

Algorithme Rapide Transversal Pour l'Estimation de Paramètres AR dans le cas Non Gaussien

A. Meziane*, A. Adib*,
D. Aboutajdine* et M. Najim**

* LEESA B.P. 1014 Faculté des Sciences de Rabat Maroc

** Equipe Signal et Image ENSERB 356 cours de la Libération 33405 Talence

Résumé:

Quelques approches adaptatives ont été proposées dans la littérature pour l'estimation de paramètres AR dans le cas non-gaussien mais restent d'une complexité élevée. Une version rapide en treillis a été proposée par Mendel et Swami se basant sur les cumulants 1-D slice. En général, elle n'assure pas la consistance des paramètres estimés. Afin de contourner ce problème, A. Rodriguez et J. Vidal proposèrent une autre version de cet algorithme utilisant une combinaison linéaire des cumulants 1-D slice (w-slice). Dans le but de diminuer la complexité nous proposons un algorithme transversal rapide basé sur la méthode de la variable instrumentale (FTRIV). Nous évoquerons le problème d'identifiabilité ainsi que celui de l'instabilité numérique. L'introduction de w-slice et une étude de la stabilité aboutiront à la dérivation d'une version (w-FTRIV) stabilisée.

Introduction:

Les diverses techniques utilisées dans la littérature [4,6] pour l'identification des processus paramétriques exploitent presque exclusivement les statistiques du second ordre du signal observé à cause de la simplicité mathématique associée. Cependant, ces outils statistiques ne permettent pas une description complète des processus non-gaussiens et ne sont pas sensibles à la phase et aux non linéarités présentes dans le système traité. De plus l'estimation des paramètres utilisant ces statistiques se dégradent très vite en présence d'un bruit additif même dans le cas d'un rapport signal sur bruit élevé. L'utilisation des statistiques d'ordre supérieur (Cumulants-Polyspectres) a permis de contourner ces problèmes et a été à l'origine d'améliorations notables dans le cas d'applications réelles [8] (déconvolution, égalisation aveugle, annulation d'écho, traitement de la parole, ...). Ces applications se font généralement en temps réel et nécessitent un traitement adaptatif. Les premiers algorithmes adaptatifs ont été développés dans [2,5], mais ils restent d'une complexité élevée. Plus tard Swami et Mendel [11] ont dérivé un algorithme rapide en treillis qui a été amélioré par A. Rodriguez et J. Vidal [9]. Dans le même contexte et afin de diminuer d'avantage la complexité, nous proposons un algorithme adaptatif rapide transversal basé sur la méthode de la matrice instrumentale.

Abstract:

A number of adaptive algorithms based on cumulants has been proposed in the literature to estimate the AR parameters in non-gaussian case. But the resulting algorithms are more complex. A fast lattice algorithm based on a 1-D slice is developed by J. Mendel and A. Swami. This method cannot assure, in general, the consistency of the estimation (the algorithm fail if any of the diagonal principal minors is singular). A. Rodriguez and J. Vidal give a solution to the mentioned problem, they use a linear combination of 1-D slice (w-slice). Here, we propose a fast transversal recursive instrumental variable algorithm (FTRIV). We evoke the identifiability problem and the numerical instability. By using properly the redundancy and w-slice, we obtain a numerically stable (w-FTRIV) algorithm.

Méthodes globales d'identification AR:

Soit un signal $W(t)$ non-gaussien représenté par le modèle autorégressif d'ordre N suivant:

$$W(t) = - \sum_{i=1}^N a(i) w(t-i) + x(t) \quad (1)$$

$$y(t) = W(t) + v(t) \quad (2)$$

$x(t)$: excitation non-gaussienne supposée stationnaire, indépendante, identiquement distribuée (i.i.d), de moyenne nulle et de variance σ_x^2 finie et ayant au moins un cumulant d'ordre $m > 2$ (γ_m) non nul.

