

## DETECTION D'UN SAUT DE PHASE OU D'AMPLITUDE DANS UNE SINUSOÏDE BRUITÉE

C. Theys, G. Alengrin, J. Ménez

Laboratoire d'Informatique, Signaux & Systèmes- URA CNRS 1376  
Université de Nice - Sophia Antipolis 41, Bd Napoléon III 06041 NICE cedex

### RÉSUMÉ

Dans cette communication sont proposées deux approches pour détecter un saut de phase initiale ou un saut d'amplitude dans une sinusoïde bruitée. La première est basée sur la description d'une telle rupture comme un changement additif sur l'équation dynamique d'une représentation d'état du signal. Mais sa mise en oeuvre requiert une charge de calcul très importante, c'est pourquoi on propose une solution alternative à la précédente, fondée sur une simplification du rapport de vraisemblance lorsque les changements dans les caractéristiques spectrales sont faibles. Mais ce changement n'est alors plus additif.

### 1. Position du problème

Cette communication est consacrée à la détection et à l'estimation d'un saut de phase ou d'une variation d'amplitude survenant à un instant  $r$  inconnu dans une sinusoïde bruitée. De nombreux signaux réels dans des domaines variés présentent ce type de phénomène: les signaux transmis par modulation de phase dans les communications, les signaux résultant de réflexions multiples d'ondes acoustiques sous marines sur la surface de la mer, [4]...

Le problème se présente alors comme celui de la détection d'une rupture en  $r$  avec les trois étapes classiques:

1. détecter le changement;
2. estimer l'instant de changement  $r$ ;
3. estimer l'amplitude de ce changement.

Deux approches basées sur le rapport de vraisemblance sont proposées pour réaliser ces étapes. La première approche est basée sur le calcul du rapport de vraisemblance à un instant  $k$ , [2], [1], entre les deux hypothèses:

- $H_0$ : il n'y a pas de rupture jusqu'à l'instant  $k$
- $H_1$ , il y a eu une rupture à un instant  $r$  tel que  $r \leq k$ .

Une première solution est de décrire le signal par un système d'état et d'exprimer le saut d'amplitude ou/et de phase initiale du signal comme un vecteur impulsion qui s'ajoute à l'équation dynamique. Grâce à un filtre de Kalman associé à ce système, le système perturbé et le système non perturbé sont linéairement dépendants, et on peut alors expliciter le rapport de vraisemblance entre  $H_0$  et  $H_1$ ;

### ABSTRACT

Two approaches are proposed in this paper to detect phase or amplitude jump in a noisy sinusoid. The first one is based on addition of an impulse vector on the dynamical equation of a state space model of the signal. Its amplitude is proportional to the jump. This solution has, however, a high computational cost, so we propose to use the so-called local approach which simplifies the likelihood ratio in the case of small changes in spectral characteristics. This change is no more additive.

cette solution est optimale mais très lourde en charge de calculs; dans notre cas, il est cependant possible d'explicitier le rapport de vraisemblance directement à partir des observations car il n'y a pas de bruit additif sur l'état; cette solution donne cependant de moins bons résultats. On propose une autre solution dite par approche locale [3] qui permet de simplifier le calcul du rapport de vraisemblance en limitant le vecteur de paramètres après rupture à un sous espace donné. On utilise un modèle du signal sous forme complexe. Grâce à une forme approximative du détecteur après rupture, il est également possible d'estimer la valeur de l'amplitude du changement à partir du résultat du détecteur si l'on en connaît la forme; lorsque c'est le cas, l'estimation quasiment instantanée de l'amplitude de la rupture permet la réinitialisation de l'algorithme de la même façon qu'avec la solution exacte du GLR.

