



ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE CYCLIQUE A PARTIR D'UN HORIZON D'OBSERVATION LIMITE

E. THIERRY, T. PITARQUE, J.P. GARINO

Laboratoire I3S-URA 1376 du CNRS, Université de Nice-Sophia Antipolis
41 Bd Napoléon III 06041 Nice Cedex
email: et@mimosa.unice.fr

RÉSUMÉ

Parmi l'ensemble des signaux non stationnaires, la classe des signaux cyclostationnaires est particulièrement intéressante car elle concerne des processus souvent rencontrés en télécommunications ou en sonar. W.A. Gardner [1] a montré que l'analyse spectrale de tels signaux passe par l'estimation de la densité spectrale cyclique avec utilisation d'un lissage pour réduire la variance de l'estimateur. Il y a deux approches possibles: le lissage temporel et le lissage fréquentiel [2]. L'objectif de cet article est d'estimer, en utilisant le lissage fréquentiel et la méthode du "zero padding", la densité spectrale cyclique pour une modulation d'amplitude à partir d'un horizon d'observation limité. Ceci arrive par exemple lors de l'estimation de retards de signaux acoustiques sous-marins [3]. Nous montrons que la méthode du "zero padding" introduit une corrélation spectrale artificielle. Néanmoins elle permet d'améliorer l'estimation de retard entre deux signaux cyclostationnaires bruités.

I. INTRODUCTION

Depuis quelques années, le concept de cyclostationnarité a pris de l'importance dans des domaines aussi variés que les communications, l'interception de signaux radar ou sonar, l'estimation des temps d'arrivée et l'identification aveugle de canal.

Par définition, un processus aléatoire $x(t)$ est dit cyclostationnaire au sens large si sa fonction d'autocorrélation varie périodiquement en fonction du temps c'est-à-dire que $R_x(t, \tau) = R_x(t + T_x, \tau)$ où T_x représente la période. Un exemple très simple d'un tel signal est un processus aléatoire stationnaire modulé en amplitude. La fonction d'autocorrélation $R_x(t, \tau)$ étant périodique, elle peut être décomposée en série de Fourier de coefficients $R_x^\alpha(\tau)$ qu'on appelle fonctions d'autocorrélation cyclique, la variable α représentant la fréquence cyclique. La transformée de Fourier (TF) de l'autocorrélation cyclique $R_x^\alpha(\tau)$ est appelée fonction de corrélation spectrale ou densité spectrale cyclique et elle sera notée $S_x^\alpha(f)$. Ces deux quantités forment la base de l'analyse spectrale cyclique qui est un outil du traitement du signal permettant d'exploiter les particularités d'un signal cyclostationnaire.

Dans le cas de signaux discrets, l'estimation de $S_x^\alpha(f)$ est basée sur la transformée de Fourier discrète (TFD) de $x(nT_e)$ où T_e est la période d'échantillonnage. Nous nous sommes intéressés au cas où la longueur de l'observation ne permet pas

ABSTRACT

Cyclostationary signals are nonstationary signals often encountered in telecommunications and sonar area. W.A. Gardner has shown that the cyclic spectral analysis completely characterizes the second order study of such signals. So he proposes two estimators of the cyclic spectral density. The first one is based on temporal smoothing and the second one is based on spectral smoothing. The aim of this paper is to study the cyclic spectral analysis of an amplitude modulated signal observed on a finite data set using the spectral smoothing estimator and the zero padding method.

We prove that the zero padding method introduces an artificial correlation. However we show that this method can improve the time delay estimation between delayed noisy cyclostationary signals.

d'avoir une résolution en fréquence cyclique suffisante. Il est alors naturel de penser à interpoler la densité spectrale cyclique du signal en utilisant la méthode du "zero padding".

Dans la section II nous décrivons brièvement l'estimation de

$S_x^\alpha(f)$. Dans la section III nous étudions théoriquement l'effet du "zéros padding" sur l'estimation de la densité spectrale cyclique, puis dans la section IV nous présentons des simulations mettant en évidence l'influence du "zero padding" lors d'une interprétation visuelle du résultat de l'analyse spectrale cyclique ainsi que pour l'estimation de retards.

II. CORRELATION SPECTRALE

Les signaux traités étant non stationnaires, il se pose le problème de l'estimation de la quantité $S_x^\alpha(f)$ lorsque l'on ne dispose que d'une seule réalisation.

