



Etude Comparative d'Algorithmes Récursifs de Détection de Ruptures Spectrales.

B. Vozel*, C. Doncarli

Laboratoire d'Automatique de Nantes, Unité associée au C.N.R.S. n° 823,
Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes, 1 rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex 03.
Membres du GdR 134 CNRS "Traitement du Signal et des Images".

*Travail soutenu par le C.N.R.S et la Région "Pays de la Loire".

Résumé

La problématique associée à la détection et au diagnostic de comportements brusquement anormaux dans les propriétés spectrales des signaux aléatoires, largement étudiée dans la littérature, donne lieu à différentes approches. On s'intéresse ici à la notion de "ruptures de modèles" où l'on suppose l'existence d'une modélisation dynamique paramétrique du signal de type AR ou ARMA présentant de brusques variations. Les méthodes ainsi basées sur la détection d'un changement brusque et instantané d'un ou de plusieurs paramètres du modèle ont été rassemblées lors d'un travail collectif du GDR TdSI [1], mais aucune étude comparative des performances des divers algorithmes n'a encore été menée. On se propose donc de brièvement rappeler chaque méthode en mettant bien en lumière les familles auxquelles elles appartiennent, puis de les tester comparativement sur une très large population de signaux.

Abstract

The problematic of detection and diagnostic of abrupt abnormal behaviours in spectral properties of random signals has been largely studied in the literature. Different approaches has been so prospected. Here, we are interested in the idea of "models rupture", where it is assumed that the studied signals are described by a parametric modelisation of type AR or ARMA with abrupt changes. The methods based on the detection of an abrupt and instantaneous change of either one or several parameters of the model had been collected during a previous collective work of the GDR TdSI [1], but any comparative study of the efficiency of the different algorithms has been performed yet. So we propose ourselves firstly to briefly recall all the methods, bringing out precisely the respective class they belong to, and then to test and compare them on a very large signals population.

I) Position du problème.

Les signaux étudiés sont supposés suivre un modèle gaussien-markovien de type AR ou ARMA. L'équation du modèle peut alors s'écrire sous la forme générale :

$$y_k = \phi_k^T \theta + e_k$$

où y_k est le signal étudié

e_k est une séquence blanche gaussienne de variance inconnue v_k

Dans le cas AR d'ordre p :

$$\phi_k^T = (-y_{k-1}, -y_{k-2}, \dots, -y_{k-p})$$

$$\theta^T = (a_1, a_2, \dots, a_p)$$

Dans le cas ARMA d'ordre (p, q) :

$$\phi_k^T = (-y_{k-1}, \dots, -y_{k-p}, c_{k-1}, \dots, c_{k-q})$$

$$\theta^T = (a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_q)$$

Avec cette première hypothèse, la détection d'un saut spectral se réduit alors à la détection d'un saut brusque et instantané d'un ou de plusieurs coefficients du modèle et / ou de la variance du bruit d'entrée (la structure et l'ordre du modèle étant supposés constants).

Cela se traduit formellement par un test entre les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{ll} H_0 : & \theta = \theta_0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, n \\ & v_k = v_0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, n \\ H_1 : & \theta = \theta_0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, r-1 \\ & v_k = v_0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, r-1 \\ & \theta = \theta_1 \quad \text{pour } k = r, \dots, n \\ & v_k = v_1 \quad \text{pour } k = r, \dots, n \end{array}$$

qui signifient, sous H_0 , que le vecteur paramètre θ est constant, de valeur inconnue θ_0 pendant toute la durée d'observation du signal alors

que sous H_1 , il existe un instant inconnu r où le vecteur paramètre θ subit un saut de la valeur constante et inconnue θ_0 à une autre valeur constante et inconnue θ_1 .

Observant séquentiellement les échantillons du signal, *i.e.* y_0, y_1, \dots, y_k , le problème est donc de décider à chaque instant k si nous sommes sous l'hypothèse H_0 ou H_1 et de caractériser le changement si nécessaire (en identifiant θ_1 par exemple).

La méthode fondamentale pour résoudre ce genre de problème est l'utilisation de la théorie bayésienne de la décision mais il n'est pas facile d'en écrire une version récursive dans tous les cas de figure et certaines approximations de cette règle optimale sont alors proposée dans la littérature.

II) Classification des méthodes.

