



IDENTIFICATION DE CHIRPS PAR FILTRAGE DE KALMAN ETENDU

J.M. PIASCO, M. GUGLIELMI, L. DUROU

Ecole Centrale de Nantes / Université de Nantes
Laboratoire d'Automatique de Nantes Unité associée au C.N.R.S. n°823
1 rue de la Noë, 44072 NANTES Cedex 03
Membres du GR TDSI

RESUME :

On s'intéresse, ici, à la caractérisation d'une stridulation (chirp). Il est possible d'obtenir directement un modèle différentiel non-stationnaire à 2 états.

On transforme l'identification des paramètres inconnus α et ω_0 en un problème d'estimation de l'état étendu (état + paramètres). Le passage à une représentation d'état stationnaire (mais non linéaire) du quatrième ordre est quasi-immédiat. Un modèle d'évolution discret, exact, stationnaire et non linéaire en est dérivé. Les paramètres sont obtenus par filtrage de KALMAN étendu. On propose alors d'améliorer le résultat en effectuant un filtrage "retour" afin d'améliorer la variance de l'erreur d'estimation de certains paramètres. La méthode peut être très facilement étendue à des signaux composites. Enfin, des résultats, en simulation, sont présentés sur des exemples tests: signaux TSII du GR TDSI du C.N.R.S.

I. INTRODUCTION :

Les stridulations (chirps) sont des signaux largement répandus en physique, plus particulièrement là où l'effet Doppler s'applique [1]. La connaissance des paramètres du chirp permettent de remonter aux caractéristiques cinématiques de la source.

Dès lors que le signal mesuré est entaché d'un bruit de mesure, il est indispensable de faire appel, pour identifier les paramètres, à des techniques d'estimation dont l'efficacité dépend en partie de la modélisation du problème ainsi que de l'algorithme d'estimation choisi. De nombreuses études ont été réalisées à ce sujet : transformation du bruit de mesure en un bruit de phase sur lequel on applique une méthode des moindres-carrés récurrents [2], utilisation de LMS, RLS [3].

Nous proposons, ici, une modélisation originale du chirp sous la forme d'un modèle d'état de dimension 2. A partir de l'équation différentielle linéaire mais non stationnaire, il est possible d'établir directement un modèle d'état dont l'équation dynamique peut être discrétisée exactement. On suppose que le signal mesuré est entaché d'un bruit de mesure additif.

ABSTRACT :

This paper deals with the identification of the parameters of chirps. A differential linear equation of a model is easily designed but the 2-dimension equation is a non stationary one. It is possible to transform this model to a non linear one, for which the discrete-time dynamical equation is exact.

The identification problem is the transformed in the estimation of the extended state (state + parameters). The optimal estimation is designed by the means of the classical KALMAN filtering method. We propose, here, a modification of this algorithm by using a "back" filter such as the variances of some parameters are improved.

This method can be directly enlarged to multi component chirps. At last, we present some results getting from the TSII signal of the GR TDSI bank.

Le problème de l'identification des paramètres du chirp (phase, amplitude...) est alors ramené au problème d'estimation d'un état étendu composé de l'état proprement dit (dimension 2) auquel s'ajoutent 2 paramètres, les autres s'en déduisant algébriquement. L'estimation de cet état étendu est obtenue par la mise en œuvre d'un filtre de KALMAN étendu.

La variance de certains paramètres est fonction pas forcément décroissante du temps, ce qui peut nuire à la qualité des résultats obtenus par ce filtrage. Nous proposons d'améliorer ce résultat par un filtrage "retour" car il est possible d'écrire une équation d'état à rebours de même structure que le modèle direct : l'initialisation du filtre "retour" se faisant à partir des estimations finales de l'aller. Ceci est d'autant plus efficace que le rapport signal/bruit est important.

L'article est organisé comme suit : après avoir présenté l'équation différentielle linéaire non-stationnaire modélisant un chirp, nous développons le modèle d'état discret obtenu exactement grâce à l'utilisation de la matrice fondamentale du système exprimable algébriquement (paragraphe 2). Puis (paragraphe 3), après avoir ramené le problème de l'identification paramétrique à celui de l'estimation de l'état étendu nous présentons l'algorithme dérivé



de l'utilisation du filtrage de KALMAN étendu auquel on adjoint l'estimation des autres paramètres qui dépendent de cet état étendu. On y présente aussi le principe du filtrage "retour". Le paragraphe 4 est consacré à l'analyse des premiers résultats obtenus, en simulation, sur un chirp issu de la banque des signaux tests du GR TDSI.