Une méthode possible est d'abord d'estimer $R_x^\alpha(\tau)$ et ensuite de faire la TF du résultat. Un estimateur possible de la corrélation cyclique est le suivant:

$$\hat{R}_x^\alpha(\tau)_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - \frac{\tau}{2}) x(t + \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi\alpha t} dt$$

Il a été récemment montré [4] que sous certaines hypothèses cet estimateur converge au sens des moindres carrés vers $R_x^\alpha(\tau)$ lorsque T tend vers l'infini.



Pour des raisons de complexité de calcul nous utiliserons une autre méthode fondée sur une propriété de corrélation spectrale propre aux signaux cyclostationnaires. En effet, on peut remarquer que si la fonction d'autocorrélation est périodique en t de période T_x alors il existe une corrélation entre les composantes spectrales $f+\alpha/2$ et $f-\alpha/2$ du signal c'est-à-dire :

$$E[X(f+\alpha/2)X^*(f-\alpha/2)] \neq 0 \text{ pour } \alpha=k/T_x \text{ et } k \in Z$$

Afin d'exploiter cette propriété de corrélation spectrale W. A. Gardner [2] a développé une théorie définissant la densité spectrale cyclique de la façon suivante:

$$S_{xx}^\alpha(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} Z_T(t, f + \frac{\alpha}{2}) X_T^*(t, f - \frac{\alpha}{2}) \frac{dt}{T}$$

$$\text{avec } X_T(t, f) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(u) e^{-j2\pi fu} du$$

Dans la suite on notera $S_x^\alpha(f) = S_{xx}^\alpha(f)$. A partir de cette

définition, on déduit deux estimateurs de $S_x^\alpha(f)$. Le premier est basé sur un lissage temporel et le second est basé sur un lissage fréquentiel. Nous nous sommes intéressés au second car il convient mieux aux cas où l'observation s'effectue sur un horizon limité.

Dans le cas de signaux discrets observés sur un horizon de N points, l'estimateur lissé fréquentiellement s'exprime de la façon suivante:

$$\hat{S}_x^\alpha = (X^{\alpha/2} \otimes X^{-\alpha/2}) * H \quad \alpha \in [0, 2N-1]$$

$$\hat{S}_x^\alpha = [\hat{S}_x^\alpha(0) \hat{S}_x^\alpha(1) \dots \hat{S}_x^\alpha(N-1)] \text{ et } X = [X(0) \dots X(N-1)]$$

$$\text{avec } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 1, \dots, N-1$$

et $X^{\pm\alpha/2}$ représente le vecteur X décalé de la quantité $\pm\alpha/2$ \otimes représentant le produit terme à terme et $*$ le produit de convolution discret, H représentant un filtre moyenneur.

Le vecteur X ne pouvant être traduit que pour un nombre entier d'échantillons, la résolution cyclique $\Delta\alpha = 1/N$. Par contre la résolution fréquentielle Δf dépend de la taille du filtre H . Si sa réponse impulsionnelle comprend M points alors la résolution fréquentielle $\Delta f = M/N$. Ainsi un problème se pose si la fréquence cyclique α_x associée au signal observé est inférieure à $1/N$. En analyse spectrale classique ce problème peut être en partie contourné en utilisant la méthode du "zero-padding" [5]. L'effet de cette méthode sur l'analyse spectrale cyclique est étudié dans le paragraphe suivant.

III. METHODE DU "ZERO PADDING"

La méthode du "zero padding" a pour but d'augmenter le nombre de points fréquentiels en réalisant une interpolation entre les points $X(k)$. Pour cela on rajoute $(K-1)N$ zéros au signal $x(n)$ et on fait la TFD de ce nouveau signal. Le résultat obtenu peut s'écrire comme la convolution discrète de $X(k)$ avec un filtre $I(q/K)$ [1]:

$$Y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) I(n - \frac{m}{K}) \quad m = 0, 1, \dots, KN-1$$

$$\text{avec } I(\frac{q}{K}) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi \frac{q}{K})}{\sin(\pi \frac{q}{KN})} e^{i \frac{\pi q}{K} (1 - \frac{1}{N})}$$

On peut remarquer que $Y(Ki) = X(i)$ avec $i=0, \dots, N-1$. D'autre part l'interpolation introduit une corrélation entre les différentes valeurs de $Y(m)$ pour $m \neq Ki$ qui n'existait pas pour les $X(k)$. Le "zero padding" fait donc apparaître une corrélation spectrale artificielle. Prenons pour exemple le bruit blanc. Dans ce cas:

$$E[X(n)X^*(k)] = N\sigma^2 \delta_{nk} \text{ et } \delta_{nk}=1 \text{ si } n=k \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

$$E[Y(m)Y^*(i)] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} E[X(n)X^*(k)] I(n - \frac{m}{K}) I^*(k - \frac{i}{K})$$

$$= \frac{\sigma^2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin[\pi(n - \frac{m}{K})]}{\sin[\frac{\pi}{N}(n - \frac{m}{K})]} \frac{\sin[\pi(n - \frac{i}{K})]}{\sin[\frac{\pi}{N}(n - \frac{i}{K})]} e^{-j\frac{\pi}{K}(i-m)(1-\frac{1}{N})}$$

Pour $m \neq Ki$, cette expression contient un terme de phase qui peut être gênant par exemple pour l'estimation de retards entre signaux.

