



ESTIMATION ROBUSTE ET RECURSIVE DE DOMAINES D'INCERTITUDE PARAMETRIQUE ORTHOTOPIQUES

H. Messaoud - G. Favier

Laboratoire I3S

URA 1376 du CNRS / UNSA

Bât SPI n°4 - 250 rue A. Einstein - 06560 Valbonne

email: favier@mimosa.unice.fr

RESUME: Cet article propose une nouvelle méthode récursive pour déterminer un domaine d'incertitude paramétrique de forme orthotopique, associé à un modèle de régression linéaire avec erreur inconnue mais bornée. Cette méthode consiste à construire récursivement un orthotope extérieur à l'ensemble d'appartenance des paramètres. Le centre de l'orthotope peut être considéré comme l'estimé courant des paramètres, et les coordonnées des sommets de l'orthotope fournissent directement les intervalles d'incertitude relatifs à ces paramètres estimés.

1. Introduction

Lors de l'identification d'un modèle paramétrique à partir de signaux mesurés, l'estimation des paramètres du modèle doit être accompagnée d'une évaluation de l'incertitude relative aux paramètres estimés. Avec l'approche probabiliste, cette incertitude est généralement évaluée à partir d'une analyse asymptotique des propriétés de l'estimateur. Cette analyse nécessite bien entendu de faire des hypothèses concernant la description statistique des signaux d'entrée et de perturbation agissant sur le système à identifier. En pratique, ces hypothèses sont souvent difficiles à formuler. Une autre approche plus récente, et certainement plus réaliste, de l'identification repose sur une hypothèse de bornitude de l'erreur, incluant le bruit de mesure et l'erreur de modélisation: cette erreur est supposée inconnue mais bornée (EIMB), et de bornes connues [1]-[3]. Cette approche EIMB permet de déterminer un ensemble d'appartenance pour les paramètres du modèle, dont les éléments sont compatibles à la fois avec les données mesurées, la structure du modèle et les bornes a priori de l'erreur. Dans le cas des modèles de régression linéaires en leurs paramètres, l'ensemble d'appartenance exact est un polytope dont la taille décroît lorsque le nombre de mesures croît. Plusieurs méthodes ont été récemment proposées dans la littérature pour déterminer récursivement le polytope, caractérisé par ses sommets, ses arêtes ou ses faces [4]-[6]. L'inconvénient majeur de ces méthodes réside dans leur lourdeur de calcul quand le nombre de mesures croît, du fait de l'augmentation simultanée du nombre de sommets, et par voie de conséquence des nombres d'arêtes et de faces, du polytope. Pour contourner ce problème, une solution consiste à approcher le polytope exact par une région de l'espace paramétrique ayant une forme géométrique plus

ABSTRACT: This paper proposes a new recursive method for determining an orthotopic uncertainty domain associated with a linear regression model with unknown but bounded errors. This method consists in recursively constructing an orthotopic outer bounding approximation of the parameter membership set. The orthotope center can be considered as the current estimate and the co-ordinates of the orthotope vertices directly provide the parameter uncertainty intervals.

simple, telle qu'un ellipsoïde ou un orthotope (c'est à dire un hyperrectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées des paramètres).

Dans le cas d'une borne ellipsoïdale, divers algorithmes dits "ellipsoïdaux", ont été obtenus au moyen d'une approche géométrique combinée avec la minimisation d'un critère directement lié à la taille de l'ellipsoïde, ou en s'appuyant sur des considérations de convergence. Une présentation unifiée des principaux algorithmes ellipsoïdaux, aussi bien qu'une analyse de convergence et une interprétation en terme d'algorithme d'identification avec zone morte, ont été récemment effectuées [7]-[9]. Le principal avantage de ces algorithmes est leur simplicité due à leur formulation récursive. Cependant, ils délivrent souvent une approximation trop lâche du polytope exact. Une amélioration en terme de réduction de la taille de l'ellipsoïde, peut être obtenue au moyen d'une procédure itérative consistant à traiter toutes les données plusieurs fois. Le retraitement des données est effectué en prenant comme ellipsoïde initial à la i -ème itération, l'ellipsoïde final délivré à la $(i-1)$ ème itération [10].