II. MODELISATION :

Soit le signal décrit par :

$$y(t) = A \sin[(1/2\alpha t + \omega_0)t + \Phi] \quad (\text{II.1})$$

où : A = amplitude (constante)

$\theta(t) = (1/2\alpha t + \omega_0)t + \Phi$ est la phase

et $\dot{\theta}(t) = \alpha t + \omega_0$ la pulsation instantanée.

Il est facile de montrer que $y(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire non-stationnaire :

$$\ddot{y} - \alpha / (\alpha t + \omega_0) \dot{y} + (\alpha t + \omega_0)^2 y = 0 \quad (\text{II.2})$$

avec $y(0) = A \sin \Phi$ et $\dot{y}(0) = A \omega_0 \sin \Phi$ comme conditions initiales.

Parmi tous les modèles d'état possibles, on choisit de représenter le signal (II.1) à partir de l'état de dimension 4 suivant : $x(t) = [y, \dot{y}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}]^T$

Il est quasi évident de relier les composantes de x aux paramètres du chirp α, ω_0 et Φ par :

$$A = \frac{y^2 + \dot{y}^2}{\dot{\theta}^2}, \quad \alpha = \ddot{\theta}, \quad \omega_0 = \dot{\theta} - t \ddot{\theta}$$

$$\Phi = \text{Arctg}\left(\frac{y \dot{\theta}}{\dot{y}}\right) + \frac{1}{2} t \dot{\theta} - t^2 \ddot{\theta} \pm \lambda \pi$$

A partir de l'équation (II.2) et de l'état x , on obtient le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_3^2 x_1 + x_2 \frac{x_4}{x_3} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

On suppose que le signal, entaché d'un bruit de mesure, est observé à l'instant t_k :

$$y_m(t_k) = y(t_k) + v_k \quad (\text{II.4})$$

avec v_k séquence indépendante, centrée, de variance R connue.

On dispose ainsi d'une équation dynamique continue associée à une équation de mesure discrète sur lesquelles on pourrait mettre en œuvre un filtre d'estimation d'état continu-discret.

Mais on peut établir ici le modèle d'évolution discret équivalent exactement au modèle continu.

II.2 : Discrétisation :

En posant $\tilde{x} = [y, \dot{y}]$, l'équation (II.2) peut être mise sous forme d'état :

$$\dot{\tilde{x}} = A(t) \tilde{x} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dot{\theta}^2 & \ddot{\theta} \\ & \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Les techniques classiques [4] de résolution des systèmes différentiels permettent d'exprimer à partir de la matrice fondamentale du système, la

solution analytique en \tilde{x} . On a :

$$\tilde{x}(t) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0) \tilde{x}(t_0)$$

Ici, [5] les calculs donnent pour $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) \\ -\dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) & \dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

Ce qui donne le modèle discret exact suivant :

$$\tilde{x}(t_{k+1}) = \Psi(t_{k+1}) \Psi^{-1}(t_k) \tilde{x}(t_k)$$

avec :

$$\Psi(t_{k+1}) \Psi^{-1}(t_k) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t_{k+1}) - \theta(t_k)) & \frac{\sin(\theta(t_{k+1}) - \theta(t_k))}{\dot{\theta}(t_k)} \\ -\dot{\theta}(t_k) \sin(\theta(t_{k+1}) - \theta(t_k)) & \frac{\dot{\theta}(t_{k+1})}{\dot{\theta}(t_k)} \cos(\theta(t_{k+1}) - \theta(t_k)) \end{pmatrix}$$

Le lien avec le modèle d'état II.3 est direct:

$$\dot{\theta}(t_k) = x_3(t_k)$$

$$\dot{\theta}(t_{k+1}) = x_3(t_k) + \Delta x_4(t_k)$$

$$\theta(t_{k+1}) - \theta(t_k) = \Delta x_3(t_k) + \frac{1}{2} \Delta^2 x_4(t_k)$$

si Δ est la période d'échantillonnage.