$y(t)$: la version bruitée de $W(t)$.

$v(t)$: un bruit additif blanc ou corrélé de type gaussien indépendant de $y(t)$.

Nous définissons le cumulant d'ordre 3 de $y(t)$ par:

$$C_{3,y}(i,j) = E[y(t) y(t+i) y(t+j)] \quad (3)$$

pour $i=j$, le cumulant est appelé cumulant diagonal d'ordre 3; de même, le cumulant d'ordre 4 de $y(t)$ est:

$$C_{4,y}(i,j,k) = E[y(t)y(t+i)y(t+j)y(t+k)] - C_{2,y}(i)C_{2,y}(j-k) - C_{2,y}(j)C_{2,y}(k-i) - C_{2,y}(k)C_{2,y}(i-j) \quad (4)$$

où:

$$C_{2,y}(i) = E[y(t) y(t+i)]$$

si $i=j=k$, le cumulant correspondant est appelé cumulant diagonal slice d'ordre 4.



Pour plus de détail concernant la définition, les propriétés et quelques applications des cumulants, nous renvoyons le lecteur à la référence [8].

Pour un modèle AR, Giannakis - Mendel, Nikias - Raghuvver ont montré que la séquence des cumulant 1-D slice d'ordre k obéit à une équation récursive de la forme:

$$\sum_{i=0}^N a(i) C_y(t-i) = \gamma_k \delta(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (5)$$

En concaténant les équations (5) pour $t=0, N$ on aboutit à l'équation matricielle suivante:

$$C_{k,y} A = \gamma_k e_0 \quad (6)$$

avec:

$A = [1 \ a(1) \ \dots \ a(N)]^T$: vecteur des coefficients AR.

γ_k : cumulants d'ordre k de l'entrée $x(t)$.

e_0 : vecteur contenant $(N+1)$ éléments dont le premier est l'unité, les N autres sont nuls.

$C_{k,y}$: est une matrice $(N+1) \times (N+1)$ construite à partir des cumulants 1-D slice de la sortie. Ses éléments (i,j) sont donnés par:

$$C_{k,y}(i,j) = C_{k,y}(i-j, 0, \dots, 0) \quad (7)$$

Notons que la matrice $C_{k,y}$ est de type Toeplitz, généralement non symétrique. Son inversion par des méthodes standards telles que l'élimination de Gauss, la décomposition de Cholesky, ou la décomposition de Housholder exigera un nombre d'opérations de l'ordre de N^3 . Cependant, sa structure de Toeplitz permettra de réduire cette complexité à l'ordre N^2 , en utilisant des algorithmes récursifs rapides du genre Levinson, Trench ou Cholesky rapide.

La résolution de (6) fournira des paramètres AR uniques à condition que la matrice des cumulants soit de rang plein, c'est à dire de rang N . Cette condition a été implicitement ou explicitement supposée dans [8] mais Swami montra par un contre exemple [12] qu'il existe des modèles ARMA telle que la matrice des cumulants 1-D slice correspondante n'est pas nécessairement de rang plein. Tugnait confirma ce résultat dans [13]. Ainsi l'utilisation de l'équation (6) toute seule peut aboutir à des problèmes de non identifiabilité à cause de la singularité de la matrice $C_{k,y}$. La première tentative dans le but de contourner ce problème a été proposée dans [12]. Elle consiste à résoudre un système d'équations linéaires surdéterminées, mais au dépend d'une croissance de complexité de calcul. Nous verrons dans le paragraphe suivant d'autres méthodes plus appropriées pour le traitement adaptatif.