Dans le cas d'une borne orthotopique, plusieurs algorithmes dits "orthotopiques" ont aussi été proposés [11]-[17]. Cependant, tous ces algorithmes présentent l'inconvénient d'être non récursifs, et très coûteux en temps de calcul quand le nombre de mesures K est grand, du fait qu'ils nécessitent de résoudre $2n$ problèmes de programmation linéaire avec n variables et $2K$ contraintes, où n est la dimension du vecteur de paramètres inconnus.

Dans [18] et [19], il est suggéré de prétraiter les données à l'aide d'un algorithme ellipsoïdal de manière à éliminer quelques unes des contraintes, avant d'appliquer un algorithme orthotopique ou polytopique. Ce prétraitement des données permet de diminuer le volume de calcul.



L'objet du présent article est de présenter une nouvelle méthode récursive de détermination d'une borne extérieure orthotopique de l'ensemble d'appartenance des paramètres, qui est un polytope. Contrairement à ce polytope, l'orthotope est caractérisé par un nombre de sommets constant et égal à 2^n , quel que soit le nombre de mesures traitées. La procédure de calcul récursif de ces sommets est la suivante:

L'algorithme est initialisé à l'aide d'un orthotope initial $O(0)$ centré sur l'origine de l'espace des paramètres, ou sur tout autre point de cet espace correspondant à une information a priori relative au vecteur de paramètres; les demi longueurs des côtés de $O(0)$ sont choisies suffisamment grandes pour que $O(0)$ contienne le polytope exact. A chaque instant k , un nouvel orthotope $O(k)$ est obtenu à l'aide des deux étapes suivantes: On détermine d'abord les sommets du polytope $P(k)$ résultant de l'intersection de l'orthotope précédent $O(k-1)$ avec les deux hyperplans parallèles associés à la nouvelle mesure $y(k)$. Puis, l'orthotope $O(k)$ est déterminé simplement en prenant pour les coordonnées de ses sommets, les valeurs minimale et maximale des coordonnées des sommets du polytope; ceci délivre en même temps des intervalles d'incertitude pour les paramètres du modèle.

Le §2 pose le problème de l'estimation paramétrique à l'aide du formalisme de l'erreur inconnue mais bornée. Le §3 rappelle quelques résultats fondamentaux concernant la description d'un orthotope. Le nouvel algorithme orthotopique est présenté dans le §4. Le §5 conclue cet article.

2. Approche EIMB

Considérons le modèle de régression linéaire mono entrée / mono sortie décrit par l'équation:

$$y(t) = \phi^T(t) \theta + e(t), \quad \theta \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

l'erreur $e(t)$ étant bornée et de bornes connues a priori:

$$e_{\min}(t) \leq e(t) \leq e_{\max}(t) \quad (2)$$

Tous les vecteurs de paramètres θ qui sont consistants avec la structure du modèle (1), les bornes d'erreur a priori (2) et les mesures $\{y(t), t \in [1, k]\}$, appartiennent à l'ensemble $S(k)$ défini comme:

$$S(k) = \{ \theta / y(t) - e_{\max}(t) \leq \phi^T(t) \theta \leq y(t) - e_{\min}(t), t \in [1, k] \}$$

