



# Analyse multidimensionnelle à l'aide d'un nouveau modèle multicanal et d'un algorithme de projections successives.

## Application à l'analyse d'images.

I. Dologlou\* - J.C. Pesquet\* - G. Carayannis‡

\*LSS, CNRS/UPS et GDR TdSI,  
Ecole Supérieure d'Electricité, Plateau de Moulon,  
91192 Gif sur Yvette Cédex, France

‡Institute for Language and Speech Processing,  
22 Margari Str.,  
11525 Athens, Greece

### RÉSUMÉ

Nous présentons une nouvelle formulation du problème de la modélisation multicanale qui repose sur une description compacte, au moyen d'une représentation d'état. L'optimisation des paramètres du modèle porte sur ses propriétés fréquentielles. Par ailleurs, nous proposons un algorithme de projections successives qui permet d'améliorer les caractéristiques spectrales du signal multicanal. La convergence de cet algorithme est également étudiée. Finalement, nous montrons l'intérêt de cette méthode en compression d'images.

### ABSTRACT

This paper presents a new formulation of the multichannel modeling problem which is based on a compact state-space representation. The model parameters are optimized with respect to its frequential properties. Besides, we propose an algorithm of successive projections which improves the spectral characteristics of the multichannel signal. The convergence of this algorithm is also studied. Finally, the interest of this method is shown for image compression.

## 1 Introduction

En analyse de signaux multidimensionnels, les modèles multicanaux présentent l'avantage d'exploiter aussi bien la corrélation intra-canal que la corrélation inter-canaux. Ces modèles sont souvent déterminés, par extension du cas monodimensionnel, en réalisant une prédiction linéaire des vecteurs constituant le signal multicanal. Ce travail propose une alternative à cette formulation qui aboutit à une description compacte au moyen d'une super-matrice  $\mathbf{B}$ . Les différents canaux sont décrits en fonction de quelques sinusoides (pures ou modulées exponentiellement) dont les caractéristiques sont déterminées à partir des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{B}$ .

Dans une deuxième étape, un algorithme est introduit pour la détermination de ces valeurs propres à partir des données. Une procédure est également décrite qui permet de retrouver la formulation conventionnelle. Cette nouvelle approche du problème multicanal permet, par ailleurs, l'utilisation d'un algorithme de projections successives qui améliore considérablement et, de façon simultanée, les caractéristiques spectrales de l'ensemble des canaux. Cet algorithme permet de traiter le problème général de l'approximation optimale d'une matrice par une matrice de Toeplitz (ou de Hankel), de rang limité. Une démonstration élégante des propriétés de convergence de l'algorithme est aussi proposée.

Enfin, la modélisation multicanale et l'algorithme de projections successives, ont été employés en traitement d'images. L'image est alors considérée comme un ensemble de signaux multicanaux, regroupant chacun quelques lignes

de l'image. Ceux-ci sont scindés en plusieurs composantes, ce qui conduit à une analyse efficace pour la compression d'information.

## 2 Une nouvelle approche de la modélisation multicanale

En modélisation multicanale, le signal  $\mathbf{x}(k)$  à l'instant  $k$  est un vecteur à  $M$  composantes  $x_i(k)$ ,  $1 \leq i \leq M$ ,  $1 \leq k \leq N$ , qui représentent les échantillons de chaque canal. Le modèle linéaire usuel consiste à exprimer le vecteur à l'instant  $k$  comme une combinaison linéaire des  $P$  vecteurs précédents, selon la relation suivante :

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{i=1}^P \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k-i) + \mathbf{e}(k). \quad (1)$$

