



MÉTHODES DE RECONSTITUTION EN TEMPS RÉEL D'UN SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ DE FAÇON NON PÉRIODIQUE

Othmane BENSAOUD - Jacques OKSMAN

École Supérieure d'Électricité- Service des Mesures
Plateau de Moulon 91192-Gif sur Yvette Cedex

RÉSUMÉ

Nous proposons dans cet article des méthodes de traitement statistique ou d'analyse numérique pour reconstituer en temps réel un signal échantillonné non uniformément. Notre approche est essentiellement basée sur une modélisation du signal à court terme suivie d'une prédiction utilisant le modèle obtenu.

La première partie concerne l'utilisation d'un filtre de Kalman pour une reconstitution à partir d'un modèle donné. La deuxième correspond à des méthodes d'analyse numérique; nous y présentons un algorithme de prédiction-corréction. La troisième partie présente une méthode d'identification des paramètres et de reconstitution d'un signal AR échantillonné non uniformément.

1. PRÉSENTATION

L'échantillonnage non périodique, en dépit de ses difficultés, a depuis longtemps (Cauchy) fait l'objet d'études diverses [1][2][3]. Plusieurs raisons en justifient aujourd'hui l'intérêt. Par exemple, un mauvais fonctionnement des instruments de mesure ou de communication peut entraîner des pertes dans un flux a priori périodique. Un autre cas est celui du transport d'informations "temps réel" sur des réseaux asynchrones. Jusqu'à présent, le cas le plus fréquent était celui des effets de "jitter", décalage par rapport à des instants périodiques.

On est amené à considérer deux cas bien précis d'apparition des signaux à échantillonnage non périodique, auxquels correspondront deux types de traitements. Dans le premier cas, les instants d'échantillonnage sont quelconques, les écarts entre échantillons peuvent prendre leur valeurs dans un ensemble continu. Dans le deuxième, en revanche, il existe une "période d'échantillonnage cachée" et les temps correspondant aux instants d'échantillonnage ne peuvent prendre que des valeurs quantifiées. Nous travaillerons dans ce dernier cas qui correspond par exemple à des signaux subissant des pertes dues à des erreurs de transmission, tandis qu'un exemple de signal à temps continu pourrait être celui d'une modulation Δ . Nous supposons donc que les intervalles de temps d_n ($d_n = t_n - t_{n-1}$) sont des multiples entiers de h et qu'ils sont bornés. Nous avons alors: $d_n = k_n h$, $k_n - 1$ étant le nombre de mesures manquantes entre deux instants d'échantillonnage. Il est sous entendu que le pas de traitement est arbitrairement égal à un.

ABSTRACT

The purpose of this paper is the presentation of methods of signal processing or numerical analysis for the real-time reconstruction of non uniformly sampled signal. Our approach is essentially based on the short term modelling of a signal and its prediction using the obtained model.

This paper includes three parts. In the first one we use a Kalman filter with a given model. The second part corresponds to numerical analysis methods; we present a prediction-correction algorithm. In the last part, an example of parameters identification and reconstruction of non uniformly sampled signal is presented.

Dans le but de reconstruire un signal échantillonné de façon non périodique, on se propose ici d'utiliser des algorithmes de deux types. D'un côté, les algorithmes de prédiction qui, à partir de la connaissance du signal et de son modèle jusqu'à l'instant t_n , permettent de prédire celui-ci aux instants $t_n + mh$, (avec t_n : instants d'échantillonnage, m : entier naturel, h : période d'échantillonnage cachée), et de l'autre les algorithmes de lissage qui, connaissant le signal et son modèle jusqu'à l'instant t_n , permettent de le reconstituer jusqu'à l'instant d'échantillonnage précédent.

