le bus de données et les cellules élémentaires travaillent au tiers de leurs possibilités, c'est-à-dire qu'il est possible d'exécuter trois produits matriciels diffé-

rents dans la même cellule hexagonale (figure 3.5). L'opérateur de LIAPUNOV se réduit alors à 19 cellules élémentaires, de deux ensembles de cellules de retard sur les sorties de  $\phi$  et de  $P$ , et de trois sélecteurs. Ces derniers permettent de choisir sur les bus d'entrée soit les matrices  $\phi$  et  $P$  qui interviennent dans le calcul d'une itération, soit la matrice  $\phi$  qu'il faut élever au carré pour l'itération suivante. De plus ces sélecteurs évitent les circulations parasites des matrices et empêchent en conséquence des conflits sur les bus (figure 3.6).

Il est à noter que l'avantage obtenu en minimisant le nombre de cellules élémentaires à 19 est compensé par deux temps de calcul supplémentaires par itérations.

#### Conclusion

Il a été défini une structure systolique permettant de calculer plusieurs produits matriciels à condition de disposer de cellules élémentaires de calcul dont on peut programmer l'organisation des opérations. Cependant cette structure désorganise l'ordre des coefficients de la matrice résultat et donc est difficilement utilisable pour du calcul itératif.



ETUDE D'UN OPERATEUR DE CALCUL MATRICIEL MULTIPLE A STRUCTURE SYSTOLIQUE POUR LA  
RESOLUTION ITERATIVE DE L'EQUATION DE LIAPUNOV DISCRETE.

BIBLIOGRAPHIE

- ( 1 ) H.M. AHMED, J.M. DELOSME, M. MORF - "Highly Concurrent Computing Structures for Matrix Arithmetic and Signal Processing".  
Janvier 1982
- ( 2 ) F. ANDRE, P. FRISON, P. QUINTON - "Algorithmes systoliques : de la théorie à la pratique". L'onde électrique vol. 64 n° 6.  
Novembre-Décembre 1984
- ( 3 ) J.P. BANATRE, P. FRISON, P. QUINTON - "A Systolic Algorithm for Connected Word Recognition". IEEE p. 1243-1245. 1982
- ( 4 ) G.M. BAUDET, F.P. PREPARATA, J.E. VUILLEMIN - "Area-time optimal VLSI circuits for convolution". Rapport INRIA n° 30. Août 1980
- ( 5 ) C. BOZZO - "Analyse des différentes architectures envisageables pour un dispositif de traitement rapide - Critère de choix d'une classe d'architecture". 9ème colloque GRETSI Nice Mai 1983
- ( 6 ) G. BRUN, D. MOUSSEGT, A. VINCENT CARREFOUR - "Réalisation matérielle et logicielle d'un système de traitement du signal. Applications : calcul de FFT, résolution de l'équation de RICCATI". GRETSI 8ème colloque sur le traitement du signal et ses applications Nice Juin 1981
- ( 7 ) S. EVANCZUK - "Researchers pump up Systolic Approach". Electronics Juin 1982
- ( 8 ) A.L. FISCHER - "Systolic Algorithms for Running Order Statistics in signal and image processing". Rapport CMU-CS-81-130  
Juillet 1981
- ( 9 ) M.J. FOSTER, H.T. KUNG - "Recognize Regular Languages with Programmable Building Blocks". Rapport CMU-CS-81-126 Juin 1981
- (10) A. GIULIERI, G. NOLIBE - "Etude et réalisation d'opérateurs spécialisés multifonction et application aux réseaux systoliques". Rapport interne LAIAT 83-628 Juin 1983
- (11) A. GIULIERI, J. ALMAHNA - Rapport final convention DRET 79/659 Juin 1982
- (12) A. GIULIERI - "Etude théorique de l'équation de RICCATI discrète et implantation d'algorithmes de calcul du gain de KALMAN sur différents processeurs". GRETSI 9ème colloque sur le traitement du signal et ses applications Nice Mai 1983
- (13) A. GIULIERI - "Etude d'un opérateur de RICCATI rapide (ORR) en vue d'applications à des problèmes d'identification en temps réel". Thèse de doctorat d'Etat Nice Mai 1984
- (14) L.S. HAYNES, R.L. LAU, D.P. SIEWORZK, D.W. MIZELL - "A survey of Highly Parallel Computing". Computer p. 2-24 Janvier 1982
- (15) H.T. KUNG - "Special purpose Devices for Signal and Image Processing - An opportunity for VLSI". Rapport CMU-CS-80-132 Juillet 1982
- (16) H.T. KUNG, S.W. SONG - "A systolic 2-D. Convolution Chip". Rapport CMU-CS-81-110  
Mars 1981
- (17) H.T. KUNG - "Why Systolic Architecture". IEEE Computer p. 37-46 Janvier 1982
- (18) S.Y. KUNG, K.S. ARUN, R.J. GAL-EZER, D.V. BHASHAR.RAO - "Wavefront Array Processor : Language, Architecture and Applications". IEEE trans on Computer Vol. C 31 n° 11  
Novembre 1982
- (19) A.V. KULKARNI, D.W.L. YEN - "Systolic Processing and an Implementation for Signal and Image Processing". IEEE trans on Computers Vol. C 31 n° 10 p. 1000-1009 Octobre 1982
- (20) C.H. LEIVERSON - "Area-efficient VLSI Computation". Rapport CMU-CS-82-108 Octobre 1981
- (21) H. MALKI - "Etude des réseaux systoliques pour des applications de calcul matriciel en temps réel". Rapport DEA Marseille Juin 1984
- (22) D.I. MOLDOVAN - "On the Analysis on Synthesis of VLSI Algorithms". IEEE trans on Computers Vol. C 31 n° 11 p. 1121-1126 Novembre 1982
- (23) P. QUINTON - "The Systematic Design of Systolic Array". Publication interne IRISA n° 193  
Avril 1983
- (24) L. SNYDER - "Overview of the Chip Computer". VLSI 81 p. 237-246 Academic Press 1981
- (25) L. SNYDER - "Introduction to the Configurable Highly Parallel Computer". IEEE p. 47-56  
Janvier 1982