Les matrices  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, P$ , sont déterminées en minimisant l'énergie de l'erreur de modélisation  $\mathbf{e}(k)$ . Ce problème étant très largement traité dans la littérature (cf. [1], par exemple), nous allons concentrer notre attention sur sa signification physique et surtout sur ses propriétés spectrales. Remarquons tout d'abord que la détermination du modèle ne conduit pas à une caractérisation spectrale de chacun des canaux. Ceci nous amène à une autre formulation du modèle ci-dessus, en introduisant des super-vecteurs  $\mathbf{y}(k)$  et  $\mathbf{u}(k)$  ainsi qu'une super-matrice  $\mathbf{B}$ , définis par :

$$\mathbf{y}(k) = [\mathbf{x}(k-P+1)^T, \dots, \mathbf{x}(k)^T]^T, \quad (2)$$



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_P & \mathbf{A}_{P-1} & \mathbf{A}_{P-2} & \cdots & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(k) = [0, \dots, 0, \mathbf{e}(k)^T]^T. \quad (4)$$

Il nous est ainsi possible d'exprimer le modèle multicanal sous la forme,

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{B}\mathbf{y}(k-1) + \mathbf{u}(k), \quad (5)$$

ou

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{B}^k \mathbf{y}(0) + \mathbf{u}'(k). \quad (6)$$

Par ailleurs, les valeurs propres de toute matrice sont racines de son polynôme caractéristique. Une valeur propre  $\lambda$  de  $\mathbf{B}$ , vérifie ainsi une équation polynomiale d'ordre  $Q = PM$ ,

$$\lambda^Q + \beta_1 \lambda^{Q-1} + \dots + \beta_Q = 0, \quad (7)$$

et l'emploi du théorème de Cayley-Hamilton conduit à l'équation suivante:

$$\mathbf{B}^Q + \beta_1 \mathbf{B}^{Q-1} + \dots + \beta_Q \mathbf{I} = \mathbf{O}. \quad (8)$$

En multipliant cette relation par le super-vecteur  $\mathbf{y}(k-Q)$ , on aboutit à une relation du type

$$\mathbf{y}(k) + \beta_1 \mathbf{y}(k-1) + \dots + \beta_Q \mathbf{y}(k-Q) = \mathbf{w}(k), \quad (9)$$

qui effectivement implique que toutes les composantes du signal multicanal s'expriment comme des combinaisons linéaires de mêmes sinusoides dont les caractéristiques sont définies par les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{B}$ . Remarquons que, contrairement au cas monodimensionnel où la minimisation de l'erreur de prédiction donne les coefficients du modèle (qui sont directement liés au spectre), la prédiction multicanale fournit toute la matrice  $\mathbf{B}$  et non pas seulement ses valeurs propres. Notons, par ailleurs, que la matrice des vecteurs propres de  $\mathbf{B}$  ne joue aucun rôle dans la détermination des caractéristiques spectrales des canaux. Au contraire, elle joue un rôle de condition initiale partielle qui compromet l'efficacité de l'estimation des valeurs propres. C'est la raison pour laquelle nous proposons une nouvelle procédure d'optimisation qui porte directement sur les valeurs propres de la super-matrice  $\mathbf{B}$ . Plus précisément, on peut chercher à déterminer les coefficients  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, Q$ , de façon à minimiser l'erreur quadratique globale,

$$E = \sum_{k=Q+P}^N \mathbf{w}(k)^T \mathbf{w}(k) = \sum_{k=Q+P}^N \sum_{i=1}^Q w_i(k)^2, \quad (10)$$

où les  $w_i(k)$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{w}(k)$ . Cette démarche est justifiée par le fait que, dans le cas idéal où l'erreur de modélisation  $\mathbf{e}(k)$  est nulle, on doit aussi avoir  $\mathbf{w}(k) \equiv \mathbf{0}$ . Notons que la minimisation du critère  $E$  se réduit à un problème classique de modélisation monodimensionnelle, étant donné qu'elle fait intervenir les erreurs de modélisation de chacun des canaux. Une fois les coefficients  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, Q$ , calculés, les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{B}$  peuvent être déduites de son équation caractéristique. On réalise ainsi une analyse spectrale multidimensionnelle, à partir des  $M$  canaux.