2. TECHNIQUES BASÉES SUR LE FILTRE DE KALMAN

L'idée de départ est ici d'utiliser un filtre de Kalman en tant que prédicteur. En effet, puisque l'on ne dispose pas de mesures entre deux instants d'échantillonnage, on ne peut faire que des prédictions de l'état à partir d'un modèle du signal. L'arrivée de la mesure à l'instant d'échantillonnage permettra d'améliorer la dernière prédiction mais pas les précédentes. Nous avons pensé à améliorer ces prédictions en utilisant un lissage par un filtre de Kalman. C'est donc l'association de ces deux idées que nous appelons algorithme prédicteur-lisseur de Kalman.

Nous représentons le signal dans l'espace d'état par les équations suivantes

$$\mathbf{x}_{t_n+1} = A_{t_n} \mathbf{x}_{t_n} + \mathbf{v}_{t_n}$$

$$y_{t_n} = H_{t_n} \mathbf{x}_{t_n} + \mathbf{w}_{t_n}$$



\mathbf{x}_n représente le vecteur d'état à l'instant t_n , A_n et H_n représentent respectivement la matrice de transition et la matrice des observations au même instant, \mathbf{v}_n est un vecteur qui représente le bruit d'état, c'est-à-dire les erreurs de modélisation du signal. De même \mathbf{w}_n est un vecteur qui représente le bruit de mesure. Ces bruits sont supposés indépendants et de moyenne nulle.

Le filtre de Kalman choisi utilise les anciennes prédictions pour en construire une autre; donc plus l'on fait de prédictions plus l'on s'écarte du modèle du signal et plus l'erreur de prédiction augmente. De ce fait nous considérons que la matrice de covariance du bruit d'état, notée Q_n , augmente linéairement avec le temps. Nous prendrons dans ce cas :

$$Q_{n+i} = E[\mathbf{v}_{t_n+i} \mathbf{v}_{t_n+i}^T] = \lambda i Q_0$$

i étant l'indice temporel (en nombre de périodes d'échantillonnage cachées). Le scalaire λ et la matrice Q_0 représentent respectivement le facteur de pondération servant à limiter l'augmentation de la variance du bruit d'état et la matrice de covariance initiale du bruit d'état.

2.1 Algorithme de prédiction

Supposons qu'à l'instant t_n on connaisse $\hat{\mathbf{x}}_{t_n}$ et \hat{P}_{t_n} , respectivement estimation du vecteur d'état à l'instant t_n connaissant le signal aux instants précédents et estimation de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction a priori. On veut estimer l'état jusqu'à l'instant t_{n+1} , alors qu'on ne dispose d'aucune mesure entre les instants t_n et t_{n+1} .

On commence par faire une prédiction de l'état à l'instant $t_n + 1$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t_n+1|t_n} = A_n \hat{\mathbf{x}}_{t_n}$$

La matrice de covariance de l'erreur de prédiction est donnée par :

$$\hat{P}_{t_n+1,t_n} = A_n \hat{P}_{t_n} A_n^T + Q_n$$

Puisque l'on ne dispose pas de mesure à l'instant $t_n + 1$, on ne peut pas faire d'estimation de l'état à cet instant et par conséquent on ne peut pas améliorer \hat{P}_{t_n+1} .

La prédiction de l'état à l'instant $t_n + 2$ est donnée par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t_n+2|t_n} = A_n A_{n+1} \hat{\mathbf{x}}_{t_n}$$

De même, la matrice de covariance de l'erreur de prédiction à l'instant $t_n + 2$ est donnée par :

$$\hat{P}_{t_n+2,t_n} = A_n A_{n+1} \hat{P}_{t_n} A_{n+1}^T A_n^T + Q_{n+1}$$

Or le calcul utilisant les équations de Kalman, de la prédiction de l'état à l'instant $t_n + 2$ (c'est-à-dire $\hat{\mathbf{x}}_{t_n+2|t_n}$) nécessite la connaissance de $\hat{\mathbf{x}}_{t_n+1}$ qui à son tour nécessite la connaissance de l'écart entre la mesure prédite et la mesure effective; or cette dernière n'est disponible qu'à chaque instant d'échantillonnage t_n . L'idée est alors de prendre :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t_n+1} = \hat{\mathbf{x}}_{t_n+1|t_n}$$

De même le calcul de \hat{P}_{t_n+2,t_n} nécessite la connaissance de \hat{P}_{t_n+1} , qui est calculée en considérant que l'on a :

$$\hat{P}_{t_n+1} = \hat{P}_{t_n+1,t_n}$$

Cela veut dire que nous égalisons les matrices de covariance de l'erreur de prédiction a posteriori et a priori, pour tenir compte de l'erreur faite sur l'estimation du vecteur d'état.