### 2. GLR

On peut décrire parfaitement un saut de phase initiale ou d'amplitude d'une sinusoïde bruitée à l'aide d'une représentation d'état, par addition linéaire à l'instant  $r$  d'un vecteur impulsion dont l'amplitude dépend des nouvelles phases et amplitudes initiales:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = F\mathbf{x}_k + \nu_x \delta_{r,k+1} \\ y_k = H^T \mathbf{x}_k + w_k \end{cases} \quad (1)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \omega \end{pmatrix}, \quad H^T = (0 \quad 1) \quad (2)$$

$$\nu = \begin{pmatrix} -a_0 \cos(\omega(r-2) + \phi_0) + a_r \cos(\omega - \phi_r) \\ -a_0 \cos(\omega(r-1) + \phi_0) + a_r \cos(\omega - \phi_r) \end{pmatrix} \quad (3)$$



où  $a_0, \phi_0, a_r, \phi_r$  sont dans l'ordre l'amplitude, la phase initiale avant et après rupture,  $w_k$ , un bruit blanc gaussien, de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  et  $\omega$ , la pulsation de la sinusoïde qui, elle, ne varie pas.

### 2.1. Innovations indépendantes

Cette méthode est la version de l'algorithme *GLR* de Wilks appliquée au système précédent. Cet algorithme est basé sur la blancheur des innovations du filtre de Kalman associé à ce système. En raison des propriétés linéaires du système d'état et du caractère additif du changement dans ce système, on peut montrer simplement, [5] que l'effet du changement sur  $\epsilon_k$  est également additif; de plus les caractéristiques gaussiennes de l'état et du bruit d'observation font que le test de maximum de vraisemblance est explicite dans ce cas et s'écrit:

$$S_r^k = \sum_{i=r}^k \frac{1}{2} \epsilon_i^T \Sigma_i^{-1} \epsilon_i - \sum_{i=r}^k \frac{1}{2} (\epsilon_i - \rho_i^T(r) \nu)^T \Sigma_i^{-1} (\epsilon_i - \rho_i^T(r) \nu) \quad (4)$$

où  $\Sigma$  est la matrice de covariance de l'innovation qui reste la même sous les deux hypothèses et  $\rho^T(r) \nu$  est la moyenne de l'innovation après rupture. Ces deux quantités sont calculées récursivement à partir du filtre de Kalman et peuvent en théorie être calculées préalablement car elles ne dépendent pas de l'observation.

À chaque instant  $k$ ,  $S_r^k$  est calculée pour  $r$  appartenant à une fenêtre de longueur  $M$  fixée, pour éviter d'avoir des tableaux de valeurs croissants (cette solution n'est plus optimale). Si  $S_r^k$  dépasse un seuil fixé, il y a rupture et l'instant estimé  $\hat{r}$  est l'argument de cette valeur, l'amplitude est calculée ensuite.

### 2.2. Observations indépendantes

Dans le cas particulier du système précédent. Il n'y a pas de bruit additif sur l'état. Les observations  $y_k$  sont donc indépendantes, conditionnellement à l'état initial  $x_0$ . On peut donc directement calculer la somme cumulée  $S_r^k$  à partir des observations:

$$S_r^k = \sum_{i=r}^k \frac{1}{2\sigma_i^2} [(y_i - H^T F^i \hat{x}_0)^T (y_i - H^T F^i \hat{x}_0) - (y_i - H^T F^i \hat{x}_0 - \rho_i^T(r) \nu)^T (y_i - H^T F^i \hat{x}_0 - \rho_i^T(r) \nu)]$$

avec  $\rho_i(r) = H^T F^{i-r}$ . La suite est la même que pour la méthode précédente. Cette approche est beaucoup plus simple à mettre en oeuvre puisqu'elle ne nécessite pas l'implantation d'un filtre de Kalman. L'état initial peut être estimé sur les premiers échantillons du signal par moindres carrés. Les deux tests sur les sommes cumulées précédentes, (éqs. 4 et 5) peuvent être réinitialisés après rupture puisque l'on estime le nouvel état initial en estimant l'amplitude de la rupture.

