



## LIMITE DE RAYLEIGH ET FORMULE DE WOODWARD DE LA FORMATION DE VOIES CYCLIQUE

P. GOURNAY<sup>†\*</sup>, G. VEZZOSI<sup>\*</sup>, P. NICOLAS<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Thomson CSF/RGS, Service Traitement du Signal, X45, 66 rue du Fossé Blanc, 92231 Gennevilliers CEDEX

<sup>\*</sup> Laboratoire de Traitement du Signal et de l'Image, Campus de Beaulieu,  
Université de Rennes I, 35042 Rennes CEDEX

### RÉSUMÉ

**Résumé.** On considère le problème de l'estimation de l'angle d'arrivée d'une onde reçue sur un réseau de capteurs. Lorsque les signaux sont cyclostationnaires, il est possible de remplacer la formation de voies classique par une formation de voies cyclique, et ainsi de séparer des sources ayant le même azimut par la différence de leurs fréquences cycliques. Cette méthode est également moins sensible à la corrélation spatiale du bruit. Nous présentons une formation de voies cyclique pour des signaux ne vérifiant pas l'hypothèse de bande étroite. Le pouvoir de résolution exprimé en termes de limite de Rayleigh, puis la variance des estimées (formule de Woodward) sont calculés et comparés à ceux de la formation de voies classique.

### INTRODUCTION

La formation de voies est une solution simple et robuste au problème de l'estimation de l'angle d'arrivée d'une onde. Sa principale limitation est sa faible résolution angulaire : elle ne permet pas de distinguer deux sources proches, ni de traiter une source faible en présence d'une autre plus puissante. Lorsque le signal est cyclostationnaire, il est possible d'exploiter la propriété de sélectivité associée à la corrélation spectrale. La formation de voies cyclique constitue ainsi une alternative intéressante aux méthodes à Haute Résolution angulaire. Elle est également moins sensible à la corrélation spatiale du bruit. La référence [1] propose une formation de voies cyclique pour des signaux à bande étroite, c'est à dire qu'elle suppose les vecteurs directionnels constants dans la bande du signal. Nous présentons une formation de voies cyclique adaptée au cas de signaux ne vérifiant pas l'hypothèse de bande étroite. La limite de Rayleigh, puis la variance des estimées en présence de bruit stationnaire et spatialement blanc (formule de Woodward), sont calculées et comparées à celles de la formation de voies classique.

### 1. CYCLOSTATIONNARITE ET CORRELATION SPECTRALE

Rappelons qu'un signal aléatoire à temps continu  $x(t)$  est cyclostationnaire s'il est harmonisable [2]

$$x(t) = \int e^{2i\pi ft} dX(f), \quad (1)$$

et si ses composantes spectrales aux fréquences  $\nu$  et  $\nu'$  sont corrélées toutes les fois que la différence  $\nu - \nu'$  prend ses valeurs dans un ensemble discret de fréquences cycliques  $\{\alpha\}$ . Ceci s'exprime indifféremment par

$$E dX(\nu) dX^*(\nu') = \sum_{\alpha} \gamma_x^{\alpha} \left( \frac{\nu + \nu'}{2} \right) \delta(\nu - \nu' - \alpha) d\nu d\nu', \quad (2)$$

ou par

$$r_x(t, \tau) = E x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) = \sum_{\alpha} r_x^{\alpha}(\tau) e^{2i\pi\alpha t}, \quad (3)$$

où les fonctions  $\gamma_x^{\alpha}(f)$  et  $r_x^{\alpha}(\tau)$ , qui définissent respectivement l'autocorrélation cyclique et la corrélation spectrale du signal  $x(t)$ , sont transformées de Fourier l'une de l'autre (relation de Wiener

### ABSTRACT

**Abstract.** We consider the problem of estimating the angle of arrival of a wave impinging on an array of sensors. When the signals are cyclostationary, it is possible to replace classical beamforming by a cyclic beamforming, and thus to separate sources with the same bearing by the difference of their cyclic frequencies. This method is also less sensitive to the noise spatial correlation. We present a cyclic beamforming for signals which are not narrow band. The resolving power, expressed in terms of Rayleigh's criterion, and the variance of the estimates (Woodward's formula) are calculated and compared with those of classical beamforming.

cyclique) :

$$\gamma_x^{\alpha}(f) = \int r_x^{\alpha}(\tau) e^{-2i\pi f \tau} d\tau. \quad (4)$$

La corrélation spectrale à la fréquence harmonique  $f$  et à la fréquence cyclique  $\alpha$  représente la corrélation entre les composantes spectrales du signal en  $f + \alpha/2$  et  $f - \alpha/2$ . En  $\alpha = 0$ , elle est la densité spectrale de puissance. Lorsque le signal est stationnaire, elle est nulle pour  $\alpha \neq 0$ . Lorsque le signal est modulé, le jeu de fréquences cycliques est caractéristique du type de modulation, et dépend de paramètres tels que la fréquence porteuse ou le débit [3].