Sur les figures 1 et 2, on a tracé dans le cas d'un bruit blanc de 4096 points, pour une fréquence donnée (ici $f=0$ Hz) l'allure du module de la densité spectrale cyclique pour $K=2$ et $K=10$. On remarque que la valeur maximale de cette corrélation artificielle ne dépend pas de K . Si le bruit est passe bande et si la largeur de bande est grande alors on obtient les mêmes résultats que précédemment pour des fréquences proches de la fréquence

centrale. L'influence de cette corrélation introduite par le "zero padding" va être illustrée sur un exemple pratique d'estimation de retards entre deux signaux sonar [3].

IV. APPLICATIONS

Soit deux signaux enregistrés sur des capteurs différents et modélisés par :

$$w(t) = x(t) + b(t) \\ z(t) = x(t-D) + b(t-D')$$

Le signal $x(t)$ est un signal cyclostationnaire obtenu par modulation d'un processus aléatoire stationnaire $r(t)$:

$$x(t) = r(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

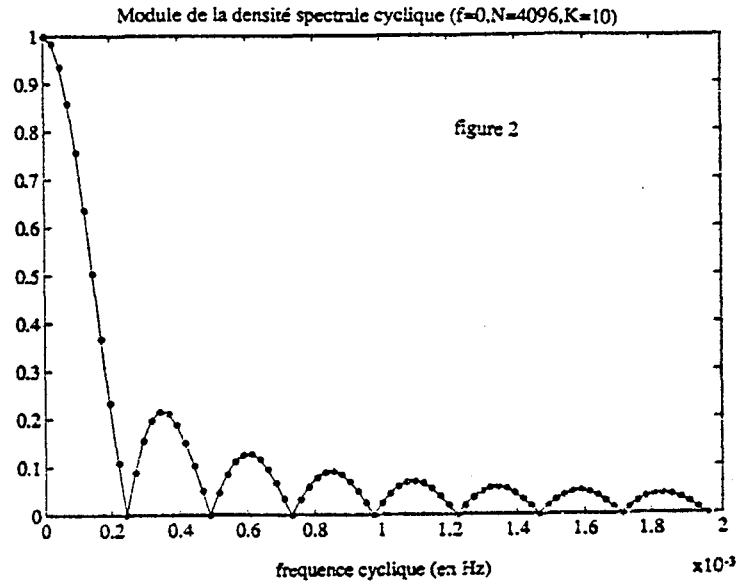
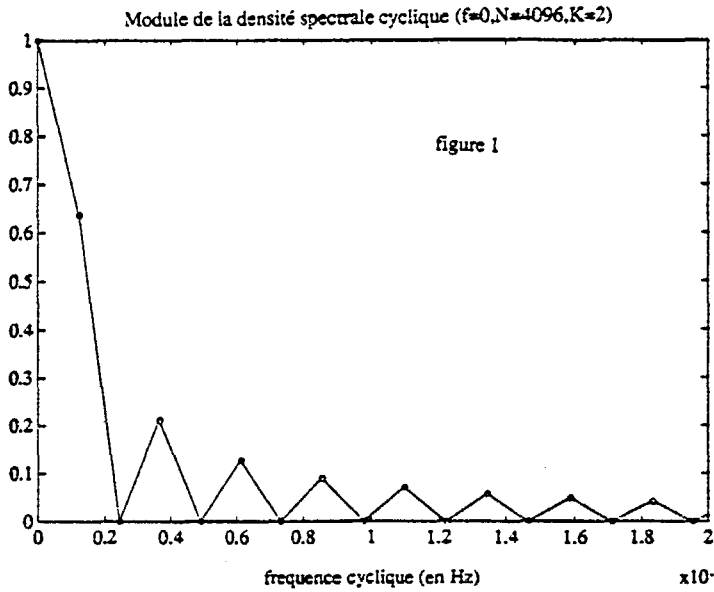
où $r(t)$ représente un processus aléatoire stationnaire passe-bande centré sur 0.2Hz et de largeur de bande 0.1Hz et $f_0 = 1.7 \cdot 10^{-4}$ Hz.