L'ensemble d'appartenance $S(k)$ est aussi appelé ensemble d'incertitude paramétrique [20], ou ensemble de vraisemblance [21]. Cet ensemble peut être vu comme la région de l'espace paramétrique qui est délimitée par les k paires d'hyperplans parallèles $H_1(t)$ et $H_2(t)$, $t \in [1, k]$, tels que:

$$H_1(t) = \{ \theta / \phi^T(t) \theta = y(t) - e_{\min}(t) \} \quad (3)$$

$$H_2(t) = \{ \theta / \phi^T(t) \theta = y(t) + e_{\max}(t) \} \quad (4)$$

Chaque hyperplan $H_i(t)$ divise l'espace paramétrique en deux demi espaces $H_i^+(t)$ et $H_i^-(t)$ définis comme:

$$H_1^+(t) = \{ \theta / \phi^T(t) \theta \leq y(t) - e_{\min}(t) \} \quad (5)$$

$$H_1^-(t) = \{ \theta / \phi^T(t) \theta > y(t) - e_{\min}(t) \} \quad (6)$$

$$H_2^+(t) = \{ \theta / \phi^T(t) \theta \geq y(t) + e_{\max}(t) \} \quad (7)$$

$$H_2^-(t) = \{ \theta / \phi^T(t) \theta < y(t) + e_{\max}(t) \} \quad (8)$$

Alors, l'ensemble $S(k)$ est donné par:

$$S(k) = \bigcap_{t=1}^k H^+(t) \quad (9)$$

où:

$$H^+(t) = H_1^+(t) \cap H_2^+(t) \quad (10)$$

$S(k)$ a une forme polytopique, comme cela est montré sur la figure 1, pour $n=2$ et $k=4$.

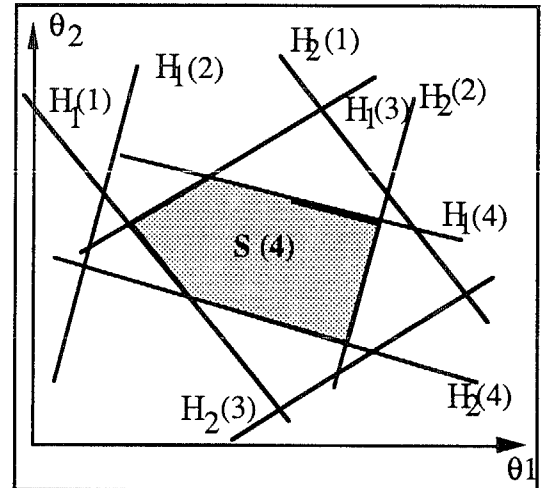


Fig.1 Ensemble d'incertitude paramétrique $S(k)$

Bien que sa taille diminue, cette région polytopique devient très compliquée à déterminer quand le nombre de mesures augmente, en raison de l'augmentation du nombre des sommets du polytope. Une solution plus simple consiste à approximer le polytope convexe $S(k)$ à l'aide d'une région de forme ellipsoïdale ([3], [7]-[9]), ou orthotopique ([11]-[17]), ou encore parallélotopique [22].

Soit $O(k)$ une approximation extérieure orthotopique de $S(k)$:

$$O(k) \supset S(k) \quad (11)$$

Cette région $O(k)$ peut être construite récursivement de telle sorte que:

$$O(k) \supset O(k-1) \cap H^+(k) \quad (12)$$

Par induction, à partir de (9) et (12), il est facile de vérifier que, si la région initiale $O(0)$ est choisie suffisamment grande pour contenir $S(k_0)$, où $k_0 \geq n$ est la première valeur de k pour laquelle n des k_0 vecteurs $\{\phi(t), t \in [1, k_0]\}$ sont linéairement indépendants, alors l'ensemble $O(k)$ satisfait la relation d'inclusion (11) pour toutes les valeurs de $k \geq k_0$.

Dans le paragraphe suivant, nous rappelons quelques résultats de base concernant la description d'un orthotope. Puis, dans le paragraphe 4, une nouvelle méthode pour construire récursivement une borne extérieure orthotopique $O(k)$ sera présentée.

3. Définition et description d'un orthotope

Un orthotope de dimension n peut être vu comme une collection de faces, chacune d'elles étant de dimension p , avec $p \in [0, n]$. Une face de dimension p résulte de l'intersection de $(n-p)$ hyperplans indépendants [23]. Ainsi, un sommet est une face de dimension 0, et une arête une face de dimension 1.