Les méthodes peuvent être qualitativement regroupées en deux classes.

La première regroupe les méthodes où on teste les propriétés statistiques d'une erreur de prédiction linéaire (ou d'une statistique) construite à partir du signal au moyen d'un algorithme récursif d'identification : Moindres Carrés [2], FKE (Filtrage de Kalman Etendu) [2], MVR (Maximum de Vraisemblance Récursif) [2]... L'erreur de prédiction linéaire (ou la statistique) ainsi obtenue devient généralement plus énergétique, décentrée ou colorée dès l'instant où une rupture spectrale se produit, alors qu'elle était centrée et indépendante auparavant. Chaque méthode de cette première classe utilise alors un test spécifique pour détecter le comportement attendu de la statistique en présence d'une rupture.

La deuxième classe comprend les méthodes où deux (ou trois) modèles paramétriques du signal sont estimés sur des fenêtres d'observation différentes (généralement une fenêtre long terme donnant un modèle de référence et une fenêtre court terme donnant un modèle test). Des facteurs d'oubli exponentiel sont alors introduits dans les



mêmes algorithmes récursifs d'identification que ceux utilisés précédemment pour fixer la longueur des différentes fenêtres impliquées. Les modèles ainsi obtenus sont comparés au moyen d'une distance appropriée [3]. Une rupture provoque une brusque augmentation de la distance utilisée.

Première Classe

Energie de l'Erreur de Prédiction Linéaire (EPL) [1].

L'erreur de prédiction linéaire (EPL) étudiée est définie selon que l'on considère un modèle AR ou ARMA par :

$$\text{soit } \epsilon_k = y_k - \sum_{i=1}^p \hat{a}_i y_{k-i}$$

où $(\hat{a}_i) 1 \leq i \leq p$ sont les coefficients du modèle identifié AR (p)

$$\text{soit } \epsilon_k = y_k - \sum_{i=1}^p \hat{a}_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^q \hat{c}_i \epsilon_{k-i}$$

où $(\hat{a}_i) 1 \leq i \leq p$

$(\hat{c}_i) 1 \leq i \leq q$, sont les coefficients du modèle identifié ARMA (p,q)

L'augmentation soudaine de la valeur absolue de cette erreur de prédiction linéaire ϵ_k est alors grossièrement estimée par le nombre N de dépassements successifs d'un seuil fixé a priori λ_ϵ .

Si à l'instant k, N devient plus grand qu'une valeur fixée N_D (généralement 4 ou 5), alors la présence d'un saut est décidée et l'estimation de l'instant de changement est donnée par $k-N_D+1$.

En pratique, N_D apparait comme un paramètre de réglage qui peut être validé éventuellement par un jeu d'apprentissage.

Blancheur de l'Erreur de Prédiction Linéaire [1]

La blancheur de l'erreur de prédiction linéaire est testée en calculant une estimation ergodique de la valeur de la fonction de corrélation du signal étudié pour un décalage unitaire. Cette estimation est réalisée au moyen de l'équation récursive suivante :

$$\rho_k = \alpha \rho_{k-1} + (1-\alpha) \epsilon_k \epsilon_{k-1}$$

où α est un facteur d'oubli exponentiel [2].

Si à l'instant k, la valeur absolue de ρ_k devient plus grande qu'un seuil fixé a priori λ_ρ la présence d'un saut est décidée et l'estimation de l'instant de changement est donnée par k.

Méthode Locale [4]

La méthode est basée sur l'inspection du vecteur de mise à jour $H(\theta_k, X_k)$ associé à tout algorithme d'identification récursive de la forme suivante:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Gamma_k H(\theta_k, X_k)$$

où θ_k est le vecteur paramètre identifié à l'instant k

Γ_k est le gain de l'algorithme

X_k est le vecteur d'état résumant les mesures nécessaires au processus d'identification (par exemple, X_k est souvent composé du vecteur de régression et de l'erreur de prédiction linéaire[4])

Etant donné un enregistrement $y_0, \dots, y_1, \dots, y_n$ du signal étudié,

un modèle nominal θ_0 choisi par l'utilisateur (éventuellement identifié sur un jeu d'apprentissage $y_{-1}, y_{-1+1}, \dots, y_0$ avec $l \ll n$),

Considérant les deux hypothèses suivantes :

