

ESTIMATION DU MODULE DE LA FONCTION DE COHÉRENCE: UNE APPROCHE PAR MODÉLISATION ÉVOLUTIVE

E. Bataillou, E. Thierry, H. Rix, M. Perrone.

Laboratoire I3S- URA 1376 du CNRS, Université de Nice-Sophia Antipolis
Bat.4, 250 Av. Albert Einstein Sophia Antipolis
06560 Valbonne France

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Le module de la fonction de cohérence donne une mesure du degré de similarité en fréquence existant entre deux séries temporelles.

Nous présentons ici une méthode d'estimation du module de la fonction de cohérence non stationnaire. Cette méthode estime les coefficients dépendant du temps de deux fonctions de transfert de modèles autorégressifs à moyenne ajustée (ARMA). Le produit de ces deux fonctions donnent le module de la fonction de cohérence. L'estimation de ces coefficients dépendant du temps, s'effectue à l'aide de modèles évolutifs, c'est à dire que les coefficients s'expriment comme la combinaison linéaire d'un système de fonctions connues. Des simulations et des applications sur signaux réels (Électroencéphalogrammes) sont également présentées.

1. Introduction

Soient deux processus discrets aléatoires centrés $x(n)$ et $y(n)$, le carré du module de la fonction de cohérence (MFC) entre ces deux processus est définie par:

$$|\gamma_{xy}(f)|^2 = \frac{S_{xy}(f)S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)} \quad (1)$$

où $S_{xx}(f)$ et $S_{yy}(f)$ représentent les densités spectrales (DSP) de $x(n)$ et $y(n)$ respectivement et $S_{xy}(f)$ et $S_{yx}(f)$ représentent leurs inter-densités spectrales. Le MFC est une quantité utile qui donne une mesure du degré de similarité en fréquence existant entre deux séries temporelles $x(n)$ et $y(n)$.

Le MFC a de nombreuses applications dans le traitement du signal: dans la mesure du rapport signal sur bruit [1], dans l'estimation de la relation linéaire entre deux processus [2], ou dans les méthodes de soustraction de bruit. Une manière classique d'estimer cette cohérence est de calculer les DSP des signaux par la méthode des transformées de Fourier rapides [3]. Des méthodes basées sur la modélisation des rapports $S_{xy}(f)/S_{xx}(f)$ et $S_{yx}(f)/S_{yy}(f)$ [4] ou directement sur la modélisation de la cohérence [5] ont été proposées. Mais dans le cas où le lien, même en restant linéaire, évolue dans le temps, ces méthodes ne sont plus adaptées. Différentes méthodes ont été développées: estimation du MFC basé sur le filtrage adaptatif [6], méthode non paramétrique utilisant la transformée de Wigner-Ville [7], utilisation de bancs de filtres [8]. Nous

The magnitude square coherence give a measure of similarity in frequency domain between two time series.

We present here an estimation method of the non stationary magnitude square coherence function. This method estimates the time varying coefficients of two autoregressive moving average (ARMA) transfer functions. The product of these two functions gives the magnitude square coherence. Estimation of these time varying coefficients is done using time-dependent models i. e. the coefficients can be linearly decomposed on a system of known functions. Simulations and applications on reals signals (Electroencephalograms) are also presented.

proposons ici une nouvelle méthode basée sur la modélisation évolutive [9] des rapports non stationnaires $S_{xy}(f, n)/S_{xx}(f, n)$ et $S_{yx}(f, n)/S_{yy}(f, n)$, n étant un indice représentant le temps. Cette méthode évolutive permet de suivre les variations de la cohérence au cours du temps.

2. Formulation du problème

Nous proposons donc de calculer la cohérence évolutive en identifiant les rapports $S_{xy}(f, n)/S_{xx}(f, n)$ et $S_{yx}(f, n)/S_{yy}(f, n)$ comme les transformées de Fourier de deux fonctions de transfert évolutives de processus autorégressifs à moyennes ajustées (ARMA) évolutifs; le produit de ces deux rapports donne la cohérence.