La prédiction de ce vecteur se fait jusqu'à l'instant $t_{n+1} - 1$. A l'instant suivant, c'est-à-dire t_{n+1} , la mesure effective est disponible, le vecteur d'état est alors estimé en utilisant l'équation suivante [4]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t_n+1} = \hat{\mathbf{x}}_{t_n+1|t_n+k_n-1} + \mathbf{k}_{t_n+1} (\mathbf{x}_{t_n+1} - H_{t_n+1} \hat{\mathbf{x}}_{t_n+1|t_n+k_n-1})$$

$$\mathbf{k}_{t_n+1} = \hat{P}_{t_n+1,t_n+k_n-1} H_{t_n+1}^T (H_{t_n+1} \hat{P}_{t_n+1,t_n+k_n-1} H_{t_n+1}^T + R)^{-1}$$

R étant la matrice de covariance du bruit de mesure qu'on prendra nulle, puisqu'on considère que les mesures sont faiblement bruitées.

2.2 Algorithme de prédiction-lissage

Dans un souci d'améliorer les valeurs données par les prédictions du vecteur d'état, nous avons pensé tout simplement à les lisser, ce qui améliore considérablement les performances de la reconstitution.

On note par $\hat{\mathbf{x}}_{t|t_{n+1}}$, le vecteur d'état filtré à l'instant t , et par $\hat{\mathbf{x}}_t$ le vecteur d'état prédit à l'instant t , avec t variant de t_{n+1} à t_n avec un pas égal à $-h$.

A partir de l'algorithme de prédiction, nous pouvons calculer l'estimée de l'état à l'instant où la mesure arrive, c'est-à-dire à t_{n+1} . Cette estimée va nous permettre d'avoir une valeur lissée de l'état à l'instant $t_{n+1} - 1$ en utilisant l'équation itérative suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t_{n+1}} = \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{C}_t (\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t_{n+1}} - A_{t_{n+1}} \hat{\mathbf{x}}_t)$$

$$\mathbf{C}_t = \hat{P}_{t,t} A_{t_{n+1}}^T (A_{t_{n+1}} \hat{P}_{t,t} A_{t_{n+1}}^T + Q_t)^{-1}$$

L'algorithme de lissage se résume en une équation récurrente selon les indices décroissants dans laquelle:

$\hat{\mathbf{x}}_{t|t_{n+1}}$ est calculé à partir de $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t_{n+1}}$ et des conditions initiales $\hat{\mathbf{x}}_{t_n+1|t_{n+1}}$, qui représentent la mesure à l'instant d'échantillonnage t_{n+1} .

2.3 Remarques

- L'algorithme prédicteur-lisseur de Kalman introduit dans le traitement un retard de valeur $(d_n)_{\max}$.

- L'étude théorique de la convergence de cet algorithme est très complexe puisque dans le cas où le nombre de mesures qui manquent est supérieur à un, le nombre de cas à considérer devient très important. Il ne nous a pas paru possible d'étudier analytiquement cette convergence. C. CHEN [5] a démontré la convergence d'un algorithme de Kalman dans le cas où une seule mesure manque.

- Les performances de cette méthode dépendent essentiellement de la qualité de la modélisation du signal.

3. RECONSTITUTION PAR PRÉDICTION-CORRECTION

Les algorithmes de prédiction-correction sont des algorithmes à pas multiples et sont très utilisés en analyse numérique [6]. Toute combinaison d'algorithmes de prédiction et de correction peut être mise sous la forme canonique matricielle que nous prendrons comme équation d'état.