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, n$$

$H_1 : \text{il existe un instant } r \text{ tel que:}$

$$\theta = \theta_0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, r-1$$

$$\theta = \theta_1 = \theta_0 + \frac{\delta\theta}{\sqrt{n}} \quad \text{pour } k = r, \dots, n \quad (\delta\theta \text{ fixé et inconnu})$$

qui signifie que:

sous H_0 , le modèle nominal θ_0 est égal au vrai modèle θ sur la totalité de l'enregistrement,

sous H_1 , il apparait à un instant inconnu r de l'enregistrement un écart d'amplitude constante (d'ordre de grandeur $\frac{1}{\sqrt{n}}$) entre le vrai modèle θ

et le modèle nominal θ_0 ,

l'inspection du vecteur de mise à jour $H(\theta_k, X_k)$ sous respectivement H_0 et H_1 , est alors réalisée au moyen de l'inspection de la somme cumulée $D_n(\theta)$ définie ci-dessous, dont le comportement sous les deux hypothèses précédentes est complètement définie de façon théorique dans [5].

$$D_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n H(\theta_k, X_k)$$

$D_n(\theta)$ est normalement noté dépendant du vrai modèle θ , bien que celui-ci soit inaccessible à l'utilisateur mais supposé être identifié par l'algorithme récursif d'identification choisi.

Dans cet article, nous rappelont uniquement une méthode générale qui permet d'associer à tout algorithme d'identification récursive une procédure de détection séquentielle. Voir [5] pour plus de détails.

Comme le modèle nominal est supposé égal au vrai modèle sous H_0 , les variables aléatoires $\{ H(\theta_k, X_k) \}_{1 \leq k \leq n}$ peuvent être notées $\{ Z_k(\theta_0) \}_{1 \leq k \leq n}$.

Maintenant, en supposant les variables aléatoires $\{ Z_k(\theta_0) \}_{1 \leq k \leq n}$ indépendantes et normalement distribuées de la façon suivante :

$$H_0 : Z_k(\theta_0) \sim \mathcal{N}(0, R(\theta_0)) \quad \text{for } k = 1, \dots, n$$

$$H_1 : \sim \mathcal{N}(0, R(\theta_0)) \quad \text{for } k = 1, \dots, r-1$$

$$\sim \mathcal{N}(-h\theta(\theta_0) \delta\theta, R(\theta_0)) \quad \text{for } k = r, \dots, n$$

où

$$R(\theta_0) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \text{cov}(H(\theta_0, X_k), H(\theta_0, X_0))_{\theta_0}$$

$$h\theta(\theta_0) = \frac{\partial}{\partial \theta} h(\theta_0)$$

$$\text{où } h(\theta_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} E[H(\theta_0, X_k)]_{\theta_0}$$

il advient que la somme cumulée $D_n^*(\theta)$ définie par:

$$D_n^*(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_k(\theta_0)$$

a le même comportement asymptotique que la somme cumulée $D_n(\theta)$, celui-ci étant décrit dans [5]. Le problème initial de détection d'un saut spectral a ainsi été transformé en un problème de détection d'un saut d'amplitude inconnue dans la moyenne du processus gaussien $\{ H(\theta_k, X_k) \}_{1 \leq k \leq n}$.

Un test du Rapport de Vraisemblance Généralisé entre les deux dernières hypothèses H_0 et H_1 est finalement appliqué et fournit le critère de décision suivant:

$$G_k = \max_r S_r^k$$

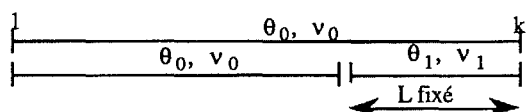
$$\text{où } S_r^k = (\Delta_r^k)^T R^{-1}(\theta_0) \Delta_r^k$$

$$\text{avec } \Delta_r^k = \frac{1}{\sqrt{k-r+1}} \sum_{t=r}^k H(\theta_{k-1}, X_t)$$

Si la valeur de G_k devient plus grande qu'un seuil λ_G , alors la présence d'un saut est décidée.