Soit l'équation d'un modèle ARMA évolutif:

$$y(n) = - \sum_{\substack{i=-na \\ i \neq 0}}^{na} a_i(n)y(n-i) + \sum_{j=-nb}^{nb} b_j(n)x(n-j) \quad (2)$$

Il faut noter qu'aucune contrainte de causalité n'est imposée. Les coefficients $a_i(n)$ et $b_j(n)$ sont définis comme combinaisons linéaires d'un système de fonctions orthogonales $u_k(n)$, $k=0...q$:



$$\begin{cases} a_i(n) = \sum_{k=0}^q a_{ik} u_k(n) \\ b_j(n) = \sum_{k=0}^q b_{jk} u_k(n) \end{cases} \quad (3)$$

Avec un modèle de cette forme, les coefficients a_{ik} et b_{jk} doivent être estimés à partir des signaux $x(n)$ et $y(n)$. En nous limitant à ce type de modèle, nous avons forcément restreint les types possibles de variations temporelles. Cependant, en choisissant judicieusement les bases de fonctions u_k nous pouvons approcher assez précisément une grande variété d'évolutions temporelles possibles.

Multiplions l'équation (2) par $u_r(n)x(n-r)$ pour tout $r=0\dots q$ et le vecteur de paramètres étant indépendant du temps, nous pouvons en prendre sa moyenne temporelle:

$$\begin{aligned} & \sum_n u_r(n)y(n)x(n-m) = \\ & - \sum_n \sum_{i=-na}^{na} \sum_{k=0}^q a_{ik} u_k(n) u_r(n) y(n-i) x(n-m) \\ & + \sum_n \sum_{j=-nb}^{nb} \sum_{k=0}^q b_{jk} u_k(n) u_r(n) x(n-j) x(n-m) \end{aligned} \quad (4)$$

Définissons $C_{kr}^{yx}(i, m)$ comme la fonction de corrélation généralisée:

$$C_{kr}^{yx}(i, m) = \sum_n u_k(n) u_r(n) y(n-i) x(n-m) \quad (5)$$

En tenant compte du fait que $u_0(n) = 1$ quel que soit n et pour toute base, l'équation (4) nous donne pour tout m et pour tout $r=0\dots q$:

$$C_{0r}^{yx}(0, m) = - \sum_{i=-na}^{na} \sum_{k=0}^q a_{ik} C_{kr}^{yx}(i, m) + \sum_{j=-nb}^{nb} \sum_{k=0}^q b_{jk} C_{kr}^{yx}(j, m) \quad (6)$$

Pour identifier les paramètres a_{ik} et b_{jk} on écrit l'équation (6) sous forme matricielle pour tout $r=0\dots q$ et tout $m=0\dots M$:

$$\begin{bmatrix} \Phi(-na, 0) & \dots & \Phi(-1, 0) & \Phi(1, 0) & \dots & \Phi(na, 1) & \varphi(-nb, 0) & \dots & \varphi(nb, 0) \\ \Phi(-na, 1) & & & & & \Phi(na, 1) & & & \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \\ \Phi(-na, M) & & \dots & & & \Phi(na, M) & \varphi(-nb, M) & \dots & \varphi(nb, M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(-na) \\ \vdots \\ A(-1) \\ A(1) \\ \vdots \\ A(na) \\ B(-nb) \\ \vdots \\ B(nb) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi(0) \\ \Psi(1) \\ \vdots \\ \Psi(M) \end{bmatrix} \quad (7)$$

avec:

$$\Phi(i, m) = \begin{bmatrix} C_{00}^{yx}(i, m) & C_{10}^{yx}(i, m) & \dots & C_{q0}^{yx}(i, m) \\ C_{01}^{yx}(i, m) & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{0q}^{yx}(i, m) & & & C_{qq}^{yx}(i, m) \end{bmatrix}$$