Méthodes adaptatives:

Le traitement adaptatif des signaux est souvent nécessaire dans les applications en temps réel. Cependant, les méthodes existantes basées sur l'autocorrélation sont inefficaces pour adapter correctement les systèmes non-gaussiens. Ainsi, dans le but d'identifier ce type de systèmes d'une manière adaptative, Friedlander et Porat ont développé l'algorithme ORIV (Overdetermined Recursive Instrumental Variable) [5]. De même Chiang et Nikias

[2] ont proposé un algorithme de type gradient basé sur les cumulants d'ordre 3 (notons que lorsque les cumulants d'ordre 3 sont nuls, ce qui est le cas pour les signaux à distribution symétrique, la complexité de l'algorithme le rend inapplicable lors de l'extension à l'ordre 4). Ces deux méthodes restent inutilisables dans les applications en temps réel puisqu'elles nécessitent un coût de calcul élevé.

Une première solution fut proposée dans [11], elle consiste en un double treillis de la méthode de la variable instrumentale. Cet algorithme génère la solution à chaque instant et pour tous les ordres à partir de l'ordre $N=1$, en propageant un jeu de coefficients appelés coefficients de réflexion. La complexité de calcul devient ainsi de l'ordre de N opérations par itération. Récemment une étude effectuée dans [9] a montré une défaillance de cette méthode (problème de l'identifiabilité et de la division par zéro dans le calcul des premiers coefficients de réflexion), et ont proposé un algorithme w-slice utilisant une combinaison linéaire des cumulants 1-D slice.

L'algorithme en treillis de la variable instrumentale présenté dans [11] possède des propriétés avantageuses. Cependant, du point de vue numérique, il demande plus de calcul que les versions rapides transversales qui sont largement utilisées actuellement dans des applications utilisant les statistiques d'ordre 2. Nous nous sommes proposés d'étendre ces algorithmes au cas non-gaussien. Ainsi, l'algorithme que nous proposons peut être vu comme un double FTF (Algorithme des Moindres Carrés Rapides) [3], l'un lié au processus $y(t)$, l'autre à la variable instrumentale associée $z(t)$ [11].

On présente ainsi la dérivation de la version transversale utilisant presque les mêmes outils que la version en treillis. Notons par:

$Y_{N+1}(t) = [y(t) \ y(t-1) \ \dots \ y(t-N)]^T$ le vecteur des derniers $(N+1)$ échantillons de $y(t)$.

$Z_{N+1}(t)$ est défini de la même façon.

Soit $\Phi_{N+1}(t) = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} Z_{N+1}(i) Y_{N+1}^T(i)$ la matrice d'intercorrélation [11].

Comme la manipulation des vecteurs au lieu de la matrice conduit à un gain considérable en complexité de calcul qui passe de $O(N^2)$ à $O(N)$, plusieurs algorithmes ont été développés pour réaliser cette performance, les moindres carrés transversaux [3,10], et en treillis rapides [6]. Nous développons une version transversale suivant les mêmes étapes que pour les MCR, mais l'application sera faite sur la matrice des cumulants.

Résumé de l'algorithme FTRIV:

Initialisation:

$$F_N(0) = B_N(0) = \delta \quad (8)$$

$$A_N(0) = \tilde{A}_N(0) = C_N(0) = \tilde{C}_N(0) = 0 \quad (9-a)$$

$$K_N(0) = \tilde{K}_N(0) = 0 \quad (9-b)$$

$$\mu_N(0) = 1 \quad (10)$$

Erreurs a priori:



$$f_N(t) = y(t) + A_N^T(t-1) Y_N(t-1) \quad (11)$$

$$\tilde{f}_N(t) = z(t) + \tilde{A}_N^T(t-1) Z_N(t-1) \quad (12)$$

$$b_N(t) = y(t-N) + C_N^T(t-1) Y_N(t) \quad (13)$$

$$\tilde{b}_N(t) = z(t-N) + \tilde{C}_N^T(t-1) Z_N(t) \quad (14)$$

Erreurs directes a posteriori:

$$\bar{f}_N(t) = \mu_N(t-1) f_N(t) \quad (15)$$

$$\tilde{\bar{f}}_N(t) = \mu_N(t-1) \tilde{f}_N(t) \quad (16)$$

Energies de prédiction:

$$F_N(t) = \lambda F_N(t-1) + z(t) \bar{f}_N(t) \quad (17)$$

$$B_N(t) = \lambda B_N(t-1) + z(t-N) \bar{b}_N(t) \quad (18)$$

Prédicteurs directs:

$$A_N(t) = A_N(t-1) + K_N(t-1) f_N(t) \quad (19)$$

$$\tilde{A}_N(t) = \tilde{A}_N(t-1) + \tilde{K}_N(t-1) \tilde{f}_N(t) \quad (20)$$

Gains d'ordre (N+1):

$$K_{N+1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_N(t-1) \end{bmatrix} - F_N^{-1}(t) \bar{f}_N(t) \begin{bmatrix} 1 \\ A_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_N(t) \\ \alpha_N(t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\tilde{K}_{N+1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{K}_N(t-1) \end{bmatrix} - F_N^{-1}(t) \tilde{\bar{f}}_N(t) \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{A}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_N(t) \\ \tilde{\alpha}_N(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Variable de vraisemblance:

$$\mu_{N+1}(t) = \mu_N(t-1) - F_N^{-1}(t) \bar{f}_N(t) \bar{f}_N(t) \quad (23)$$

$$\mu_N(t) = \mu_{N+1}(t) (1 + \alpha_N(t) b_N(t))^{-1} \quad (24)$$

Erreurs retrogrades a posteriori:

$$\bar{b}_N(t) = \mu_N(t) b_N(t) \quad (25)$$

$$\tilde{\bar{b}}_N(t) = \mu_N(t) \tilde{b}_N(t) \quad (26)$$

Gains d'ordre N:

$$K_N(t) = (G_N(t) - \delta_N(t) C_N(t-1)) (1 + b_N(t) \delta_N(t))^{-1} \quad (27)$$

$$\tilde{K}_N(t) = (\tilde{G}_N(t) - \tilde{\delta}_N(t) \tilde{C}_N(t-1)) (1 + \tilde{b}_N(t) \tilde{\delta}_N(t))^{-1} \quad (28)$$

Prédicteurs retrogrades:

$$C_N(t) = C_N(t-1) + K_N(t) b_N(t) \quad (29)$$

$$\tilde{C}_N(t) = \tilde{C}_N(t-1) + \tilde{K}_N(t) \tilde{b}_N(t) \quad (30)$$

L'algorithme présenté ici, comme pour les MCR, admet d'autres versions qui ne diffèrent entre elles que par la mise à jour de certaines variables ($\mu_N(t)$, $b_N(t)$, $\tilde{b}_N(t)$).

Stabilisation numérique:

Une méthode de stabilisation analogue à celles développées pour le cas de FTF [12][13] a été appliquée à FTRIV pour le rendre stable. Elle est basée sur l'introduction de redondances supplémentaires:

$$b_N^{(2)} = -\lambda^{-N} F_N(t) \tilde{K}_{N+1}^{(N+1)}(t) \quad (31)$$

$$\tilde{b}_N^{(2)} = -\lambda^{-N} F_N(t) K_{N+1}^{(N+1)}(t) \quad (32)$$

On a vérifié sa stabilité par simulation numérique, Fig-5

Résultats expérimentaux:

Pour évaluer les performances des différents algorithmes d'identification, nous considérons deux types de modèles AR:

* Modèles conduisant à une matrice de rang plein.

* Modèles pour lesquels la matrice est singulière.

En utilisant le modèle $a_1 = -1.5$ et $a_2 = 0.8$ (matrice de rang plein), l'application des algorithmes FTRIV et General Lattice donne les estimés des figures suivantes. Une première analyse des courbes nous permet de tirer les constatations suivantes:

* Une convergence assez rapide du GL par rapport à FTRIV Fig-1 et Fig-2.