Si, de plus, on souhaite retrouver la forme prédictive du modèle multicanal ou, autrement dit, la totalité de la matrice  $\mathbf{B}$ , il faut calculer ses vecteurs propres. Ce problème n'étant pas linéaire, nous proposons d'utiliser la procédure de Prony monodimensionnelle, qui fournit directement des matrices de prédiction  $\mathbf{A}'_i$ ,  $i = 1, \dots, P$ . Plus précisément, à partir des valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, Q$ , on calcule pour chacun des canaux les phases et les amplitudes associées aux  $Q/2$  sinusoides. A l'issue de cette opération, on obtient un nouveau signal multicanal qui est basé sur une estimation spectrale optimale. Bien évidemment le modèle prédictif matriciel  $\mathbf{A}'_i$ ,  $i = 1, \dots, P$ , qui est associé à ce signal est exact (sans erreur) et les valeurs propres correspondantes sont identiques aux valeurs propres que l'on a utilisées pour sa construction. Par conséquent, les propriétés spectrales de ce modèle prédictif sont bien conformes aux contraintes d'optimalité vis-à-vis des valeurs propres.

### 3 Réduction du rang à l'aide d'un algorithme de projections successives

Le paragraphe précédent nous a permis de montrer que le problème de la prédiction multicanale peut se ramener à une modélisation des données multidimensionnelles par des sinusoides (pures ou modulées exponentiellement) dont les caractéristiques sont déterminées à l'aide de la relation (9). Lorsque cette approche est appliquée à des données réelles, son efficacité dépend cependant fortement de la pertinence de ce modèle. C'est pourquoi nous introduisons, dans cette partie, un algorithme itératif qui sert, dans un premier temps, à approximer le signal de départ par un signal conforme à la modélisation choisie [2].

Afin de décrire cette méthode, définissons la matrice de données

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_M], \quad (11)$$

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_i(Q+1) & \cdots & x_i(N) \\ \vdots & & \vdots \\ x_i(1) & \cdots & x_i(N-Q) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

qui regroupe l'ensemble des informations multidimensionnelles, sur toute la durée d'observation<sup>1</sup>. Remarquons, dès à présent, que cette matrice a une structure très particulière puisque chaque élément  $\mathbf{X}_i$  est une matrice de Toeplitz. Nous noterons  $\mathcal{V}$  l'espace vectoriel des matrices  $\mathbf{X}$  de ce type. Soit  $\mathcal{E}$  l'espace euclidien des matrices réelles de dimensions  $Q+1 \times M(N-Q)$ , muni de la norme de Frobenius,

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T), \quad \mathbf{A} \in \mathcal{E}. \quad (13)$$

On vérifie aisément que la projection orthogonale  $P_{\mathcal{V}}(\mathbf{A})$  sur  $\mathcal{V}$  de toute matrice  $\mathbf{A} \in \mathcal{E}$  s'obtient simplement en décomposant  $\mathbf{A}$  sous la forme

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_M], \quad (14)$$

comme en (11), et en remplaçant les termes de chacune des diagonales des matrices  $\mathbf{A}_i$  par leur moyenne arithmétique. Remarquons également que, d'après le théorème de Pythagore, on a pour tout  $\mathbf{A} \in \mathcal{E}$ ,

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \|P_{\mathcal{V}}(\mathbf{A})\|^2 + \|\mathbf{A} - P_{\mathcal{V}}(\mathbf{A})\|^2. \quad (15)$$

<sup>1</sup>On suppose que  $N > Q + 1$ .