Considérons un orthotope de dimension n , centré autour du point C de l'espace paramétrique. Soient c et l les vecteurs dont les composantes sont respectivement les coordonnées du centre C et les demi longueurs des côtés de l'orthotope; les coordonnées des sommets sont alors égales à $c_k \pm l_k$.

Tout point d'une face de dimension p a $(n-p)$ de ses coordonnées fixées à $c_k \pm l_k$, tandis que ses p autres coordonnées prennent leur valeur dans les intervalles $[c_k - l_k, c_k + l_k]$ correspondants. Il en résulte que le nombre de faces de dimension p est:

$$Nf(p) = C_n^p \cdot 2^n - p \quad (13)$$

En appliquant cette formule, nous obtenons le nombre Nv de sommets ($p=0$), le nombre Ne d'arêtes ($p=1$) et le nombre total Nt de faces de l'orthotope:

$$Nv = Nf(0) = 2^n \quad (14)$$

$$Ne = Nf(1) = n \cdot 2^{n-1} \quad (15)$$

$$Nt = \sum_{p=0}^n Nf(p) = C_n^0 \cdot 2^n + C_n^1 \cdot 2^{n-1} + \dots + C_n^n \cdot 2^0 \quad (16)$$

et, le théorème du binôme nous donne:

$$Nt = 3^n \quad (17)$$

Le nombre de sommets étant égal à 2^n , nous pouvons utiliser le codage binaire pour représenter les numéros de sommets par un n -uplet $r = [r_1, \dots, r_n]$ dont la i -ème composante r_i est 0 ou 1, suivant que la i -ème coordonnée du sommet est $c_i - l_i$ ou $c_i + l_i$. Ceci est illustré à l'aide de la figure 2, pour $n=3$.

Par exemple, le sommet v_5 qui a $(c_1 + l_1, c_2 - l_2, c_3 + l_3)$ comme coordonnées, est représenté dans la base binaire par le triplet: $r(v_5) = [1, 0, 1]$.

Cette représentation des numéros de sommets sera utilisée dans le paragraphe suivant pour définir un test d'adjacence de deux sommets.

	θ_1	θ_2	θ_3
v_0	0	0	0
v_1	0	0	1
v_2	0	1	0
v_3	0	1	1
v_4	1	0	0
v_5	1	0	1
v_6	1	1	0
v_7	1	1	1

Fig.2 Codage binaire des numéros de sommets

4. Nouvel algorithme orthotopique récursif

Dans ce paragraphe, nous présentons un nouvel algorithme pour déterminer de façon récursive une borne extérieure de l'ensemble d'appartenance paramétrique $S(k)$. Le principe de cet algorithme, qui a été brièvement introduit pour la première fois dans [24], est illustré à l'aide de la figure 3, pour $n=2$.

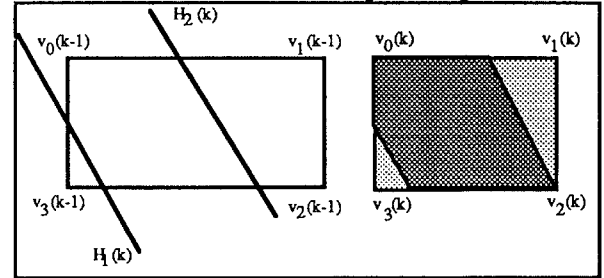


Fig. 3 : Principe de l'algorithme

Supposons qu'à l'instant $(k-1)$, un orthotope $O(k-1)$ ait été obtenu, avec les sommets $v_j(k-1)$, $j \in [0, 2^n - 1]$. Quand la k -ème mesure de sortie arrive, nous formons tout d'abord l'intersection polytopique de $O(k-1)$ avec les deux demi espaces positifs $H_i^+(k)$, $i \in [1, 2]$. Puis, l'orthotope $O(k)$ est simplement déterminé en prenant pour les coordonnées de ses sommets, les valeurs supérieure et inférieure des coordonnées des sommets du polytope. Ces deux étapes de l'algorithme sont maintenant explicitées.