Le prédicteur est défini par:

$$\mathbf{x}_{t_n+1}^{[0]} = \mathbf{a} \mathbf{x}_{t_n} + h \mathbf{b} \mathbf{f}_{t_n} \quad (3.1)$$

avec :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_p \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{x}_{t_n} = \begin{bmatrix} x_{t_n} \\ x_{t_n-1} \\ \vdots \\ x_{t_n-p} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_{t_n} = \begin{bmatrix} f(x_{t_n}, t_n) \\ f(x_{t_n-1}, t_n-1) \\ \vdots \\ f(x_{t_n-p}, t_n-p) \end{bmatrix}$$

$$x_{t_n-i}^{(1)} = f(x_{t_n-i}, t_n-i)$$

Le correcteur est défini par:

$$x_{t_n+1}^{[j+1]} = \mathbf{a}' \mathbf{x}_{t_n} + h \mathbf{b}' \mathbf{x}_{t_n}^{(1)} + h b'_{,1} f(x_{t_n+1}^{[j]}, t_n+1) \quad (3.2)$$

avec :

$$\mathbf{a}' = [a'_1 \quad a'_2 \quad \dots \quad a'_p]$$

$$\mathbf{b}' = [b'_1 \quad b'_2 \quad \dots \quad b'_p]$$

$$\mathbf{x}_{t_n}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_{t_n}^{(1)} \\ x_{t_n-1}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{t_n-p}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Il s'agit de faire une prédiction en utilisant l'équation (3.1) et ensuite de corriger cette prédiction en utilisant l'équation (3.2). Pour pouvoir faire un traitement en temps réel nous nous contentons de ne faire qu'une seule correction c'est-à-dire de prendre $j = 0$.

L'étude de la stabilité des prédicteurs linéaires [7] nous amène à considérer des ordres faibles et donc des traitement locaux. Dans ce sens nous choisissons le prédicteur d'Adams-Bashforth d'ordre trois :

$$x_{t_n+1}^{[0]} = x_{t_n} + h \left[\frac{23}{12} f(x_{t_n}, t_n) - \frac{16}{12} f(x_{t_n-1}, t_n-1) \right] + h \left[\frac{5}{12} f(x_{t_n-2}, t_n-2) \right]$$

et le correcteur d'Adams-Moultons d'ordre quatre:

$$x_{t_n+1}^{[j+1]} = x_{t_n+1}^{[j]} + h \left[\frac{9}{24} f(x_{t_n+1}, t_n+1) - \frac{19}{24} f(x_{t_n}, t_n) \right] + h \left[\frac{5}{24} f(x_{t_n-1}, t_n-1) + \frac{1}{24} f(x_{t_n-2}, t_n-2) \right]$$

La formule de Taylor s'écrit:

$$x_{t_n}^{(1)} = \sum_{i=1}^p C_p^i (-1)^{i+1} x_{t_n-i}^{(1)} \quad (3.3)$$

Nous constatons que le prédicteur et le correcteur ne font intervenir que l'information x_{t_n} à l'instant t_n , et les valeurs de la dérivée première aux instants t_n , t_n-1 et t_n-2 . En conséquence nous choisissons le vecteur d'état \mathbf{x}_{t_n} selon:

$$\mathbf{x}_{t_n} = \begin{bmatrix} x_{t_n} \\ h x_{t_n}^{(1)} \\ h x_{t_n-1}^{(1)} \\ h x_{t_n-2}^{(1)} \end{bmatrix}$$

L'application du filtre de Kalman va nous permettre d'une part de lisser les informations prédites et corrigées, d'autre part d'estimer $x_{t_n}^{(1)}$, et par suite d'avoir une approximation de $f(x_{t_n}, t_n)$.

