





Une factorisation de la matrice bispectrale sous forme Diagonale-Toeplitz-Diagonale (DTD) livre ainsi la séquence  $\{H(-K) \dots H(K)\}$ . C'est à cette factorisation que nous allons maintenant nous intéresser.

### 3. ALGORITHME DE FACTORISATION

On cherche donc à factoriser une matrice  $B$  sous la forme

$$B = D_1 T D_2, \quad (5)$$

où  $D_1$  et  $D_2$  sont deux matrices diagonales et  $T$  une matrice de Toeplitz. Sans perte de généralité, on supposera que  $T(1, 1) = t(0) = 1$ . L'algorithme de factorisation exploite une récurrence sur l'ordre. En effet, à l'ordre  $n + 1$ , on a sous forme partitionnée

$$\begin{bmatrix} B_n & \vdots & b_1(n+1) \\ \dots & & \mathbf{b}_{1,n} \\ b_2(n+1) & \mathbf{b}_{2,n}^T & B(n+1, n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(0) & & (0) \\ (0) & D_{1,n} & \\ & & d_1(n+1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_n & \vdots & t_1(n+1) \\ \dots & & \mathbf{t}_{1,n} \\ t_2(n+1) & \mathbf{t}_{2,n}^T & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_2(0) & & (0) \\ (0) & D_{2,n} & \\ & & d_2(n+1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

où les inconnues  $d_1(n+1)$ ,  $d_2(n+1)$ ,  $t_1(n+1)$  et  $t_2(n+1)$  doivent vérifier

$$d_2(n+1)D_{1,n}t_1(n) = \mathbf{b}_{1,n}, \quad (7a)$$

$$d_1(n+1)t_2^T(n)D_{2,n} = \mathbf{b}_{2,n}^T, \quad (7b)$$

$$d_2(0)d_1(n+1)t_2(n+1) = b_2(n+1) \quad (7c)$$

$$d_1(0)d_2(n+1)t_1(n+1) = b_1(n+1). \quad (7d)$$

La résolution est immédiate: les deux premières relations livrent  $d_1(n+1)$  et  $d_2(n+1)$ , qui reportés dans les deux suivantes donnent  $t_1(n+1)$  et  $t_2(n+1)$ . Notons toutefois que les relations (7a) et (7b) sont surdéterminées: on pourra alors construire plusieurs variantes de résolution. On peut par exemple adopter une résolution aux moindres carrés qui conduit à:

$$d_2(n+1) = \frac{\mathbf{u}_{1,n}^T \mathbf{b}_{1,n}}{\mathbf{u}_{1,n}^T \mathbf{u}_{1,n}}, \text{ avec } \mathbf{u}_{1,n} = D_{1,n} t_1(n). \quad (8)$$

On peut également retenir comme estimée la moyenne des solutions des  $Q$  relations (7a)

$$d_2(n+1) = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \frac{[b_{1,n}]_q}{[t_1(n)]_q}, \quad (9)$$

où  $[\cdot]_q$  indique la  $q^e$  composante du vecteur considéré.

**Lien avec les algorithmes récursifs.** Sous cette dernière forme, la procédure de factorisation est identique aux algorithmes récursifs de reconstruction à partir du bispectre,

voir par exemple [1, 2]. Ces algorithmes reposent sur la relation:

$$H(k_1) = \frac{B(k_1, -k_2)}{H(-k_2)H(k_1 - k_2)}, \quad (10)$$

qui permet de reconstruire récursivement la séquence  $H(k)$ , pourvu que  $k_2 < k_1$ . Notons que cette relation est aussi le fondement de la procédure de factorisation que nous présentons, procédure qu'il faut interpréter comme une autre vision de ces algorithmes, à travers une propriété «structurale» de la matrice bispectrale.

**Initialisation.** L'initialisation consiste à choisir  $d_1(0)$ ,  $d_2(0)$  et  $d_1(1)$ ,  $d_2(1)$ . On ne dispose pour cela que des relations

$$d_1(0)d_2(0) = B(0, 0), \quad (11)$$

$$d_1(1)d_2(1) = B(1, 1), \quad (12)$$

qui ne suffisent pas à déterminer complètement ces valeurs initiales. On peut alors se contenter de prendre

$$\hat{d}_1(0) = \hat{d}_2(0) = \sqrt{B(0, 0)}, \quad (13)$$

$$\text{et } \hat{d}_1(1) = \hat{d}_2(1) = \sqrt{B(1, 1)}. \quad (14)$$

Il convient d'examiner quelles sont les conséquences de ce choix sur la solution obtenue à l'issue de la factorisation. Pour des raisons de simplicité, on se contente de l'une des équations disponibles dans (7a) et (7b). On obtient alors, au rang  $k$ ,

$$h_1(k) = \frac{B(1, k+1)}{B(2, k+1)} \dots \frac{B(1, 2)}{B(2, 2)} \left[ \frac{d_1(1)}{d_1(0)} \right]^k, \quad (15)$$