$$\varphi(j, m) = \begin{bmatrix} C_{00}^{xx}(j, m) & C_{10}^{xx}(j, m) & \dots & C_{q0}^{xx}(j, m) \\ C_{01}^{xx}(j, m) & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{0q}^{xx}(j, m) & & & C_{qq}^{xx}(j, m) \end{bmatrix}$$

$$\Psi(m) = [C_{00}^{yx}(0, m) \quad C_{01}^{yx}(0, m) \quad \dots \quad C_{0q}^{yx}(0, m)]^T$$

et

$$A(i) = [a_{i0} \quad \dots \quad a_{iq}]^T; B(j) = [b_{j0} \quad \dots \quad b_{jq}]^T$$

On obtient alors les paramètres par résolution d'un système d'équations linéaires, soit directement si $M=na+nb+1$, soit par moindres carrés si $M>na+nb+1$.

Après avoir identifié les paramètres a_{ik} et b_{jk} du premier rapport des densités spectrales $S_{xy}(f, n) / S_{xx}(f, n)$, on effectue le même calcul pour le deuxième rapport $S_{yx}(f, n) / S_{yy}(f, n)$ en permutant les rôles de $x(n)$ et $y(n)$. En faisant le produit des deux rapports de DSP ainsi estimés, on obtient une expression du carré du module de la cohérence évolutive:

$$|\gamma_{xy}(f, n)|^2 = \frac{|S_{xy}(f, n)|}{|S_{xx}(f, n)|} \frac{|S_{yx}(f, n)|}{|S_{yy}(f, n)|}$$

2.1 Les bases de fonctions $u_k(n)$ et $u_r(n)$

De nombreuses bases de fonctions utilisées dans le but d'une identification évolutive ont été décrites. Parmi toutes ces bases de fonctions, nous avons retenu:

- Les puissances entières du temps: $u_k(n) = n^k$
- Les fonctions constituées des polynômes de Legendre (orthogonalisées sur $[0, 1]$):



$$\begin{cases} u_k(t) = \frac{2k-1}{k} u_{k-1}(t) - \frac{k-1}{k} u_{k-2}(t) \\ u_0(t) = 1 \\ u_1(t) = 1 \end{cases} \quad \text{avec } t = 2n-1$$

- Les fonctions issues de la décomposition en série de Fourier:

$$\begin{cases} u_k(n) = \cos(kwn), k \text{ pair} \\ u_k(n) = \sin(kwn), k \text{ impair} \end{cases} \quad \text{ou } w \text{ est une constante dépendant de la taille des données à traiter.}$$

Cette dernière base est intéressante dans le cas où $w = \frac{\pi}{N}$, N étant le nombre de points du signal, car ainsi, toutes les variations des coefficients $a_i(n)$ et $b_j(n)$ peuvent être représentées exactement avec (3) quand $q \rightarrow \infty$. Après de nombreux essais, c'est cette dernière base qui nous a semblé la plus performante et a donné les meilleurs résultats non seulement en simulation, mais aussi sur les signaux réels.

Dans chaque cas, l'estimation est d'autant meilleure que la base de fonctions utilisées décrit le plus précisément possible les variations de $a(n)$.

2.2 Choix des ordres n_a et n_b

La détermination du nombre de coefficients optimaux a_{ik} et b_{jk} est difficile à réaliser. Nous avons utilisé dans notre cas le critère d'Akaike qui a donné des résultats satisfaisants: $AIC(i, j) = N \ln \sigma_{ij}^2 + 2(i + j)$. Ce critère permet de choisir la meilleure structure d'un modèle dans une base donnée, pour un type donné de signal non stationnaire. Le choix entre les différentes bases possibles se fait ensuite en retenant pour chaque base la structure minimisant le critère d'ordre, puis la base associée au plus petit des critères ainsi obtenue.