Le bruit passe-bande $b(t)$ possède les mêmes caractéristiques spectrales que $r(t)$. Les retards D et D' valent respectivement 48s et 60s. Le rapport signal à bruit (S/B) (énergie du signal $x(t)$ sur énergie du bruit $b(t)$) vaut 0 dB. Le signal est observé sur une durée de 4096s ($T_e = 1$ s).

Les figures 3 et 4 représentent une coupe à la fréquence 0.2Hz de la DSP cyclique du signal $w(t)$ dans le plan fréquence-fréquence cyclique, respectivement sans et avec "zero padding" ($K=2$). On voit apparaître sur la figure 4 un motif proche de

$\alpha_x = 2f_0 = 3.4 \cdot 10^{-3}$ Hz mais il est impossible pour un S/B de 0dB de dire si ce motif est dû au signal ou au bruit via la corrélation artificielle (cf figure 1) introduite par le "zero padding".

Pour estimer le retard D on utilise la méthode SPECORR [7] qui est une intercorrélation généralisée cyclique. L'estimateur du retard D est:



Légende: Coupe à la fréquence $f=0$ Hz de la DSP cyclique dans le plan fréquence-fréquence cyclique dans le cas du bruit blanc. Sans "zero padding" la corrélation spectrale est nulle sauf pour la fréquence cyclique $\alpha=0$ Hz. Tracé sur les figures 1 et 2 du module normalisé de la corrélation spectrale avec "zeros padding" respectivement pour $K=2$ et $K=10$.

$$\hat{D} = \arg \max_{\tau} b_{\alpha}(\tau)$$

$$\text{avec } b_{\alpha}(\tau) = \left| \int_{-1/2}^{1/2} \frac{S_{zw}^{\alpha}(f)}{S_w^{\alpha}(f)} e^{i2\pi f\tau} df \right|$$

Lorsque $\alpha=0$ on retrouve la pondération de Roth [6]. Dans l'exemple choisi, pour $\alpha=0$ cette pondération n'élimine pas le bruit et le retard estimé est égal à D' (figure 5). Lorsque $\alpha=\alpha_x$, théoriquement le bruit devrait être éliminé ce qui n'est pas le cas ici (figure 6) et le retard estimé correspondant au maximum, est encore égal à D' . En utilisant la méthode du "zero padding" avec $K=2$ (figure 7) le retard estimé est égal à D . Il faut noter que la longueur M du filtre H est limitée par la condition $M < N/2D$ [7]. L'utilisation du "zero padding" en augmentant le nombre de points permet d'améliorer le lissage tout en gardant la même résolution fréquentielle et en respectant la contrainte $M < N/2D$.

V. CONCLUSION

L'utilisation de la méthode du "zero padding" dans l'analyse spectrale cyclique introduit une corrélation cyclique artificielle qui rend l'interprétation des résultats délicate pour des faibles rapports signaux à bruit. Néanmoins le "zero padding" augmente le nombre de canaux fréquentiels ce qui permet d'améliorer le lissage donc la qualité de l'estimée de la densité spectrale cyclique tout en conservant une bonne résolution fréquentielle. Ceci est primordial par exemple pour l'estimation de retards.

VI. REFERENCES

- [1] W.A. Gardner "Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory" Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988.
- [2] W.A. Gardner "Measurement of spectral correlation" Trans. on ASSP, Vol ASSP-34, N°5, pp 1111-1123, oct. 1986.
- [3] P. Degoul "Etude des signaux ASM large bande modulés par la méthode de la corrélation spectrale" Treizième colloque GRETSI, pp. 637-640, 1991.
- [4] A.V. Dandawate "On consistent and asymptotically normal sample estimators for cyclic-moments and cumulants" ICASSP 1993, Vol IV, pp. 504-507.
- [5] S.M. Kay and S.L. Marple "Spectrum analysis: a modern perspective" Proc. of IEEE, Vol. 69, N°11, Nov 1981.
- [6] P.R. Roth "Effective measurements using digital signal analysis" IEEE spectrum, pp 62-70, aprii 1991.
- [7] W.A. Gardner, C.K. Chen "Signal selective time-difference-of-arrival estimation of passive location of man-made signal sources in highly corruptive environments, Part I Theory and method" IEEE Trans. on Signal Processing, pp. 1158-1184, Vol 40, N°5, may 1992.