Seconde Classe

test de Brandt [1]



Supposant le signal étudié décrit par une modélisation paramétrique de type AR, cette méthode est basée sur l'utilisation d'une distance directement issue de l'écriture du Rapport de Vraisemblance Généralisé entre les deux hypothèses initiales H_0 et H_1 . Les modèles comparés sont alors identifiés sur les fenêtres décrites ci-dessus :

Ce qui conduit au critère de décision suivant :

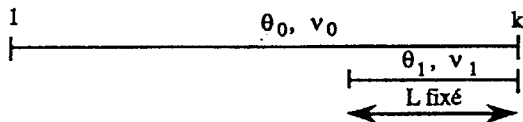
$$g_k = k \hat{L}_n(v_0/\hat{v}_0) - L \hat{L}_n(v_1/\hat{v}_1) - (k-L) \hat{L}_n(v_0/\hat{v}_1) \leq \lambda_g$$

H_0
 H_1

où \hat{v}_0 est l'estimée de v_0 obtenue sous H_0 (fenêtre globale)
 \hat{v}_0/\hat{v}_1 est l'estimée de v_0 obtenue sous H_1 (fenêtre croissante)
 \hat{v}_1 est l'estimée de v_1 obtenue sous H_1 (fenêtre test)

Si à l'instant k , g_k dépasse le seuil λ_g fixé *a priori*, la présence d'un saut est décidée et l'estimation de l'instant de changement τ peut être réalisée. Comme nous comparons les méthodes du point de vue de la détection, nous ne décrivons pas plus la procédure d'estimation de l'instant de changement. Voir [1] pour plus de détails.

test de Divergence-Hinkley [1]



La distance utilisée dans cette méthode est calculée à partir de l'entropie croisée entre les distributions des observations y_k conditionnellement aux valeurs antérieures Y_1^{k-1} sous respectivement H_0 ($g_0(y_k/Y_1^{k-1})$)

et H_1 ($g_1(y_k/Y_1^{k-1})$) [1] :

$$w_k = - \int g_0(y/Y_1^{k-1}) \ln \frac{g_1(y/Y_1^{k-1})}{g_0(y/Y_1^{k-1})} dy + L \int g_1(y_k/Y_1^{k-1}) \ln \frac{g_0(y_k/Y_1^{k-1})}{g_1(y_k/Y_1^{k-1})} dy$$

En supposant le signal étudié décrit par une modélisation de type AR et en utilisant les modèles identifiés sur les fenêtres ci-dessus, le critère de détection s'écrit :

$$w_k = - \frac{1}{2} \left(2 \frac{\hat{\epsilon}_{0,k} \hat{\epsilon}_{1,k}}{\hat{v}_1} - \left(1 + \frac{\hat{v}_0}{\hat{v}_1}\right) \frac{\hat{\epsilon}_{0,k}^2}{\hat{v}_0} + \left(1 - \frac{\hat{v}_0}{\hat{v}_1}\right) \right)$$

où $\hat{\epsilon}_{0,k}$ et \hat{v}_0 sont respectivement l'erreur de prédiction et l'estimation courante de v_0 obtenues sous H_0 (fenêtre de référence)

$\hat{\epsilon}_{1,k}$ et \hat{v}_1 sont respectivement l'erreur de prédiction et l'estimation courante de v_1 obtenue sous H_1 (fenêtre test).

Il peut être montré que cette distance a une pente conditionnelle négative en présence d'un saut alors qu'elle a une pente nulle sous H_0 [6]. Considérant une nouvelle variable aléatoire W_k définie comme étant la somme cumulée des variables w_k , le test consiste alors à appliquer une procédure de Page-Hinkley [1] qui n'est rien d'autre qu'une approximation du test du Rapport de Vraisemblance Généralisé pour détecter un saut d'amplitude inconnue dans la moyenne d'une variable aléatoire.

Cela conduit au critère de détection suivant :

$$g_k = \tilde{W}_k - \min_k \tilde{W}_k \leq \lambda_g$$

H_0
 H_1

où $\tilde{W}_k = \sum_{t=1}^k (w_t + \delta)$

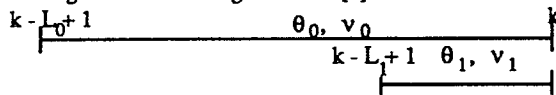
δ étant un biais négatif ajouté à w_t

Si à l'instant k , g_k devient supérieur à un seuil λ_g fixé *a priori*, alors la présence d'un saut est décidée et l'estimation de l'instant de changement est donnée par la valeur de k pour laquelle le minimum de g_k est atteint.