Détermination de l'intersection polytopique de $O(k-1)$ avec $H_i^+(k)$, $i \in [1, 2]$:

Nous devons tout d'abord déterminer la position de tous les sommets $v_j(k-1)$, $j \in [0, 2^n - 1]$, vis à vis des deux hyperplans $H_i(k)$, $i \in [1, 2]$. Cette position est fournie par le signe des quantités suivantes:

$$\beta_{j1} = y(k) - e_{\min}(k) - \phi^T(k) v_j(k-1) \quad (18)$$

$$\beta_{j2} = -y(k) + e_{\max}(k) + \phi^T(k) v_j(k-1) \quad (19)$$

avec:

$$\beta_{ji} > 0 \quad \text{si} \quad v_j(k-1) \in H_i^+(k) \quad (20)$$

$$\beta_{ji} < 0 \quad \text{si} \quad v_j(k-1) \in H_i^-(k) \quad (21)$$

$$\beta_{ji} = 0 \quad \text{si} \quad v_j(k-1) \in H_i(k) \quad (22)$$

Trois cas sont à envisager.

Premier cas: $\beta_{ji} < 0$, $\forall j \in [0, 2^n - 1]$ et $i=1$ ou 2.

Dans ce cas, tous les sommets de l'orthotope $O(k-1)$ appartiennent au demi espace négatif $H_i^-(k)$, et l'orthotope résultant $O(k)$ est vide, ce qui provient d'un mauvais choix de l'orthotope initial $O(0)$ ou des bornes d'erreur a priori.

Deuxième cas: $\beta_{ji} \geq 0$, $\forall j \in [0, 2^n - 1]$ et $\forall i \in [1, 2]$.

Dans ce cas, tous les sommets de l'orthotope $O(k-1)$ appartiennent à la région $H_1^+(k) \cap H_2^+(k)$. Cela signifie que la nouvelle mesure est redondante, et nous avons alors: $O(k) = O(k-1)$.



De manière moins restrictive, il est suffisant qu'au moins $(2^{n-1}+1)$ sommets appartiennent à $H_1^+(k)$ ou $H_2^+(k)$, pour que la contrainte correspondante soit redondante.

Troisième cas: β_{ji} de signes différents.

Dans ce cas, certains sommets de l'orthotope $O(k-1)$ appartiennent à $H_1^+(k)$, et d'autres à $H_1^-(k)$. Ces derniers doivent être écartés. Puis, comme cela est montré sur la fig.3, nous construisons l'intersection de $O(k-1)$ et des demi-espaces $H_1^+(k)$, qui définit un polytope $P(k)$ dont les sommets sont:

*Les sommets de $O(k-1)$ appartenant à $H^+(k)$.

*De nouveaux sommets $v_m(k)$ obtenus à l'intersection des hyperplans $H_i(k)$, $i \in [1,2]$, et des arêtes de $O(k-1)$ liant deux sommets adjacents $v_j(k-1)$ et $v_l(k-1)$ situés dans $H_1^+(k)$ et $H_1^-(k)$ respectivement (i.e. $\beta_{ji} > 0$ et $\beta_{li} < 0$).