* La fig-3 montre bien l'instabilité numérique de FTRIV, (la divergence de l'algorithme pour de faibles valeurs du facteur d'oubli).

Dans le cas d'une matrice singulière, nous considérons le modèle suivant $a_1 = 1$ et $a_2 = 0.75$. Nous remarquons une dégradation des paramètres avec FTRIV et GL. En se basant sur la même idée que dans [9] (utilisant une combinaison linéaire des cumulants 1-D slice), on aboutit à une version de FTRIV (Wslic-FTRIV). Notons que les coefficients du treillis W-slice sont adaptés suivant (GAL2) [9]. La fig-4 illustre bien la supériorité de cette approche, et cela se justifie également par une amélioration dans l'estimation des paramètres et une réduction notable dans leur variance.

Conclusion:

Nous avons présenté une version rapide transversale de la méthode de la variable instrumentale (FTRIV). Afin de contourner le problème de la non identifiabilité dans le cas d'une matrice singulière et de la division par zéro, nous avons utilisé une combinaison linéaire des cumulants 1-D slice pour améliorer la performance de FTRIV tout en préservant la même complexité de calcul ($12N$). Notons également que cette version Wslice-FTRIV, peut être utilisée pour l'identification des processus ARMA non-gaussiens.

Références:

- [1] A. Benallal, A. Gilloire, "A new method to stabilize fast RLS algorithms based on first-order model of propagation of numerical errors", Proc. of ICASSP'88, New York.
- [2] H.H. Chiang, C.K. Nikias, "Adaptive Filtering via cumulants and the LMS Algorithm", IEEE - ICASSP-88, USA, pp. 1479-1482.
- [3] J.M. Cioffi and T. Kailath, "Fast fixed order, least squares algorithms for adaptive filtering", In Proc. ICASSP'83, Boston, May-April 1983, vol-2.
- [4] B. Friedlander and B. Porat, "Modified Yule-Walker method of ARMA spectral estimation", IEEE Trans Aerospace and Electronic systems,



- Vol-20, pp.158-173, March-1984.
- [5] B.Friedlander and B.Porat, "Adaptive IIR algorithms based on higher-order statistics", IEEE Trans.ASSP, Vol-37, pp. 485-495, April-89.
- [6] M.L.Honig and D.G.Messershmidt, "Adaptive Filters Structures, Algorithms and Applications" Kalawen Academic Publishers, Boston USA 1984.
- [7] S. Ljung and L. Ljung, "Error propagation analysis of RLS adaptation algorithms", Automatica, vol-Aut-21, n°2, Feb.1985.
- [8] C.L.Nikias and M. R.Raghuveer, "Bispectrum estimation: A digital signal processing framework", Proc. IEEE, Vol-75, pp. 869-891, 1987.
- [9] J. A. Rodriguez-Fonollosa, J. Vidal and E.Masgrau, "Adaptive system identification based on higher-order statistics", Proc. ICASSP-91, pp. 3437-3440.
- [10] D. T. M. Slock and T. Kailath, "Numerically stable fast RLS transversal filters, Proc. of ICASSP'88, New York.
- [11] A. Swami and J.M. Mendel "Adaptive System Identification Using Cumulants", IEEE ICASSP-88, USA, pp. 2248-2251.
- [12] A. Swami and J. M. Mendel, "ARMA parameter using output cumulants", IEEE Trans ASSP. Vol-38, pp. 1257-1265, July-90.
- [13] J.K.Tugnait, "Comments on cumulants: A powerful tools in signal processing", Proc.IEEE, pp. 491-492, March-89.