3. Simulations

Des simulations sont effectuées pour tester les performances de cette méthode. Le modèle de la figure (1) est utilisé. $H_1(z, n)$ est un filtre du second ordre donné par:

$$H_1(z, n) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1} + \alpha(n)z^{-2}}$$

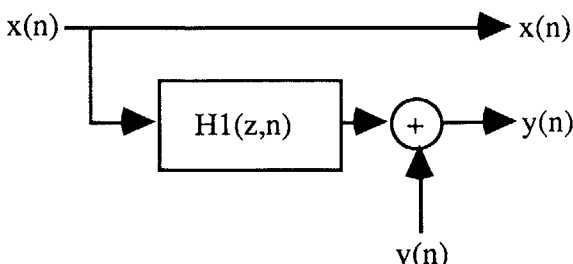


Fig.1 Modèle pour $x(n)$ et $y(n)$

où $\alpha(n)$ est un coefficient variant dans le temps, $x(n)$ et $v(n)$ sont des bruits blancs de variances $\sigma_x^2 = 1$ et $\sigma_v^2 = 1$ respectivement. Des séquences de 2500 points sont ainsi générées.

Différents types de fonctions $\alpha(n)$ ont été étudiés. Les résultats présentés ici utilisent une variation de $\alpha(n)$ de type sinusoïdal sur 2500 points: $\alpha(n) = 0.72 \sin(2\pi(n-1)/2500)$ avec

$n=1 \dots 2500$. La cohérence théorique entre $x(n)$ et $y(n)$ est donnée par (figure 2):

$$|\gamma_{xy}(f, n)|^2 = \frac{H_1(f, n)H_1^*(f, n)}{H_1(f, n)H_1^*(f, n) + 1}$$

L'utilisation du critère d'Akaike nous a donné le nombre correct de coefficients quelle que soit la base de fonctions utilisée: $n_a=2$ et $n_b=1$. La plus faible valeur du critère est obtenue pour la base de fonctions sinusoïdales avec $q=1$. C'est en effet cette base qui décrit le plus précisément la variation de $\alpha(n)$. Une estimation du MFC ainsi obtenue est présentée figure 3.

Par comparaison, nous calculons également le MFC variant dans le temps en estimant les DSP et les inter DSP à l'aide de transformées de Fourier rapides (TFR) glissantes. Le résultat obtenu par cette méthode est présenté figure 4. Ce résultat est obtenu après un lissage en temps et en fréquence par une fenêtre glissante de faible longueur de manière à rendre le résultat plus lisible. Cette méthode de calcul du MFC donne un résultat moins fin que la méthode présentée du fait du nombre relativement faible de points disponibles pour estimer les DSP à l'aide d'une FFT.

4. Applications aux signaux réels

Nous appliquons la méthode présentée ci-dessus à des signaux réels d'électroencéphalographie (EEG). Ces signaux sont enregistrés sur l'homme, dans les régions postérieures droite et gauche. Ces signaux sont échantillonnés à 128 Hz et enregistrés durant 128 secondes. Nous estimons la cohérence évolutive entre, d'une part, deux voies symétriques à droite et à gauche (voies 5 et 13) figure 5 et, d'autre part, deux voies du coté droit (voies 5 et 8) figure 6. Nous présentons ici les premiers résultats obtenus sur des signaux dont la cohérence ne varie pas durant l'enregistrement. La forme de la cohérence estimée est conforme aux prévisions: forte cohérence dans la zone de l'alpha pour les voies du même coté (5-8), cohérence plus faible dans cette même zone pour les voies 5-13. Il nous reste à valider cette méthode sur un grand nombre de signaux réels.

5. Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'estimation du carré du module de la fonction de cohérence supposée non stationnaire. Cette méthode estime le MFC en utilisant une modélisation paramétrique des rapports de DSP estimés. Des simulations numériques ont été conduites dans l'hypothèse d'une non stationnarité susceptible d'une approche évolutive, en excluant les non stationnarités brusques de type ruptures. Dans ce cas, les résultats obtenus sont très satisfaisants. Cet outil doit être utilisé pour rechercher des évolutions de cohérence en fonction d'une activité cérébrale particulière. Il peut de plus permettre de détecter de façon fiable les zones où l'hypothèse de stationnarité est licite.