Un tel nouveau sommet $v_m(k)$, qui appartient à $H_1(k)$ ou $H_2(k)$, est une combinaison convexe des deux sommets adjacents $v_j(k-1)$ et $v_l(k-1)$, et il satisfait les équations suivantes:

$$v_m(k) = (1 - \lambda) v_j(k-1) + \lambda v_l(k-1) \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (23)$$

$$\phi^T(k) v_m(k) = d(k) \quad (24)$$

avec:

$$d(k) = \begin{cases} y(k) - e_{\min}(k) & \text{si } v_m(k) \in H_1(k) \\ y(k) - e_{\max}(k) & \text{si } v_m(k) \in H_2(k) \end{cases} \quad (25)$$

A partir des équations (23) et (24), nous obtenons

$$\lambda = \frac{\phi^T(k) v_j(k-1) - d(k)}{\phi^T(k) [v_j(k-1) - v_l(k-1)]} \quad (26)$$

Tous les nouveaux sommets sont déterminés à l'aide des formules (23)-(26).

Avant d'appliquer ces formules, nous devons détecter toutes les arêtes de $O(k-1)$ qui sont coupées par $H_i(k)$, $i \in [1,2]$, i.e. toutes les paires de sommets adjacents dont l'un, $v_j(k-1)$, est situé dans $H_1^+(k)$, et l'autre, $v_l(k-1)$, dans $H_1^-(k)$.

Un test très simple est proposé ci-après pour détecter l'adjacence de deux sommets de $O(k-1)$.

La position de tels sommets adjacents vis à vis des hyperplans $H_i(k)$, $i \in [1,2]$, est alors déterminée en utilisant les relations (18)-(22).

Test d'adjacence de deux sommets:

Par définition, deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils forment une arête. Cela signifie qu'ils diffèrent l'un de l'autre seulement par une de leurs coordonnées. Nous devons noter que tout sommet d'un orthotope de dimension n est adjacent à n autres sommets. En utilisant le codage binaire des numéros de sommets introduit au § 3, nous pouvons détecter l'adjacence de deux sommets à l'aide du test suivant:

"Les deux sommets $v_j(k-1)$ et $v_l(k-1)$ sont adjacents si et seulement si les codes binaires de leur numéro diffèrent l'un de l'autre par seulement un de leur bit." Par exemple, à partir de la fig.2, nous concluons que le sommet v_0 est adjacent aux sommets v_1 , v_2 et v_4 .

Détermination de l'orthotope $O(k)$:

Une fois que tous les sommets du polytope ont été déterminés, comme indiqué dans l'étape précédente, les 2^n sommets de l'orthotope $O(k)$ sont obtenus en prenant simplement le maximum et le minimum des coordonnées des sommets du polytope:

$$O(k) = \{ \theta / \theta_{\min}^j(k) \leq \theta^j(k) \leq \theta_{\max}^j(k), j \in [1, n] \} \quad (27)$$

avec:

$$\theta_{\min}^j(k) = \min_{i \in [0, n(k)]} v_i^j(k) \quad (28)$$

$$\theta_{\max}^j(k) = \max_{i \in [0, n(k)]} v_i^j(k) \quad (29)$$

où $n(k)$ est le nombre de sommets du polytope, à l'instant k , et $v_i^j(k)$ la j -ème coordonnée du sommet $v_i(k)$.

La définition (27) montre que le calcul de l'orthotope délivre simultanément les intervalles d'incertitude paramétrique.

Finalement, les coordonnées du centre de l'orthotope, qui peuvent être utilisées comme valeurs estimées courantes des paramètres, sont données par:

$$\theta^j(k) = [\theta_{\max}^j(k) - \theta_{\min}^j(k)] / 2 \quad (30)$$

5. Conclusion

Cet article nous a permis de présenter une nouvelle méthode d'identification de modèles de type régression linéaire. Cette méthode qui délivre simultanément une valeur estimée des paramètres et des intervalles d'incertitude associés, est à la fois simple à mettre en oeuvre, robuste sur le plan numérique et robuste vis à vis du bruit de mesure. Le très bon comportement de cette méthode est illustré à l'aide d'exemples simulés dans [24], où une comparaison avec l'estimateur classique des Moindres Carrés Récurifs est effectuée, et l'influence du choix des bornes a priori de l'erreur est plus particulièrement étudiée.

La liste des références bibliographiques sera fournie sur demande.