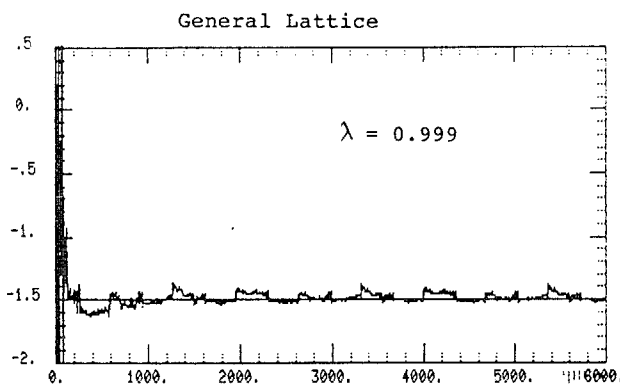


Fig.1.

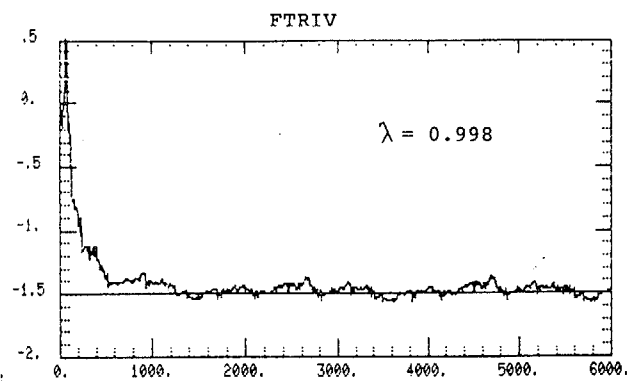


Fig.2.

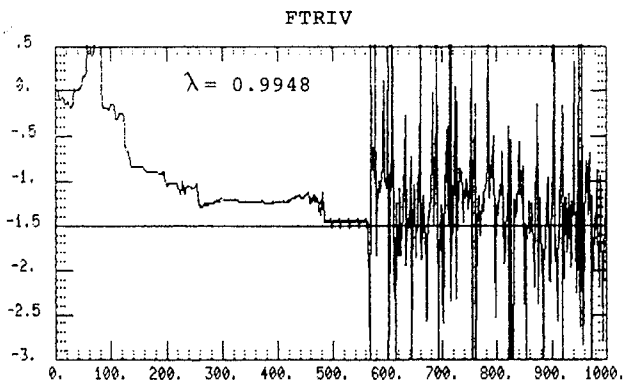


Fig.3.

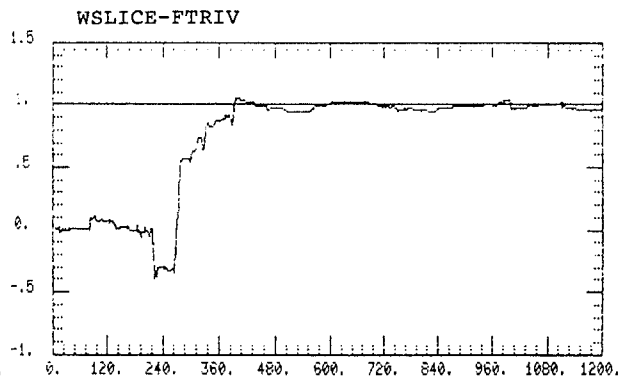


Fig.4.

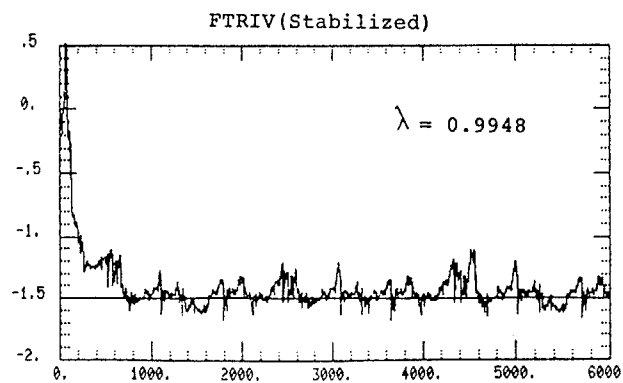


Fig.5.