L'estimée  $\hat{h}_1(k)$  vérifiant la même relation avec comme valeurs initiales  $\hat{d}_1(0)$  et  $\hat{d}_1(1)$ , il vient

$$\frac{\hat{h}_1(k)}{h_1(k)} = \left[ \frac{\hat{d}_1(1)d_1(0)}{\hat{d}_1(0)d_1(1)} \right]^k = \rho^k, \quad (16)$$

et on obtient de la même façon

$$\frac{\hat{h}_2(k)}{h_2(k)} = \left[ \frac{\hat{d}_2(1)d_2(0)}{\hat{d}_2(0)d_2(1)} \right]^k = \rho^{-k}. \quad (17)$$

L'indétermination des conditions initiales conduit ainsi à un facteur exponentiel sur la solution. Ceci n'est pas surprenant car nous avons vu que le bispectre est justement insensible à un tel facteur.

On peut d'ailleurs observer que cette indétermination est comprise dans la structure DTD que nous avons examinée. Soient en effet  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux matrices diagonales, alors

$$B = D_1 T D_2, \quad (18a)$$

$$= \rho_1 \rho_1^{-1} D_1 T D_2 \rho_2 \rho_2^{-1} \quad (18b)$$

$$= \rho_1 D_1 \rho_1^{-1} T \rho_2 D_2 \rho_2^{-1}. \quad (18c)$$

Ainsi, en notant que  $T' = \rho_1^{-1} T \rho_2$  ne conserve une structure de Toeplitz qu'à la condition  $\rho = \rho_1 = \rho_2$  avec  $\rho$  de la forme  $\text{diag}[\rho^0 \dots \rho^K]$ , on constate que la transformation  $D_1' = \rho D_1$ ,  $D_2' = \rho^{-1} D_2$  et  $T' = \rho^{-1} T \rho$ , c'est-à-dire un facteur exponentiel tel qu'en (16) et (17), conduit également à une factorisation DTD de  $B$ .

**Réduction de l'algorithme dans le cas de signaux réels.** Dans le cas des signaux réels, les relations de symétrie hermitienne conduisent à rechercher la factorisation sous la forme  $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{T}\mathbf{D}^*$ , où  $\mathbf{T}$  est cette fois de Toeplitz symétrique. La procédure précédente peut donc être simplifiée de manière à tenir compte de  $d_2 = d_1^*$ , et  $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1^*$ .

#### 4. EXTENSION POLYSPECTRALE

Pour un polyspectre d'ordre  $q + 1$  supérieur à 3, on a

$$P_{q+1}(\nu_1, \dots, \nu_q) = \beta_{q+1} H(\nu_1) \dots H(\nu_q) H(-\nu_1 - \dots - \nu_q), \quad (19)$$

où  $\beta_{q+1}$  est le cumulante d'ordre  $q + 1$  du bruit blanc générateur. En fixant  $q - 2$  fréquences  $\nu_k$ , ceci se réduit à

$$P_{q+1}(\nu_i, \nu_j) = \gamma_{q+1} H(\nu_i) H(\nu_j) H(-\nu_i - \nu_j - \alpha) \quad (20)$$

avec  $\alpha = \sum_{k=1}^q \nu_k$ ,  $k \neq i, j$  et  $\gamma_{q+1} = \beta_{q+1} \prod_{k=1}^q H(\nu_k)$ ,  $k \neq i, j$ . De la même façon que dans le cas bispectral, on peut définir

$$P_{q+1}(i, j) = \gamma_{q+1} H(i) H(-j) H(j - i - \alpha), \quad (21)$$

et on exhibe alors à nouveau une structure DTD :

$$\mathbf{P}_{q+1} = \gamma_{q+1} \mathbf{D}_1 \mathbf{T} \mathbf{D}_2, \quad (22)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1 = \text{diag}\{H(0), \dots, H(K)\} \\ \mathbf{T} = \text{Toeplitz}\{[H(-\alpha), \dots, H(-K - \alpha)], \\ [H(-\alpha), \dots, H(K - \alpha)]\} \\ \mathbf{D}_2 = \text{diag}\{H(0), \dots, H(-K)\} \end{cases} \quad (23)$$

La matrice bispectrale formée à partir d'une « tranche » de polyspectre d'ordre  $q + 1$  admet donc elle aussi une structure DTD, et l'algorithme de factorisation bispectral peut ainsi être employé pour des polyspectres d'ordre quelconque. Dans le cas de signaux réels, les matrices  $\mathbf{D}$  sont conjuguées, mais la matrice de Toeplitz reste non symétrique (sauf si  $\alpha$  est choisi égal à zéro). L'algorithme de factorisation pourra alors être aménagé.