Par ailleurs, lorsque l'erreur de modélisation  $w(k)$ , définie en (9), est nulle, le rang de la matrice  $\mathbf{X}$  est inférieur ou égal à  $Q$ . Pour obtenir une modélisation exacte, on doit donc, en général, réduire le rang de la matrice  $\mathbf{X}$  de  $Q + 1$  à  $Q$ . On doit ainsi chercher à approximer de façon optimale une matrice de  $\mathcal{E}$  par un élément de l'ensemble  $\mathcal{R}_Q$  des matrices de rang inférieur ou égal à  $Q$ . Si l'on réalise l'approximation au sens de la norme de Frobenius, il est bien connu que l'on doit décomposer la matrice en valeurs singulières et éliminer le terme correspondant à la plus petite valeur singulière. Dans la suite, nous noterons  $D_Q(\cdot)$  cette opération de troncature. Il convient de souligner que  $D_Q(\cdot)$  n'est pas une projection sur un espace convexe. Néanmoins, nous avons pour tout  $\mathbf{A} \in \mathcal{E}$ ,

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \|D_Q(\mathbf{A})\|^2 + \|\mathbf{A} - D_Q(\mathbf{A})\|^2, \quad (16)$$

puisque  $\|\mathbf{A}\|^2$  est la somme des carrés des valeurs singulières de  $\mathbf{A}$ .

Pour aboutir à une matrice de données appartenant à  $\mathcal{V}$  et de rang  $Q$ , on peut enchaîner itérativement les opérations  $D_Q(\cdot)$  et  $P_{\mathcal{V}}(\cdot)$ , de la même manière que cela avait été fait dans [3], pour le cas 1D. On construit ainsi une suite  $\{\hat{\mathbf{X}}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}, \quad \hat{\mathbf{X}}_{k+1} = P_{\mathcal{V}} \circ D_Q(\hat{\mathbf{X}}_k). \quad (17)$$

La convergence de cet algorithme de projections successives n'est *a priori* pas garantie, en raison de la non convexité de l'ensemble  $\mathcal{R}_Q$ . Il nous faut donc l'étudier plus attentivement.

En fait, nous allons montrer que  $\{\hat{\mathbf{X}}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée de  $\mathcal{V}$  et que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(\hat{\mathbf{X}}_k, \mathcal{R}_Q) = 0$ .

*Preuve :* Compte tenu des relations d'orthogonalité (15) et (16), il convient tout d'abord de noter que la suite  $\{\|\hat{\mathbf{X}}_k\|\}_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est convergente. On en déduit aussi que la suite  $\{\hat{\mathbf{X}}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée car ses termes appartiennent à la boule fermée de centre  $\mathbf{O}$  et de rayon  $\|\mathbf{X}\|$ . Par ailleurs, en combinant (15) et (16), on trouve que

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{X}}_{k+1} - D_Q(\hat{\mathbf{X}}_k)\|^2 + \|D_Q(\hat{\mathbf{X}}_k) - \hat{\mathbf{X}}_k\|^2 \\ = \|\hat{\mathbf{X}}_k\|^2 - \|\hat{\mathbf{X}}_{k+1}\|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

La convergence de la suite  $\{\|\hat{\mathbf{X}}_k\|\}_{k \in \mathbb{N}}$  nous assure ainsi que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{X}}_k - D_Q(\hat{\mathbf{X}}_k)\| = 0. \quad (19)$$

Il suffit alors de remarquer que

$$d(\hat{\mathbf{X}}_k, \mathcal{R}_Q) \leq \|\hat{\mathbf{X}}_k - D_Q(\hat{\mathbf{X}}_k)\|, \quad (20)$$

pour achever la démonstration. ■

Notons que l'on peut se référer à [4] pour avoir une vue plus générale du type d'algorithmes auquel nous nous sommes ici intéressés.

<sup>2</sup>La distance à l'ensemble  $\mathcal{R}_Q$  est définie par  $d(\mathbf{A}, \mathcal{R}_Q) = \inf_{\mathbf{A}' \in \mathcal{R}_Q} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\|$ .