De plus nous approximations $f(x_{t_n}^{[0]}, t_n)$ par $\frac{x_{t_n}^{[0]} - x_{t_n-1}^{[0]}}{h}$. Nous

mettons ensuite les équations (3.1) et (3.3) sous forme d'équation d'état, ce qui donne :

$$A_{t_n} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{23}{12} & -\frac{16}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$H_{t_n} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

La matrice A_{t_n} va nous permettre de prédire l'information; quand à l'équation (3.2) elle va nous permettre de corriger cette prédiction. Au nouvel instant d'échantillonnage, un filtre de Kalman utilise la mesure pour lisser les informations prédites et corrigées, ce qui introduit un retard de reconstitution au plus égal à $(d_n)_{\max}$.

4. Identification des paramètres et reconstitution d'un signal AR

4.1 Introduction

Dans le but de reconstruire un signal autorégressif sans connaître les paramètres de son modèle, on se propose d'identifier ces paramètres à chaque instant d'échantillonnage et de reconstruire le signal avec un retard maximum égal à $(d_n)_{\max}$. Pour cela, nous utilisons une combinaison de deux algorithmes récursifs : l'algorithme des moindres carrés récursifs et l'algorithme prédicteur-lisseur de Kalman.

Nous considérons que le vecteur des paramètres reste constant entre deux instants d'échantillonnage. La matrice A_{t_n} utilisée dans l'algorithme prédicteur-lisseur de Kalman va varier en fonction du vecteur des paramètres identifiés.

4.2 Algorithmes RLS et prédicteur-lisseur de Kalman

On considère un signal AR représenté par son équation aux différences:

$$x_{t_n} + \Theta_{t_n} \mathbf{x}_{t_n} = \mathbf{b}_{t_n}$$

en posant :

$$\Theta_{t_n} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_p]$$

$$\mathbf{x}_{t_n} = [x_{t_n-1} \quad x_{t_n-2} \quad \dots \quad x_{t_n-p}]^T$$

4.3 Exposé de la méthode

L'algorithme RLS [8] permet d'identifier le vecteur des paramètres Θ_{t_n} qui sera introduit dans la matrice de transition A_{t_n} du modèle d'état. Dans le cas d'un signal AR d'ordre deux nous aurons :

$$A_{t_n} = \begin{bmatrix} -\hat{a}_{1t_n} & -\hat{a}_{2t_n} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous permet en utilisant l'algorithme prédicteur-lisseur de Kalman de reconstruire le signal entre deux instants d'échantillonnage en gardant A_{t_n} constant pendant ce temps.

Dans la réalité, il est bien sûr nécessaire d'introduire un facteur d'oubli qui améliore d'ailleurs les performances de la reconstitution.



5. Échantillonneur efficace

En guise d'application de ces procédés de reconstruction, on a cherché à minimiser le nombre des échantillons nécessaires à la reconstitution d'un signal par un algorithme donné avec une erreur donnée, que l'on a choisi quadratique. Pour ce faire on considère la limite supérieure r du rapport:

$$r_{t_n, t_n+i} = \left| \frac{m_{t_n+i} - m_{t_n}}{m_{t_n}} \right|$$

m_{t_n} et m_{t_n+i} , représentent respectivement la pente du signal à l'instant t_n (pente de référence) et la pente du signal à l'instant $t_n + i$; quand un point est échantillonné sa pente devient la pente de référence. On borne aussi l'écart entre les amplitudes de deux échantillons consécutifs par une quantité q .

L'optimisation porte alors sur les deux valeurs r et q , ce qui permet ensuite d'en déduire les instants d'échantillonnage.

Ce type de méthode peut être appliquée, par exemple pour minimiser le nombre de points de mesures d'un signal, ce qui correspond souvent à la minimisation de la consommation d'une électronique intégrée, ou aussi dans des techniques de compression d'informations en vue de leur transfert.

6. RÉSULTATS

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de la reconstitution d'un signal AR d'ordre deux, échantillonné avec une période qui suit une loi de distribution uniforme et de moyenne 10 fois la période cachée.

L'algorithme utilisé pour reconstituer le signal AR est le prédicteur-lisseur de Kalman utilisant une modélisation par série de Taylor d'ordre deux (fig. 5.1). Nous avons reconstruit le signal à partir de la connaissance de 23% seulement du signal global.