Finalement, l'équation d'évolution discrète est :

$$\begin{aligned} x_1(t_{k+1}) &= x_1(t_k) \cos\{\Delta x_3(t_k) + \frac{1}{2} \Delta^2 x_4(t_k)\} \dots / \dots \\ &\quad + \frac{x_2(t_k)}{x_3(t_k)} \sin\{\Delta x_3(t_k) + \frac{1}{2} \Delta^2 x_4(t_k)\} \\ x_2(t_{k+1}) &= -x_1(t_k) (x_3(t_k) + \Delta x_4(t_k)) \dots / \dots \quad (\text{II.6}) \\ &\quad * \sin\{\Delta x_3(t_k) + \frac{1}{2} \Delta^2 x_4(t_k)\} \dots / \dots \\ &\quad + x_2(t_k) (1 + \Delta \frac{x_4(t_k)}{x_3(t_k)}) \cos\{\Delta x_3(t_k) + \frac{1}{2} \Delta^2 x_4(t_k)\} \end{aligned}$$

$$x_3(t_{k+1}) = x_3(t_k) + \Delta x_4(t_k)$$

$$x_4(t_{k+1}) = x_4(t_k)$$

Il est remarquable de noter que ce modèle discret est obtenu exactement, sans approximation du modèle continu. Ceci est particulièrement intéressant lorsque Δ n'est pas petite devant la période instantanée du signal observé.

III. IDENTIFICATION :

L'estimation de l'état étendu est obtenue par Filtrage de KALMAN étendu [6]. Rappelons que cette technique consiste à linéariser le modèle au 1er ordre et appliquer sur celui-ci un filtre optimal d'estimation d'état. Bien que la convergence globale ne soit pas assurée, cette méthode a été utilisée de nombreuses fois avec succès. Cette méthode permet, en outre, une estimation de la variance des paramètres, grandeur image de la qualité du modèle identifié.

Formellement, le système complet s'écrit:

$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k)) \quad y_m(t_k) = Hx(t_k) + v_k$$

où f est donnée par (II.6) et v_k est une séquence gaussienne, blanche centrée de variance R avec :

$$H = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Le développement de $f(x(t_k))$, en série de TAYLOR, limité au 1er ordre autour de l'estimée courante $\hat{x}_{k/k}$ donne :

$$f(x(t_k)) \simeq f(\hat{x}_{k/k}) + F_x(\hat{x}_{k/k}) (x(t_k) - \hat{x}_{k/k})$$

avec $F_x(\hat{x}_{k/k})$ matrice des dérivées premières de $f(x(t_k))$ par rapport au vecteur $x(t_k)$.

La récurrence du filtre est donc en deux étapes:

* prédiction :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1/k} &= f(\hat{x}_{k/k}) \\ P_{k+1/k} &= F_x(\hat{x}_{k/k}) P_{k/k} F_x^T(\hat{x}_{k/k}) \end{aligned}$$

où $P_{k/k}$ et $P_{k+1/k}$ sont les matrices de variance-covariance de l'erreur d'estimation et de prédiction.

* estimation :

l'équation d'observation étant linéaire, on a :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1/k+1} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_m(t_{k+1}) - H\hat{x}_{k+1/k}) \\ K_{k+1} &= P_{k+1/k} H^T (H P_{k+1/k} H^T + V)^{-1} \\ P_{k+1/k+1} &= P_{k+1/k} - K_{k+1} H P_{k+1/k} \end{aligned}$$

A partir de l'estimation de l'état, on peut obtenir, à chaque étape t_k algébriquement, les estimées des paramètres du chirp, à savoir [7] :

$$\begin{aligned} \text{pour } \omega_{0k} &= W_0 x_k \quad \text{où } W_0 = [0 \ 0 \ 1 \ -\Delta k]^T \\ \text{et } \alpha_k &= \Gamma x_k \quad \Gamma = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \end{aligned}$$

Ces expressions étant linéaires en x , on a :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{0k/k} &= W_0 \hat{x}_{k/k} \\ \text{Var}[\hat{\omega}_{0k/k} - \omega_0] &= W_0 P_{k/k} W_0^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{k/k} &= \Gamma \hat{x}_{k/k} \Gamma^T \\ \text{Var}[\hat{\alpha}_{k/k} - \alpha] &= \Gamma P_{k/k} \Gamma^T \end{aligned}$$

$$\text{Quant à } A = \left\{ x_{1k}^2 + \frac{x_{2k}^2}{x_{3k}} \right\}^{1/2}$$

et $\Phi = \text{Arctg}\left(\frac{x_{1k}x_{3k}}{x_{2k}} - \Delta k x_{3k} + \frac{1}{2}(\Delta k)^2 x_{4k} \pm \lambda \pi\right)$ fonctions non linéaires de x_k , leurs estimations peuvent être approchées par un développement limité au 1er ordre :