distances paramétriques[3]

De nombreuses autres distances paramétriques entre modèles identifiés peuvent être utilisées à des fins de détection [3], la plus communément utilisée étant la distance cepstrale, correspondant à la déviation logarithmique spectrale [3]. Malheureusement toutes ces distances supposent les modèles comparés parfaitement connus, ce qui peut sembler optimiste dans un contexte de détection de changement, à cause de l'incertitude sur la connaissance des modèles, estimés uniquement à

partir de fenêtres de longueur finie. C'est pourquoi les auteurs ont proposés l'utilisation d'un nouveau critère de dissimilarité prenant en compte cette incertitude [7]. Ce critère, déduit de la règle de décision bayésienne optimale écrite dans un contexte de classification supervisée, est appliqué à la détection de ruptures spectrales pour laquelle le jeu d'apprentissage est réduit au signal étudié [8]:



Notant L_0 et L_1 les longueurs respectives d'une fenêtre long terme (fenêtre de référence) et d'une fenêtre court terme (fenêtre test), θ_0 et θ_1 les paramètres estimés sur ces fenêtres, et Σ_0 et Σ_1 les matrices de variance-covariance d'erreurs d'estimation associées, ce critère de dissimilarité s'écrit :

$$\Delta_k = (\theta_1 - \theta_0)^T \left(1 + \frac{L_1}{L_0} \Sigma_1\right)^{-1} (\theta_1 - \theta_0)$$

Si à l'instant k , Δ_k dépasse un seuil λ_Δ , la présence d'un saut est décidée.

III) Outils de comparaison.

L'évaluation théorique de l'efficacité des différentes méthodes suivant le critère d'optimalité usuel dans la théorie de détection en ligne [9] est alors un problème délicat (l'instant de changement et les modèles caractérisant le signal avant et après rupture étant inconnus *a priori*). C'est pourquoi, dans une perspective d'évaluation pratique des méthodes précédentes, les auteurs proposent une comparaison basée sur leur mise en oeuvre en simulation sur une large population de signaux-test synthétiques suffisamment représentative (une centaine d'échantillons de ruptures de type AR et ARMA). Les résultats obtenus sont alors présentés sous forme de courbes graduées suivant le seuil et donnant le retard moyen à la détection en fonction du taux moyen de faux positifs pour la rupture considérée (courbes type ROC). La meilleure méthode étant celle qui présentent la courbe la plus proche du point origine (0, 0).

IV) Résultats

Tous les algorithmes présentés précédemment ont été testés sur plusieurs jeux comprenant chacun cent réalisations indépendantes d'un signal d'une longueur totale de 1500 points présentant une rupture à l'instant 1000. Deux cas correspondant à un faible puis important saut spectral sont examinés.

Le même algorithme d'identification par Maximum de Vraisemblance Récursif a été utilisé pour chacune des méthodes; la longueur de la fenêtre test ayant été fixée après convergence des facteurs d'oubli à 100 points pour les méthodes de la seconde classe.

Faible Saut Spectral

Modèles AR

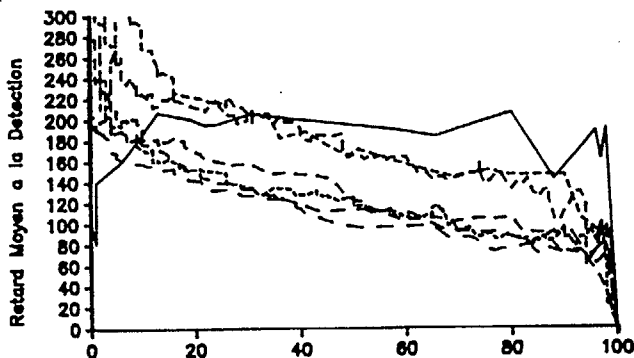
Les modèles AR simulés sont les modèles AR d'ordre 3 suivants :

$$\theta_0 = [0.65, -0.33, -0.05] \quad v_0 = 1$$

$$\text{pôles} : -0.944, -0.126, 0.42$$

$$\theta_1 = [0.5, -0.55, -0.1] \quad v_1 = 1$$

$$\text{pôles} : -0.963, 0.628, 0.165$$



--- Distance cepstrale --- Distance proposée
 - - - - test de Brandt - - - - test de Div-Hin
 ——— Energie EPL ——— Blancheur EPL ——— Methode loc
 (La légende est identique pour toutes les courbes)