#### 5. EXTENSION MULTIDIMENSIONNELLE

La procédure de factorisation précédente peut s'étendre au cas de signaux multidimensionnels. Si l'on considère par exemple le signal bivarié  $x(n, m)$  comme la sortie d'un filtre linéaire de réponse en fréquence  $H(\nu_1, \nu_2)$  excité par un bruit blanc  $u(m, n)$  dont le moment d'ordre 3 est  $\beta$ , le bispectre s'écrit

$$B(\nu_1, \nu_2, \nu'_1, \nu'_2) = \beta H(\nu_1, \nu_2) H(\nu'_1, \nu'_2) H(-\nu_1 - \nu_2, -\nu'_1 - \nu'_2).$$

On peut alors définir le tenseur bispectral  $\tilde{\mathbf{B}}$  par

$$\tilde{\mathbf{B}}(i, j, k, l) = \beta H(i, j) H(-k, -l) H(k - i, l - j). \quad (24)$$

Notons maintenant  $\mathbf{B}_{ik}$  la matrice  $\mathbf{B}_{ik} = \tilde{\mathbf{B}}(i, j, k, l)$  pour  $i$  et  $k$  fixés. Cette matrice admet une structure DTD :

$$\mathbf{B}_{ik} = \mathbf{D}_i \mathbf{T}_{k-i} \mathbf{D}_{-k}, \quad (25)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{D}_i = \text{diag}\{H(i, 0), \dots, H(i, N - 1)\} \\ \mathbf{T}_{k-i} = \text{Toeplitz}\{[H(k - i, 0), \dots, H(k - i, 1 - N)], \\ [H(k - i, 0), \dots, H(k - i, N - 1)]\} \\ \mathbf{D}_{-k} = \text{diag}\{H(-k, 0), \dots, H(-k, 1 - N)\} \end{cases} \quad (26)$$

On peut collecter toutes les valeurs du tenseur bispectral sous la représentation matricielle

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{0N-1} \\ \mathbf{B}_{N-10} & \mathbf{B}_{N-1N-1} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Dans ces conditions,  $\tilde{\mathbf{B}}$  s'écrit elle aussi sous une forme DTD, notée  $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{D}}_1 \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{D}}_2$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & (0) \\ \vdots & \vdots \\ (0) & \mathbf{D}_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \dots & \mathbf{T}_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{T}_{1-N} & \dots & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{-0} & (0) \\ \vdots & \vdots \\ (0) & \mathbf{D}_{1-N} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, on peut former une nouvelle matrice à structure DTD, dont les « éléments » possèdent eux-même cette structure. L'algorithme de factorisation procède alors de la même démarche que dans le cas scalaire, si ce n'est qu'il faut cette fois-ci s'intéresser aux blocs de la matrice  $\tilde{\mathbf{B}}$ . Notons que dans le cas de signaux réels, les relations de symétrie hermitienne conduisent à  $\tilde{\mathbf{D}}_2 = \tilde{\mathbf{D}}_1^*$ , et  $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}^*$  (les blocs de la matrice bloc de Toeplitz vérifient en effet  $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{-k}^*$ ). Ces relations pourront être utilisées pour réduire la charge de calcul dans une procédure de factorisation DTD spécifique du cas réel.

Il convient cependant à nouveau de se préoccuper des questions d'initialisation et de leurs conséquences. L'initialisation consiste maintenant à choisir  $\hat{\mathbf{D}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{D}}_{-0}$ ,  $\hat{\mathbf{D}}_1$  et  $\hat{\mathbf{D}}_{-1}$ , ceci à partir des deux conditions

$$\mathbf{D}_0 \mathbf{T}_0 \mathbf{D}_{-0} = \mathbf{B}_{00}, \quad (28a)$$

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{T}_0 \mathbf{D}_{-1} = \mathbf{B}_{11}. \quad (28b)$$