### 3. Approche locale

L'approche locale est une façon de simplifier le rapport de vraisemblance dans le cas de changements dans les propriétés spectrales. L'approche locale est basée sur le développement du rapport de vraisemblance  $S_1^k$ , qui, dans le cas

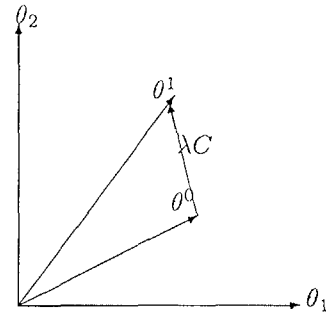


Figure 1: Vecteur de paramètres avant et après rupture dans le cas où  $q=2$

de petits changements sur le vecteur de paramètres  $\theta = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_q)^T$  décrivant la densité de probabilité du signal, permet une simplification importante du calcul du rapport de vraisemblance. Nous sommes toujours dans la situation décrite par les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  mais nous ne connaissons pas le vecteur de paramètres après rupture  $\theta_1$  et nous voulons éviter de l'estimer; nous pouvons cependant faire certaines hypothèses sur  $\|\theta^1 - \theta^0\|$ .

#### 3.1. Développement du rapport de vraisemblance dans le cas où $\theta^1 = \theta^0 + \lambda C$

Le développement de la somme cumulative est basé sur la théorie de Le Cam, G. Roussas et F. Davies et est appliqué au problème de la détection de rupture dans [3] par Nikiforov. Si l'on considère  $N$  observations  $Y_N = (y_1 y_2 \dots y_N)^T$  d'un processus stationnaire et gaussien, de probabilité conditionnelle à  $\theta$ ,  $p_\theta$  et si on émet l'hypothèse que  $\theta$  appartient au sous-espace défini par:

$$\forall 1 \leq k \leq N: \begin{cases} H_0 : r > k \longrightarrow \theta = \theta^0 \\ H_1 : r \leq k \longrightarrow \theta = \theta^0 + \lambda C \end{cases} \quad (6)$$

lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , l'utilisation du rapport de vraisemblance total est impossible. On utilise donc, comme test statistique, la partie dominante du développement du rapport de vraisemblance, soit:

$$S_1^N(\theta, C) = \Delta_1^{N^T}(\theta) C \quad (7)$$

ou bien sous une forme récursive:

$$S_1^k(\theta, C) = (S_1^{k-1}(\theta, C) + \Delta^{k^T}(\theta) C)^+ \quad (8)$$

avec

$$\Delta^{k^T}(\theta) = \left\| \frac{\partial \ln p_\theta}{\partial \theta} \right\| \quad (9)$$

et

$$(X)^+ = \max(X, 0) \quad (10)$$

$C$  est le vecteur de la direction de changement de  $\theta$ ,  $\|C\| = 1$ .

On va maintenant s'intéresser au cas où le signal est modélisé par une sinusoïde complexe en présence d'un bruit blanc gaussien additionnel, soit sous forme vectorielle :

$$Y^N = A_1 \exp j\phi_1 e(\omega_1) + B^N$$

avec

$$e(\omega_1) = (1 \ e^{j\omega_1} \ \dots \ e^{j(N-1)\omega_1})^T$$

Le vecteur  $\theta$  devient  $\theta = (\omega_1, A_1, \phi_1, \sigma^2)^T$ , et le vecteur  $C$  correspondant  $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$ . Le vecteur  $\Delta_1^N(p_\theta)$  est alors:

$$\Delta_1^N(p_\theta) = \begin{pmatrix} \partial \ln p_\theta / \partial \omega_1 \\ \partial \ln p_\theta / \partial A_1 \\ \partial \ln p_\theta / \partial \phi_1 \\ \partial \ln p_\theta / \partial \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Le bruit étant indépendant du signal et sa densité de probabilité étant gaussienne, la densité de probabilité du signal est alors:

$$p_\theta = \frac{1}{\pi^N \det(\sigma^2 I)} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2} (Y^N - A_1 \exp j \phi_1 e(\omega_1))^H (Y^N - A_1 \exp j \phi_1 e(\omega_1))\right]$$