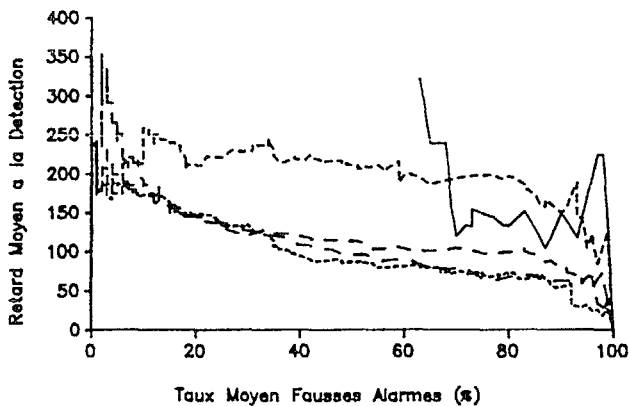


Les courbes de type ROC présentées ci-dessus permettent de conclure qu'il existe pour la rupture étudiée un groupe de méthodes recommandées : test de blancheur de l'EPL ($\alpha = 0.99$) pour les méthodes de la première classe, distance proposée, distance cepstrale et test de Divergence-Hinkley pour les méthodes de la seconde classe. Le test d'énergie de l'EPL ($N_D = 3$), la méthode locale et le test de Brandt donnant de moins bons résultats relativement aux autres méthodes.

Modèles ARMA

Les modèles ARMA simulés sont les modèles ARMA d'ordre (2, 2) suivants :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= [-1.79, 0.836, 0.146, 0.141] & v_0 &= 1 \\ \text{pôles} &: 0.914 e^{j2\pi(\pm 0.0327)} \\ \text{zéros} &: 0.375 e^{j2\pi(\pm 0.281)} \\ \theta_1 &= [-1.78, 0.829, 0.391, 0.244] & v_1 &= 1 \\ \text{pôles} &: 0.91 e^{j2\pi(\pm 0.0338)} \\ \text{zéros} &: 0.493 e^{j2\pi(\pm 0.314)} \end{aligned}$$



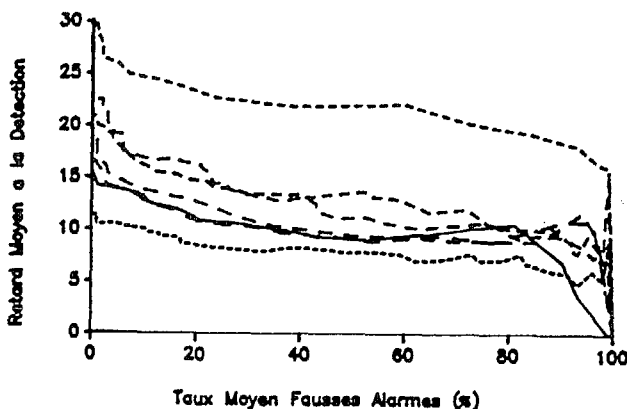
Les courbes de type ROC présentées ci-dessus permettent de visualiser le bon comportement des mêmes tests que précédemment pour la deuxième rupture étudiée : test de blancheur de l'EPL ($\alpha = 0.98$), et distance proposée, distance cepstrale. Le test d'énergie de l'EPL ($N_D = 3$) et la méthode locale donnant de moins bons résultats.

Saut Spectral Important

Modèles AR

Les modèles AR simulés sont les modèles AR d'ordre 3 suivants :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= [-0.82, 0.47, -0.01] & v_0 &= 1 \\ \text{pôles} &: 0.022, 0.672 e^{j2\pi(\pm 0.148)} \\ \theta_1 &= [-1.70, 0.95, -0.19] & v_1 &= 1 \\ \text{pôles} &: 0.834, 0.477 e^{j2\pi(\pm 0.069)} \end{aligned}$$