Pour évaluer les performances de ces algorithmes, nous utilisons deux erreurs, une locale et une autre globale.

L'erreur locale est la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne entre deux instants d'échantillonnage. L'erreur globale est une erreur relative, scalaire exprimant le rapport entre la dispersion de l'erreur de reconstitution globale et la dispersion du signal à reconstruire.

La figure 5.2 représente les courbes d'identification des paramètres du signal AR obtenues par l'algorithme RLS et le prédicteur-lisseur de Kalman. Ce résultat montre qu'il est possible d'identifier et de reconstituer des signaux dans lesquels manquent 50% d'échantillons.

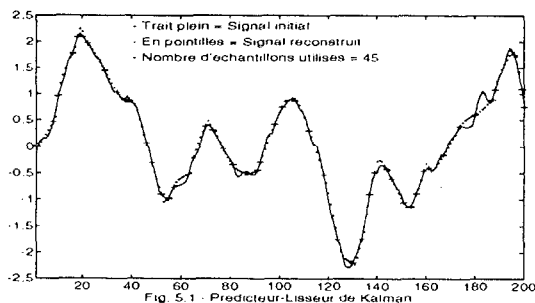


Fig. 5.1 - Prédicteur-Lisseur de Kalman

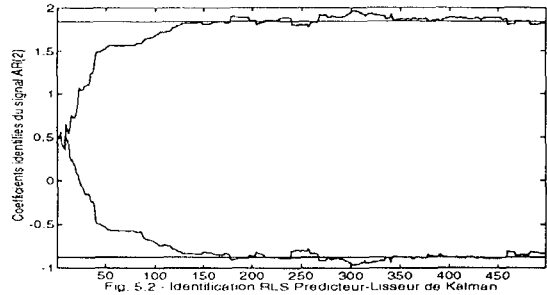


Fig. 5.2 - Identification RLS Prédicteur-Lisseur de Kalman

7. CONCLUSIONS

Les résultats de simulation présentés montrent une bonne reconstitution des signaux, à la condition d'accepter dans le traitement un retard pur égal au plus grand intervalle entre échantillons. Il apparaît qu'un choix judicieux des instants d'échantillonnage améliore la reconstitution du signal de façon considérable.

On remarquera que les modèles utilisés sont des modèles locaux ("à court terme") puisque, dans l'optique choisie, l'erreur de mesure et l'erreur tolérable sur la reconstitution sont faibles. Ces modèles locaux présentent en conséquence des ordres peu élevés, aussi bien dans l'approche "signal" (modèles AR) que dans l'approche "analyse numérique" (modèles polynomiaux).

8. BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. JERRI, "The Shannon Sampling Theorem: its Various Extensions and Applications" *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, N°11, November 1977.
- [2] J.L. YEN, "On Nonuniform Sampling of Bandwidth-Limited Signals", *IRE Transactions on Circuit Theory*, vol CT3, Dec. 1956.
- [3] O.A.Z. LENEMAN, J.B. LEWIS " Random Sampling of Random Processes: Mean-square Comparison of Various Interpolators" *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-11, N°3, July 1966.
- [4] M. LABARRERE, J. P. KRIEF, B. GIMONET, "Le filtrage et ses applications," *CEPADUES*, 1978.
- [5] G. CHEN, "A Simple Treatment For Suboptimal Kalman Filtering in Case of Measurement Data Missing", *IEEE Trans. Aeros. Elec. Sys.*, vol 26, no. 2, mars 1990, p. 413-415.
- [6] O. CHUA, P. LIN, "Computer aided analysis of electronic devices", *PRENTICE-HALL, INC. Englewood Cliffs, New Jersey*, 1975.
- [7] S. J. OVASKA, "Newton-type predictors - A signal processing oriented viewpoint", *Signal Processing*, n°25, 1991, p. 251-257.
- [8] F. MICHAUT, "Méthodes adaptatives pour le traitement du signal", *Hermès*, 1992.