Après calcul, l'incrément pour chaque nouvel échantillon  $y_k$  est:

$$\begin{aligned} \delta S^k(\theta) = & -\frac{2}{\sigma^2} [A_1 k \Im(y_k^* \exp j(\phi_1 + \omega_1 k)) c_1 \\ & -\Re(y_k^* \exp j(\phi_1 + \omega_1 k) - A_1) c_2 \\ & + A_1 \Im(y_k^* \exp j(\phi_1 + \omega_1 k)) c_3 \\ & + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma^2} \|y_k - A_1 \exp j(\phi_1 + \omega_1 k)\|^2\right) c_4] \end{aligned}$$

On peut donc détecter plus particulièrement un saut de fréquence, de phase, d'amplitude ou d'énergie en pondérant correctement  $C$ .

### 3.1.1. Comportement du détecteur

Nous étudions dans ce paragraphe le comportement du test récursif précédent suivant le type de rupture: saut d'amplitude, de phase ou de fréquence et la pondération correspondante. Dans un premier temps, on considère que l'on a connaissance du type de rupture et que, par conséquent, la pondération choisie est correcte.

1. Le rapport signal à bruit est élevé, c'est à dire que l'on peut négliger la puissance du bruit en regard de la puissance du signal. Dans ce cas, on obtient facilement les expressions suivantes du détecteur avant et après l'instant de rupture du signal:

- Signal à saut de fréquence avec direction de changement pondérée en fréquence:

$$\delta S^k(\omega, C) \approx \frac{2}{\sigma^2} A^2 k \sin((\omega^j - \omega^1)k) c_1$$

où  $c_1 = \pm 1$  pour une augmentation ou une diminution de fréquence,  $j = 1$  avant la rupture ( $k \leq r-1$ ) et  $j = 2$  après la rupture ( $k \geq r$ ). Tant que  $k \leq r$ , l'incrément est proche de zéro. Dès que la fréquence du signal change, l'incrément n'est plus nul et le détecteur 13 devient:

$$S_1^k(\omega, C) \approx \left(\sum_{i=r}^k \frac{2}{\sigma^2} A^2 i \sin((\omega^2 - \omega^1)i) c_1\right)^+$$

On a donc un détecteur qui est la somme cumulative de sinusoides de même fréquence, égale au

saut de fréquence à l'instant de rupture. On peut donc estimer ce saut de fréquence par transformée de Fourier discrète, par exemple, sur le résultat du détecteur, à partir de l'instant de détection.

- Signal à saut d'amplitude avec direction de changement pondérée en amplitude:

$$\delta S^k(A, C) \approx \frac{2}{\sigma^2} (A^j - A^1) c_2$$

Comme précédemment, l'incrément est nul jusqu'à  $k \leq r$ , à partir duquel le détecteur devient:

$$\begin{aligned} S_1^k(A, C) & \approx \left(\sum_{i=r}^k \frac{2}{\sigma^2} (A^2 - A^1) c_2\right)^+ \\ & = \frac{2}{\sigma^2} (k - r + 1) (A^2 - A^1) c_2 \end{aligned}$$

C'est une droite dont la pente est proportionnelle au saut d'amplitude.

- Signal à saut de phase avec direction de changement pondérée en phase:

$$\delta S^k(\phi, C) \approx \frac{2}{\sigma^2} \sin(\phi^j - \phi^1) c_3$$

Le détecteur devient à partir de  $k > r$ :

$$S_1^k(A, C) \approx \frac{2}{\sigma^2} (k - r + 1) \sin(\phi^2 - \phi^1) c_3 \quad (14)$$

C'est également une droite dont la pente est proportionnelle au sinus du saut de phase.