Références

- [1] R. E. White, "The Estimation of Signal spectra and related Quantities by Means of the Multiple Coherence Function", 34 th Meeting of the European Association of Exploration Geophysicists, Paris, May 1972, pp. 660-703.
- [2] X. Kong, N. V. Thakor, "Adaptive Coherence Estimation Reversal Nonlinear Processes in Injured Brain", IEEE ICASSP, April 1993, pp. 87-90.
- [3] G. C. Carter, C. H. Knapp, A. Nuttall, "Estimation of the Magnitude-Squared Coherence via Overlapped Fast Fourier



Transform Processing", IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol AU-21, Aug 1973.

[4] Y. T. Chan, R. K. Miskowicz, "Estimation of Coherence and Time Delay with ARMA models", IEEE Trans. on ASSP, Vol ASSP-32, No.2, pp. 295-303, April 1984.

[5] J. Cadzow, O. M. Solomon, "Linear Modeling and the Coherence Function", IEEE Trans. on ASSP, Vol ASSP-35, No.1, pp. 19-28, Jan. 1987.

[6] D. H. Youn, N. Ahmed, G. C. Carter, "Magnitude-Square Coherence Function Estimation: An Adaptive Approach", IEEE Trans. on ASSP, Vol ASSP-31, No.2, pp. 137-142, Feb. 1983.

[7] L. B. White, B. Boashash, "Cross Spectral Analysis of Nonstationary Processes", IEEE Trans. on Information Theory, Vol. 36, No. 4, pp. 830-835, July 1990.

[8] M. E. Santamaria, M. A. Lagunas, M. Cabrera, F. Villabona, "Parametric Estimation of Time Varying Coherence Function", Signal Processing IV: Theories and Applications, pp.1417-1420, EURASIP, 1988.

[9] Y. Grenier, "Modèles ARMA à Coefficients Dépendant du Temps: Estimateurs et Applications", Traitement du Signal, Vol. 3, n° 4-5, 219-233, 1986.

Figure 4:
Cohérence estimée par FFT glissante.

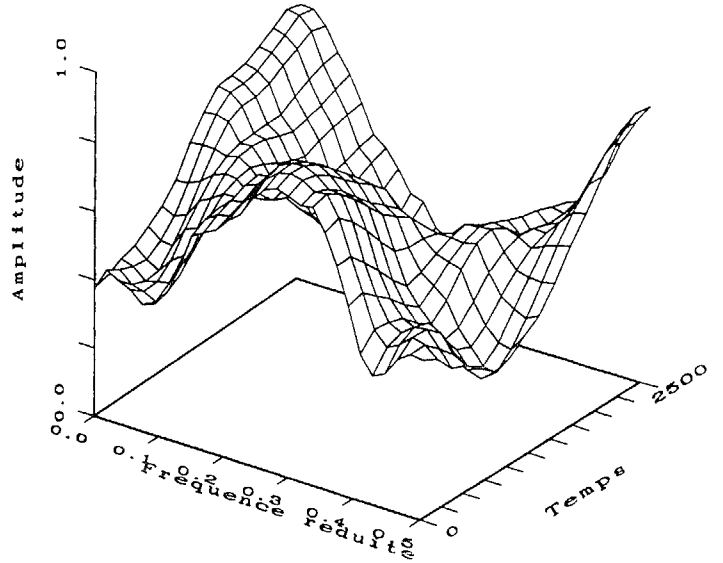


Figure 2:
Cohérence non stationnaire théorique
 $\alpha(n)$ sinusoidale.