On obtient facilement  $\hat{\mathbf{D}}_0$  et  $\hat{\mathbf{T}}_0$  en utilisant l'algorithme de factorisation du cas scalaire.  $\mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{D}_{-1}$  se déduisent alors immédiatement. Nous avons déjà observé que la factorisation (28a) est obtenue à une matrice diagonale  $\rho$  près :  $\hat{\mathbf{D}}_0 = \rho \mathbf{D}_0$ , et  $\hat{\mathbf{T}}_0 = \rho^{-1} \mathbf{T}_0 \rho$ . Les matrices  $\mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{D}_{-1}$  sont quant à elles obtenues avec un facteur supplémentaire  $\alpha$  indéterminé :  $\hat{\mathbf{D}}_1 = \alpha \rho \mathbf{D}_1$ , et  $\hat{\mathbf{D}}_{-1} = \alpha^{-1} \rho \mathbf{D}_{-1}$ . Dès lors, on vérifie aisément que l'estimée au rang  $k$  s'exprime comme

$$\hat{\mathbf{T}}_k = \alpha^{-k} \rho^{-1} \mathbf{T}_k \rho. \quad (29)$$

En se souvenant que  $\mathbf{T}_k$  est construit à partir de la  $k^e$  ligne de la transformée de Fourier  $H(m, n)$ , on retrouve que  $H(m, n)$  ne peut être reconstruit qu'à un facteur exponentiel près :

$$\hat{H}(m, n) = H(m, n) \exp(\rho m + \alpha n). \quad (30)$$

Comme dans le cas monodimensionnel, on peut relier cette propriété d'invariance du bispectre à la structure DTD : les matrices  $\hat{\mathbf{D}}'_1 = \mathbf{R} \hat{\mathbf{D}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{D}}'_2 = \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{D}}_2$  et  $\hat{\mathbf{T}}' = \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{T}} \mathbf{R}$ , constituent encore une factorisation DTD de  $\tilde{\mathbf{B}}$  lorsque  $\mathbf{R}$  est de la forme  $\mathbf{R} = \text{diag}[\rho^0 \dots \rho^K] \otimes [\alpha^0 \dots \alpha^K]$ , où  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker.

La démarche présentée ici dans le cas 2D peut s'étendre sans difficulté à la fois à des dimensions et des ordres supérieurs.



## 6. EXEMPLES D'APPLICATION

Dans cette section, nous donnons tout d'abord un exemple permettant de discuter de la mise en œuvre et du comportement de la procédure de factorisation. Nous indiquons, d'autre part, quelques applications pratiques.

Dans un premier exemple, nous avons envisagé l'identification d'un filtre à phase non minimale. Plusieurs points sont à retenir :

- l'intervention d'une phase linéaire sur le signal reconstruit nécessite de corriger la phase, en particulier afin de fixer la phase du point central de symétrie hermitienne à zéro,

- la substitution des valeurs exactes du bispectre par des valeurs estimées peut entraîner, dans le cas réel, un défaut d'initialisation et par conséquent un facteur exponentiel «illicite» sur la reconstruction. On pourra alors estimer séparément le module, soit en retenant la diagonale principale de la matrice bispectrale, soit en compensant le facteur exponentiel introduit.

La Figure 1 compare la phase du filtre (en trait plein) et l'estimée (pointillé) obtenue en utilisant l'algorithme de factorisation. La simulation a été menée à partir de données sur 2560 points.

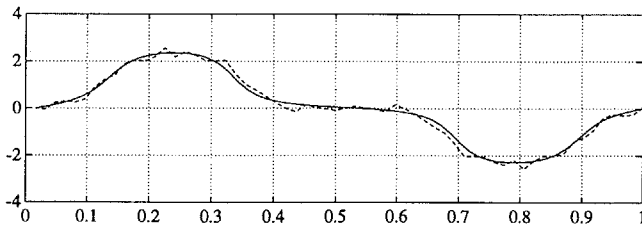


Figure 1 : Comparaison des phases

### 6.1. IDENTIFICATION D'ONDELETTES EN SISMIQUE

En sismique réflexion, ou plus généralement en échographie de milieux stratifiés, on cherche à reconstituer la structure interne d'un matériau en étudiant la propagation d'une ondelette dans ce matériau. Les réflexions de cette ondelette sur les strates successives du matériau sont recueillies, avec un décalage de temps lié à la profondeur et au trajet, sur un ensemble de capteurs formant une antenne. Les traces obtenues sont alors souvent modélisées comme le résultat d'une convolution entre l'ondelette incidente et une séquence bernoulli-gaussienne (BG) figurant les positions des réflecteurs (événements bernoulli) et la valeur de la réflectivité (amplitudes gaussiennes). L'identification de cette séquence bernoulli-gaussienne à partir de la trace mesurée et de la connaissance de l'ondelette permet alors de reconstituer la structure interne.