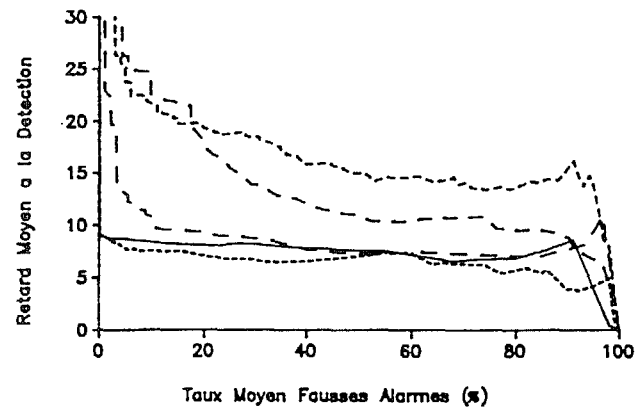


Les courbes de type ROC présentées ci-dessus permettent de classer dans l'ordre décroissant l'efficacité des différentes méthodes relativement à la rupture étudiée : test de blancheur de l'EPL ($\alpha = 0.5$), puis distance proposée, test d'énergie de l'EPL ($N_D = 3$), distance cepstrale, puis test de Divergence-Hinkley, test de Brandt, et finalement la méthode locale.

Modèles ARMA

Les modèles ARMA simulés sont les modèles ARMA d'ordre (2, 2) suivants :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= [-1.13, 0.48, -0.34, -0.42] & v_0 &= 1 \\ \text{pôles} &: 0.692 e^{j2\pi(\pm 0.098)} \\ \text{zéros} &: -0.5, 0.84 \\ \theta_1 &= [-1.72, 0.77, 0.05, -0.36] & v_1 &= 1 \\ \text{pôles} &: 0.877 e^{j2\pi(\pm 0.031)} \\ \text{zéros} &: -0.625, 0.575 \end{aligned}$$



Les courbes de type ROC présentées ci-dessus permettent également de classer dans l'ordre décroissant l'efficacité des différentes méthodes pour la rupture étudiée : test de blancheur de l'EPL ($\alpha = 0.5$), puis test d'énergie de l'EPL ($N_D = 4$), distance proposée, distance cepstrale, et finalement la méthode locale.

Conclusion

Les quatre ensembles de courbes de type ROC présentées précédemment permettent d'apprécier l'efficacité des différentes méthodes pour les différents types de ruptures considérés dans cet article :

- le test d'énergie de l'EPL montre un bon comportement pour un saut spectral important alors qu'il est presque inopérant pour un saut faible.
- le test de blancheur de l'EPL montre un très bon comportement quelque soit l'importance du saut spectral.
- la méthode locale donne des résultats moyens, dus certainement à l'implémentation adoptée (réactualisation permanente de θ_0 ainsi que des quantités qui en dépendent et test pour $r = k-99$ fixé)
- Pour les méthodes de la seconde classe, on peut constater l'amélioration significative apportée par la distance proposée par rapport aux autres distances, ce qui peut s'expliquer par la prise en compte explicite du caractère aléatoire des modèles identifiés dans le processus de détection.

Bibliographie

- [1] GDR TdSI GT2 : Reconnaissance et Ruptures (1991) *Segmentation de Signaux : Fiches Descriptives d'algorithmes*
- [2] L. Ljung and T. Soderstrom (1983) *Theory and Practise of Recursive Identification*. Mit Press, Cambridge, Massachusetts.
- [3] M. Basseville (1989) *Distance measures for signal processing and pattern recognition*. Signal Processing n°18 1989 pp349-369
- [4] A. Benveniste, M. Metivier, P. Priouret (1987) *Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques théorie et applications*. Masson
- [5] A. Benveniste, M. Basseville and G. Moustakides (1987) *The asymptotic local approach to change detection and model validation*. IEEE Trans. Aut. Contr., vol AC-32, n°4, pp 583-592
- [6] M. Basseville (1986). *The two models approach for the on line detection of changes in AR processes*. In Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems (M. Basseville, A. Benveniste, eds.) chap.6. Lecture Notes in Control and Information Sciences, LNCIS77, eds(1986), Springer-Verlag, New-York
- [7] C. Doncarli, E. Le Carpentier (1991). *An optimal approach for random signals classifications*. IEEE Transact. P.A.M.I., vol 13, n°19
- [8] E. Le Carpentier, C. Doncarli, B. Vozel (1992). *Optimal bayesian detection of spectral changes in random signals*. Proc. of EUSIPCO, Bruxelles
- [9] I.V. Nikiforov (1986). *Sequential detection of changes in stochastic systems*. In Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems (M. Basseville, A. Benveniste, eds.) chap.7. voir[6]