2. Le bruit n'est plus négligeable. Un terme fonction du bruit s'ajoute à chacune des quantités précédentes, il est à moyenne nulle et détériore peu la détection d'un saut de fréquence ou de phase. Par contre il est très gênant lors de la détection d'une variation faible d'amplitude car il s'additionne au saut d'amplitude, qui, s'il est faible, se perd dans le bruit.

## 3.2. Implémentation

- Les paramètres à fixer sont ceux du modèle sans rupture  $\hat{\theta}^0$ , les coordonnées du vecteur de direction de changement  $C$ , et le seuil pour la détection automatique.
- Les paramètres du modèle initial peuvent être estimés sur les premiers points du signal à étudier, en utilisant l'algorithme de Burg par exemple.
- $C$  est donné par la connaissance de la direction de changement; c'est ainsi qu'une rupture correspondant à une augmentation de l'énergie du signal donne un vecteur direction:  $C = (0 \dots 0 1)^T$ . Si l'on ne connaît pas le paramètre affecté par la rupture ou si la rupture en modifie plusieurs, on peut pondérer  $C$  en conséquence.
- Si l'on ne connaît pas la nature du saut éventuel, on peut pondérer uniformément le vecteur direction, ce qui permet une très bonne détection quelque soit le type de rupture mais on ne peut pas déterminer précisément l'amplitude de la rupture.

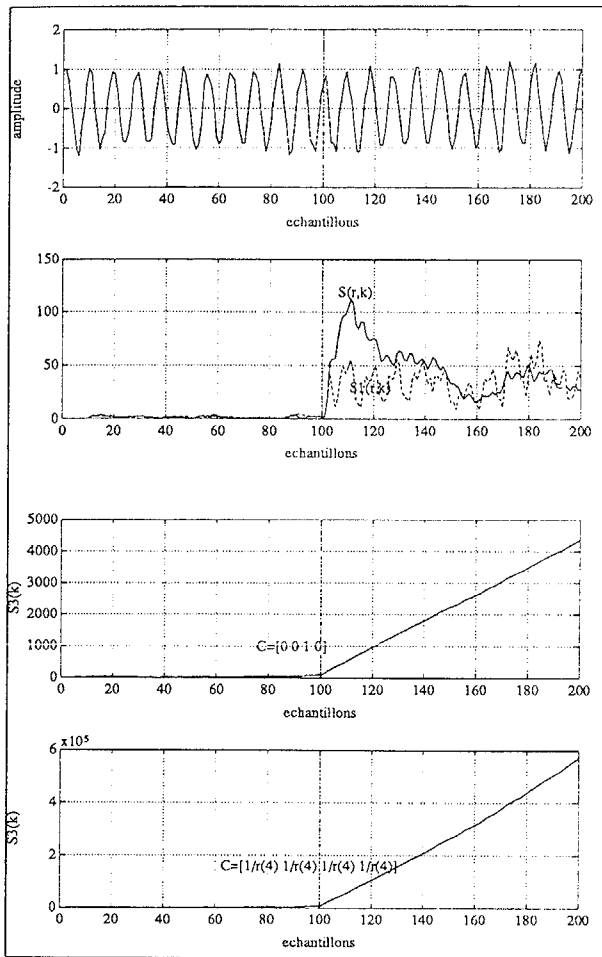


Figure 2: a) signal temporel,  $r = 100$ ,  $\phi_r - \phi_0 = \pi/4$ . b)  $--S_r^k$  à partir des innovations,  $---S_r^k$  à partir des observations. c)  $S_1^k(\theta)$ ,  $C = [0010]^T$ , approche locale, pondération sur la phase. d)  $S_1^k(\theta)$ ,  $C = [.5.5.5.5]^T$ , approche locale, pondération uniforme.