## 4 Quelques applications de la modélisation

Nous présentons maintenant quelques résultats (voir figures ci-après) qui mettent en valeur les différents aspects de la modélisation que venons d'exposer. D'une part, nous mettons en évidence l'amélioration de l'estimation spectrale apportée par l'utilisation de l'algorithme de réduction de rang. D'autre part, nous montrons l'intérêt de ces décompositions en analyse et codage de signaux 2D (images fixes). La décomposition du signal multicanal au moyen de l'algorithme de projections successives, fournit une analyse adaptative, tout en permettant la réduction du rang et, par là-même, une amélioration de la modélisation. Cet accroissement des performances est dû à l'élimination globale des phénomènes qui ne se prêtent pas à une description linéaire.

Dans notre cas, un tel traitement décompose le signal 2D en deux parties, l'une qui est linéairement prédictible et l'autre qui regroupe toutes les irrégularités de l'image. Nous avons exploité cette analyse en réalisant un système efficace de compression d'images qui traite de façons différentes les deux composantes. La première qui est très énergétique se prête aux procédures décrites dans le paragraphe 2. La seconde est traitée davantage en utilisant des méthodes non-linéaires, afin de garantir la conservation de toutes les caractéristiques locales importantes de l'image originale.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'analyse spectrale multidimensionnelle qui, couplée à un algorithme de projections successives, permet une modélisation efficace des signaux multicanaux. En compression d'images, il convient de noter que, contrairement aux méthodes d'analyse usuelles (DCT, sous-bandes,...), l'approche proposée a l'avantage d'être adaptative.

## 6 Références

- [1] A. Gersho and R. Gray, *Vector quantization and signal compression*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992.
- [2] I. Dologlou and G. Carayannis, "Physical interpretation of signal reconstruction from reduced rank matrices", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 39, pp. 1681-1682, Jul. 1991.
- [3] J.A. Cadzow, "Signal enhancement: a composite property mapping algorithm", *IEEE Trans. ASSP*, Vol. 36, pp. 49-62, Jan. 1988.
- [4] P.L. Combettes and H.J. Trussell, "Method of successive projections for finding a common point of sets in metric spaces", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 67, pp. 487-507, Dec. 1990.

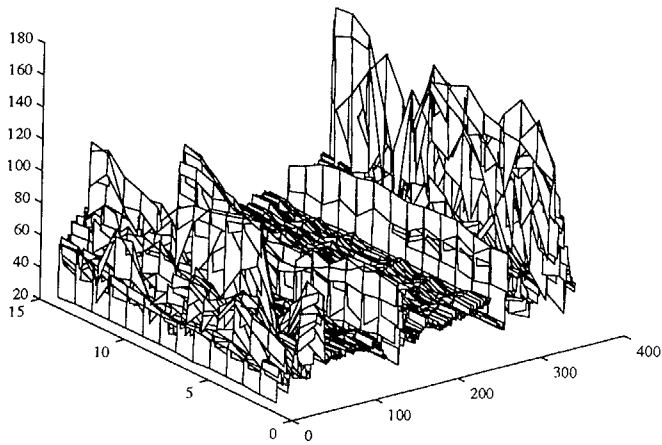


Figure 1 : 14 canaux extraits d'une image.

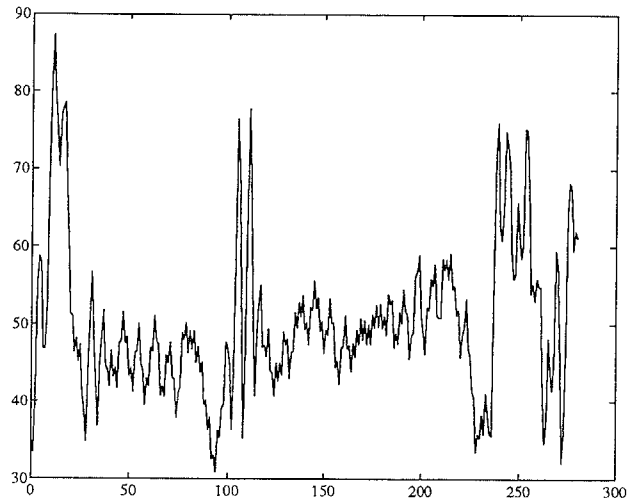


Figure 4 : signal compressé après modélisation exacte et troncature de 75 % des termes, PSNR = 32.5 dB.