$$A(x(t_k)) \simeq A(\hat{x}_{k/k}) + A_x(\hat{x}_{k/k}) (x(t_k) - \hat{x}_{k/k})$$

$$\Phi(x(t_k)) \simeq \Phi(\hat{x}_{k/k}) + \Phi_x(\hat{x}_{k/k}) (x(t_k) - \hat{x}_{k/k})$$

avec A_x et Φ_x gradients de A et Φ par rapport $x(t_k)$. Ceci conduit à l'algorithme d'estimation :

$$\hat{A}_{k/k} = A(\hat{x}_{k/k})$$

$$\text{Var}[\hat{A}_{k/k} - A] = A_x(\hat{x}_{k/k}) P_{k/k} A_x^T(\hat{x}_{k/k})$$

$$\hat{\Phi}_{k/k} = \Phi(\hat{x}_{k/k})$$

$$\text{Var}[\hat{\Phi}_{k/k} - \Phi] = \Phi_x(\hat{x}_{k/k}) P_{k/k} \Phi_x^T(\hat{x}_{k/k})$$

Les variances obtenues pour ces estimateurs sont des fonctions lentement décroissantes du temps, eu égard aux coefficients de W_0 et à l'expression de Φ .

On peut améliorer le résultat en effectuant un filtrage retour du signal. En effet, il est possible d'établir un modèle d'évolution "retour" :

$$x(t_k) = g(x(t_{k+1}))$$

g a structurellement la même forme que la fonction f . [7]

l'équation d'observation étant inchangée :

$$y_m(t_k) = Hx(t_k) + v_k$$

On peut alors mettre en œuvre un filtre de KALMAN "retour" où les initialisations sont les estimations finales du filtre "aller".

IV. RESULTATS :

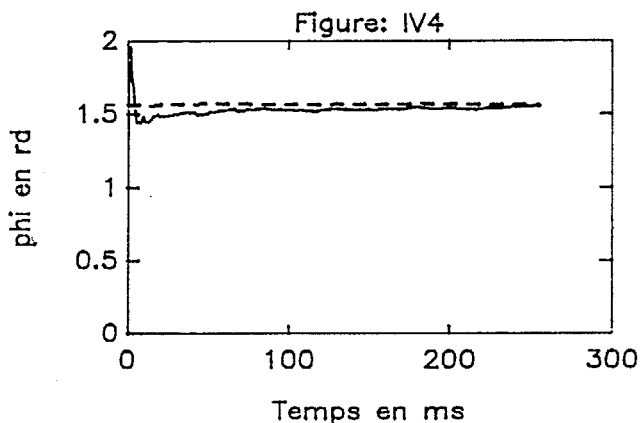
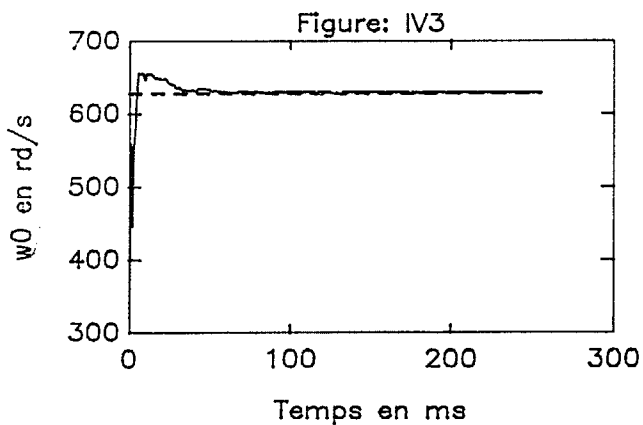
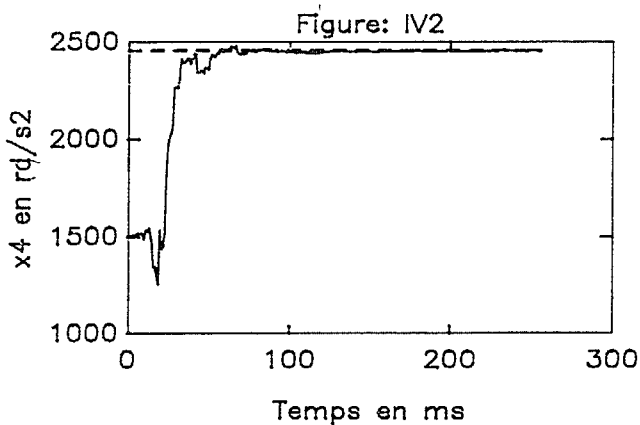
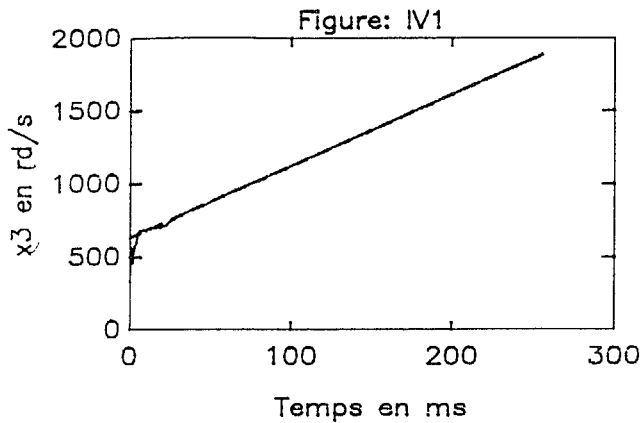
Issu du signal test TS11 du GR TDSI, nous avons choisi le chirp suivant :