L'ondelette est identifiée en moyennant, quand c'est possible, des échos isolés. Lorsque l'ondelette est inconnue, le problème de déconvolution précédent devient un problème myope.

L'ondelette constituant la réponse impulsionnelle d'un filtre excité par une séquence BG, il est possible d'identifier cette réponse impulsionnelle, ou plutôt sa transformée de Fourier, à l'aide de l'algorithme présenté précédemment. On utilise pour ce faire le trispectre (car le moment d'ordre 3 d'une séquence BG est nul).

La Figure 2 rapporte l'identification d'une ondelette, typique en sismique réflexion, dans les conditions suivantes. Disposant d'une séquence de 1000 points de données, brui-

tées par un bruit blanc gaussien avec un rapport signal à bruit de 8 dB, on a estimé la «matrice trispectrale» comme la moyenne des matrices calculées à partir de 60 séquences de 32 points, avec un recouvrement de 50 % entre les séquences successives. L'ondelette initiale est représentée en trait plein.

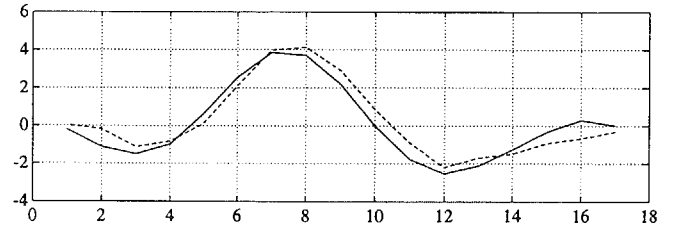


Figure 2 : Identification d'une ondelette

### 6.2. CLÔTURE DE PHASE

Les techniques bispectrales ont été reliées depuis [3] à la notion de clôture de phase utilisée en imagerie interférométrique. Dans ce domaine, on cherche à reconstruire la distribution de brillance émise par un champ aléatoire. Pour cela, on utilise le fait que l'ensemble des intercorrélations calculées à partir de données recueillies sur un réseau de capteurs n'est autre que la transformée de Fourier spatiale de la distribution recherchée (théorème de Van Cittert-Zernicke). L'estimée de cette intercorrélacion, entre deux capteurs situés respectivement en  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_j$  s'écrit, en posant  $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$ ,

$$\hat{\gamma}(\mathbf{u}_{ij}) = g_i g_j^* \gamma(\mathbf{u}_{ij}), \quad (31)$$

où  $g_i$  et  $g_j$  figurent les gains d'antenne. Si ces gains ont un module relativement constant, et sont par conséquent normalisables, ils sont en revanche affectés d'une distorsion de phase liée aux conditions météorologiques. On a alors

$$\hat{\gamma}(\mathbf{u}_{ij}) = \exp(j(\phi_i - \phi_j)) \gamma(\mathbf{u}_{ij}). \quad (32)$$

Les astronomes ont alors remarqué qu'en groupant ces données par trois, on obtient une quantité indépendante des facteurs de phase, dont la phase constitue la relation de clôture de phase :

$$\hat{\gamma}(\mathbf{u}_{ij}) \hat{\gamma}(\mathbf{u}_{jk}) \hat{\gamma}(\mathbf{u}_{ki}) = \gamma(\mathbf{u}_{ij}) \gamma(\mathbf{u}_{jk}) \gamma(\mathbf{u}_{ki}). \quad (33)$$

En notant que  $\mathbf{u}_{ki} = -\mathbf{u}_{ij} - \mathbf{u}_{jk}$ , on reconnaît en (33) l'expression d'un bispectre 2D, que les astronomes nomment également, en raison de la structure de (33), une «triple corrélation».

La reconstruction des données débarrassées des distorsions de phase passe alors par une étape de factorisation bispectrale analogue à la procédure que nous avons présentée [1, 2].

## 7. RÉFÉRENCES

- [1] H. Bartlett, A.W. Lohmann, B. Wirnitzer, «Phase and amplitude recovery from bispectra,» *Appl. Opt.*, vol. 23, pp. 3121 - 3129, 1984.
- [2] B. M. Sadler, G. B. Giannakis, «Shift and rotation invariant object reconstruction using the bispectrum,» *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 9, n° 1, pp. 57 - 69, 1992.
- [3] F. Roddier, «Triple correlations as a Phase Closure Technique,» *Optics Communications*, vol. 60, n° 3, 1986.