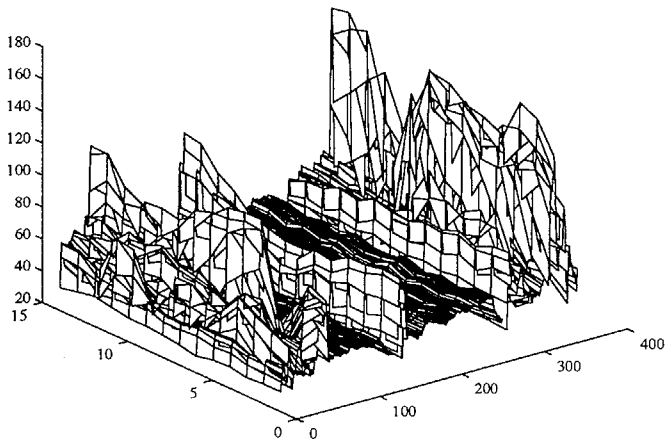


Figure 2 : signal multicanal de rang réduit, PSNR = 38.5 dB.

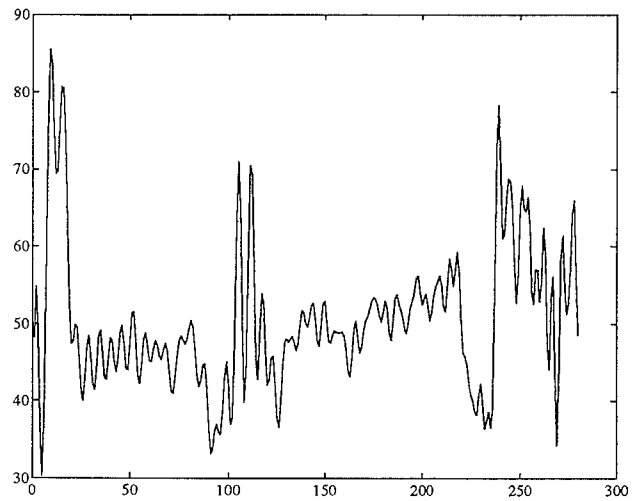


Figure 5 : signal compressé après modélisation exacte du signal de rang réduit et troncature de 75 % des termes, PSNR = 33.8 dB.

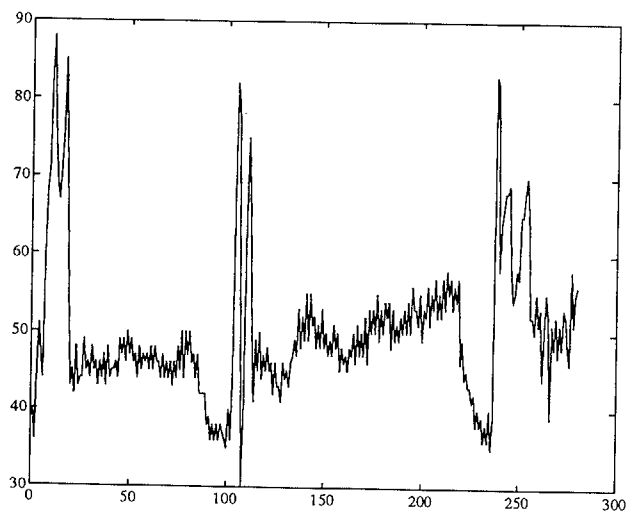


Figure 3 : premier canal du signal original.