$$\omega_0 = 628 \text{ rd/s} \quad \alpha = 2454 \text{ rd/s}^2 \quad A = 1 \quad \text{et } \Phi = \pi/2$$

échantillonné à 1 ms.

La longueur de l'échantillon est de 256 points.

Les figures IV1, IV2, IV3, IV4 pour $R^{1/2} = 0.1$ (SNR 17 db) montrent le comportement typique du filtre "aller/retour" (trait plein -> aller, pointillé -> retour). Celui-ci converge vers les vraies valeurs en moins de 100 points.



Dans[7], les performances en fonction de l'écart-type du bruit de mesure (pour $R^{1/2}$ variant de 0,0707 à 0,707 soit un SNR compris entre 40 db et 0 db) sont présentées. Pour des forts rapports signal/bruit (>10 db), le comportement du filtre est tout à fait satisfaisant. Il converge vers les vraies valeurs quelles que soient les séquences de bruit et quelles que soient les initialisations en une centaine de points. Pour des faibles SNR (entre 8db et 3 db), le filtre converge pour 90% des séquences de bruit. Quand le SNR est très faible entre 3db et 0db, il converge dans 50% des cas. Il faut remarquer que une initialisation assez précise (à 20% des valeurs exactes) permet au filtre de converger dans tous les cas. On obtient dans tous les cas les variances finales des paramètres petites avec une amélioration notable due au filtrage "retour" : en particulier sur Φ .

V. CONCLUSION et PERSPECTIVES:

Après avoir réalisé un grand nombre d'essais tant avec des niveaux de bruit différents que des initialisations variées, on peut tirer les premières conclusions suivantes :

La méthode EKF appliquée à l'identification d'un chirp est très efficace. Elle assure la convergence dans des bonnes conditions (sans biais, variances d'erreur d'estimation faibles, convergence rapide). En particulier, la méthode n'a jamais été mise en défaut pour des $SNR \geq 8$ db.

Au vu de ces premiers résultats, il est envisagé d'étendre cette méthode aux chirps multi-composantes et de tester ces performances (pouvoir de séparation). L'extension de celle-ci est immédiate puisque, pour chaque composante nouvelle, il suffit d'ajouter au modèle d'état quatre nouvelles composantes : l'identification restant la même.

D'autre part, il est possible d'étendre cette méthode à tout signal à phase polynomiale. Le nombre d'états nécessaires est alors de 2 états pour le signal plus n états pour un polynôme d'ordre n .

VI. BIBLIOGRAPHIE :

- [1] A. W. RIHACSEZ : Principles of high resolution radar Peninsula Publishing 1985
- [2] P. M. DURIC, S.M. KAY : Parameter estimation of chirp signals. IEEE ASSP Vo 38 pp 2118-2126 Déc. 1990
- [3] O. MACCHI, N. BERSHAD : Superiority of LMS over RLS tracking a chirped signal. IEEE Colloquium on adaptive filtering 1989
- [4] A. HALANAY : Differential equations Academic Press 1966
- [5] P. PRIEUR : Propriété des systèmes linéaires non-stationnaires : application à l'identification de chirps . D.E.A. Ecole Centrale de NANTES Septembre 1990
- [6] L.LJUNG, T. SODERSTRÖM : Theory and practice of recursive identification M.I.T. Press 1985
- [7] L. DUROU : Identification de chirps par filtrage de KALMAN étendu. D.E.A. Ecole Centrale de NANTES à paraître.