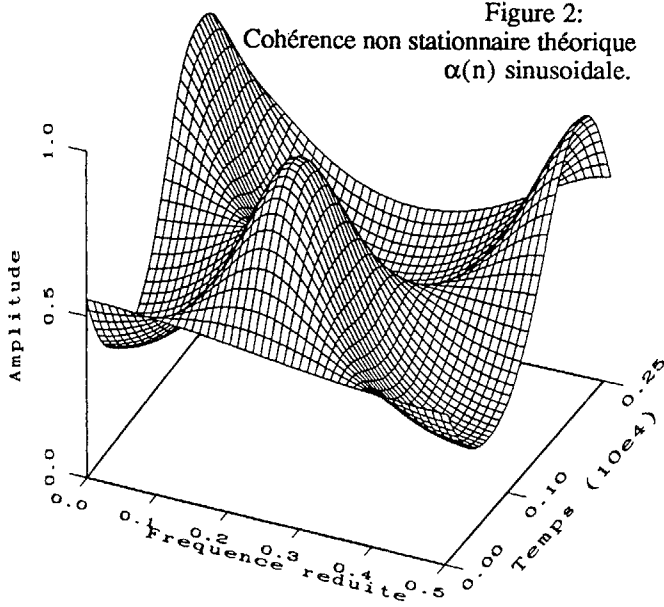


Figure 5:
Cohérence estimée avec modèle évolutif.
Signaux réels EEG. Voies 5-13.

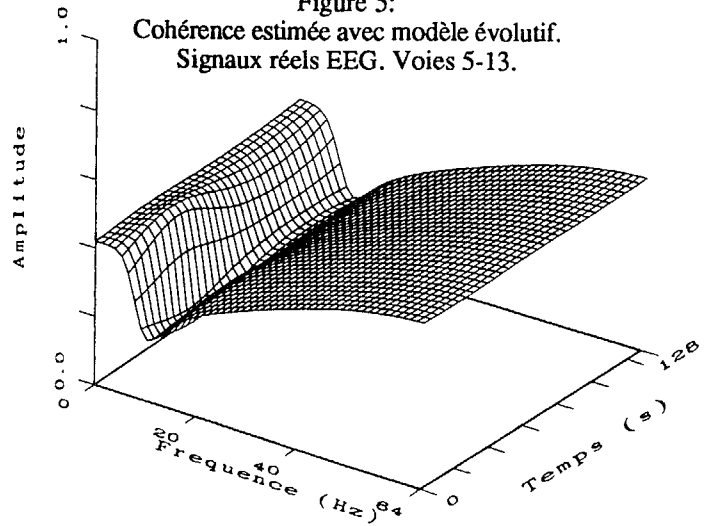


Figure 3:
Cohérence estimée avec modèle évolutif.

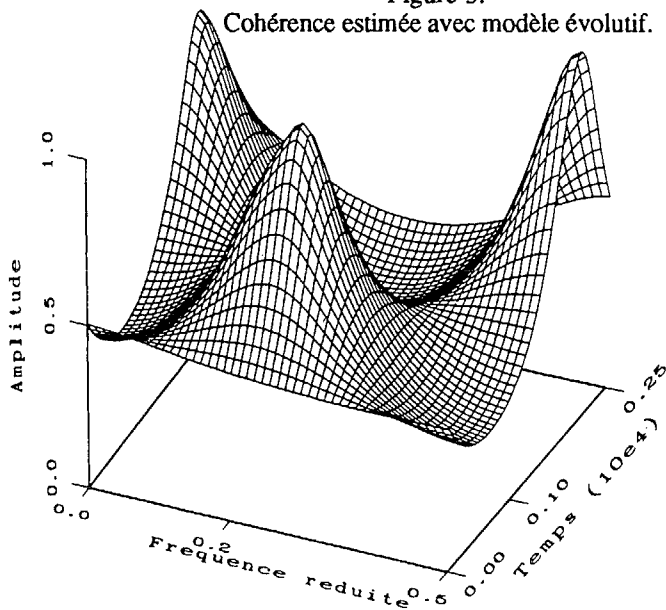


Figure 6:
Cohérence estimée avec modèle évolutif.
Signaux réels EEG. Voies 5-8.