- Dans ce paragraphe, on n'a pas considéré une variation de la variance du bruit,  $\sigma^2$ ; en fait, une rupture sur un paramètre quelconque du signal se reflète par un saut de l'erreur d'identification. Il est donc intéressant, en pratique, de pondérer également dans la direction de la variance du bruit même s'il n'y a pas d'hypothèses concernant un saut éventuel de la variance du bruit.
- Une mauvaise pondération devrait, lorsque le signal est peu bruité, ( $\sigma^2 \rightarrow 0$ ), inhiber la détection. Dans la pratique, on se trouve dans la situation d'un rapport de deux infiniment petits et si le numérateur est plus "grand" que le dénominateur, le détecteur présente des sauts et peut provoquer de fausses alarmes.

#### 4. Résultats comparatifs

Les deux approches précédentes ont été essayées sur une sinusoïde bruitée,  $snr = 15dB$  de 200 échantillons présentant un saut de phase de  $\pi/4rad$  en  $r = 100$ , représentée sur *a* de la figure 2. Le vecteur de paramètres avant rupture,  $\theta^0$  a été estimé sur  $N_0 = 100$  points du signal (non représentés sur la fig. 2), par moindres carrés. La figure *b* représente

l'évolution du maximum des rapports de vraisemblance sans réinitialisation de l'algorithme *GLR* de Willsky soit à partir des innovations du filtre de Kalman (éq. 4) soit à partir des observations (éq. 5). Les figures *c* et *d* représentent l'évolution du maximum du rapport de vraisemblance de l'approche locale (éq. 8) avec une pondération sur la phase puis une pondération uniforme. Un seuil fixé à 10 sur les courbes *b*) de la figure (2) a permis de détecter le saut de phase en  $\hat{r} = 100$  avec deux échantillons de retard. L'amplitude de ce saut a été estimée ensuite à  $\phi_r - \phi_0 = .65rad$ , soit une incertitude relative de moins de 10%. L'utilisation de la forme approximative du rapport de vraisemblance (éq. 14) sous approche locale donne une estimation  $\phi_r - \phi_0 = .64rad$  à partir de deux valeurs successives de la courbe *c* de 2, et une estimation lissée de  $\phi_r - \phi_0 = .699rad$ , soit une incertitude relative de moins de 2% à partir d'une moyenne sur 10 échantillons. Ces deux approches donnent donc une très bonne estimation du saut de phase. On peut, cependant, faire quelques remarques:

- La détection est plus facile sur la courbe du *GLR* basé sur les innovations, dès que le rapport signal à bruit est plus faible, il est difficile de fixer un seuil sur la courbe calculée directement à partir des observations.
- Il existe une "imbrication" importante entre la phase et l'amplitude dans l'expression du vecteur  $\nu$  (éq. 2), une petite erreur sur l'estimation de l'amplitude après rupture peut entraîner une erreur assez importante sur l'estimation de la phase.
- On vérifie sur la figure *d* qu'il est possible de détecter un saut de phase avec une pondération uniforme, c'est à dire sans information a priori sur la direction  $C$  de rupture.

#### 5. REFERENCES

- [1] M. Basseville and A. Benveniste. Design and Comparative Study of Some Sequential Jump Detection Algorithms for Digital Signals. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 31(3):521-535, June 1983.
- [2] M. Basseville and A. Benveniste. *Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems*. Lecture notes in control and information. Springer Verlag, 1986.
- [3] I. V. Nikiforov. Sequential Detection of Changes in Stochastic Systems. *Lectures notes in control and information*, 1986.
- [4] C. Theys, A. Ferrari, M. L. Dard, and T. Pitarque. Détection de Trajets Multiples de Signaux SONAR par Modélisation Evolutive. In *Colloque sur le Traitement du Signal et des Images, GRETSI*, pages 633-636, 1991.
- [5] A. S. Willsky and H. L. Jones. A Generalized Likelihood Ratio Approach to the Detection and Estimation of Jumps in Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21:108-112, 1976.