### 2. LA FORMATION DE VOIES CYCLIQUE

#### Modèle de signaux

On considère une source d'azimut  $\theta_0$  délivrant un signal cyclostationnaire, possédant une corrélation spectrale non nulle pour le couple  $(f, \alpha)$ . Ce signal est réel, sur porteuse. Il est reçu sur un réseau de  $N$  capteurs, en présence de bruit et d'interférences additives ne possédant pas de corrélation spectrale en  $(f, \alpha)$ . On suppose la source suffisamment éloignée du réseau de capteurs pour pouvoir considérer le front d'onde plan. On appelle  $s(t)$  le signal pris en un point de référence,  $b_n(t)$  la somme du bruit et des interférences reçues sur le capteur  $n$ . Les observations relevées sur le réseau de capteurs sont alors modélisées par le vecteur temporel

$$\underline{x}(t) = [s(t - \tau_n(\theta_0)) + b_n(t), 1 \leq n \leq N]^T, \quad (5)$$

où  $\tau_n(\theta_0)$  est le temps de propagation de l'onde entre le point de référence et le capteur  $n$ . Pour une géométrie d'antenne donnée, ce sont des fonctions connues de la direction d'arrivée  $\theta_0$  de l'onde. La relation (5) s'exprime dans le domaine fréquentiel sous la forme

$$d\underline{X}(f) = \underline{A}(f, \theta_0) dS(f) + d\underline{B}(f), \quad (6)$$

où  $\underline{A}(f, \theta_0)$  est le vecteur directionnel à la fréquence  $f$ , pour une onde d'azimut  $\theta_0$ . Ce vecteur représentatif de la fonction de transfert du milieu de propagation entre le point de référence et les éléments du réseau est un vecteur de déphasages de la forme

$$\underline{A}(f, \theta) = [e^{-2i\pi f \tau_n(\theta)}, 1 \leq n \leq N]^T. \quad (7)$$



Comme la corrélation spectrale du bruit et des interférences est nulle en  $(f, \alpha)$ , la matrice de corrélation spectrale des observations prend la forme de la matrice de rang un

$$\Gamma^\alpha(f) = \gamma_s^\alpha(f) \underline{A}(f + \alpha/2, \theta_0) \underline{A}^\dagger(f - \alpha/2, \theta_0), \quad (8)$$

où  $\gamma_s^\alpha(f)$  est la corrélation spectrale du signal pris au point de référence. Si  $b(t)$  est un bruit stationnaire et spatialement blanc, sa contribution se retrouve en  $\alpha=0$  sous la forme d'un terme additif  $\gamma_b(f) \text{Id}$ , où  $\text{Id}$  est la matrice identité de taille  $N$  et  $\gamma_b(f)$  la densité spectrale du bruit.

### La formation de voies cyclique

Dans la pratique on ne possède qu'une estimée  $\hat{\Gamma}$  de  $\Gamma^\alpha(f)$ . L'expression (8) constitue un modèle  $\Gamma(\gamma, \theta)$  paramétré par le couple  $(\gamma, \theta)$ , pris au point  $(\gamma_s^\alpha(f), \theta_0)$ . L'identification des paramètres du modèle peut s'effectuer en minimisant par rapport au couple  $(\gamma, \theta)$  la différence quadratique entre l'estimée et son modèle, soit

$$\|\hat{\Gamma} - \Gamma(\gamma, \theta)\|_F^2, \quad (9)$$

où  $\|\cdot\|_F$  est la norme de Frobenius d'une matrice. L'expression (9) est un trinôme en  $\gamma$ . Dans un premier temps, on détermine à  $\theta$  fixé l'expression  $\hat{\gamma}$  de l'estimée de la corrélation spectrale minimisant (9). La minimisation de (9) par rapport à  $\theta$  équivaut ensuite à maximiser le module au carré de  $\hat{\gamma}$ . La formation de voies cyclique consiste donc en la recherche de l'angle  $\hat{\theta}$  maximisant la fonction

$$F(\theta) = \frac{|\underline{A}^\dagger(f + \alpha/2, \theta) \hat{\Gamma} \underline{A}(f - \alpha/2, \theta)|^2}{N^4}. \quad (10)$$

L'analogie avec la formation de voies classique est évidente. Dans le cas d'une seule source, la formation de voies classique maximise la puissance reçue dans la direction d'arrivée exacte de la source. La formation de voies cyclique maximise le module au carré de la corrélation spectrale dans cette même direction. Le module est nécessaire car la corrélation spectrale est, contrairement à la densité spectrale de puissance, généralement complexe. Pour  $\alpha=0$ , la corrélation spectrale est la densité spectrale de puissance, les vecteurs directionnels gauche et droit sont égaux, et la formation de voies cyclique est le carré de la formation de voies classique.

### 3. LIMITE DE RAYLEIGH

La limite de Rayleigh de la formation de voies représente une bonne approximation de l'écart angulaire minimal en dessous duquel deux sources de même puissance ne peuvent pas être séparées : c'est la largeur à 3dB du lobe principal de la fonction de directivité de la formation de voies pour une source unique. On la calcule en approximant la fonction de directivité par une parabole autour de son maximum. Le résultat obtenu ne dépend que de la direction d'arrivée de l'onde et de la géométrie de l'antenne.

Pour une formation de voies classique à la fréquence  $f$  et une onde provenant de la direction  $\theta_0$ , on sait que la limite de Rayleigh est donnée par la relation usuelle

$$\theta_3^2(f) = \frac{N^2}{2 \left[ N \|\underline{A}'(f, \theta_0)\| - \left| \underline{A}^\dagger(f, \theta_0) \cdot \underline{A}'(f, \theta_0) \right|^2 \right]}, \quad (11)$$

dans laquelle  $\underline{A}'(f, \theta_0)$  est la dérivée du vecteur directionnel par rapport à la direction d'arrivée, prise dans la direction d'arrivée de l'onde. Pour la formation de voies cyclique au couple  $(f, \alpha)$ , on montre (Annexe I) que la limite de Rayleigh  $2\theta_3(f, \alpha)$  est liée à celles des formations de voies classiques aux fréquences  $f+\alpha/2$  et  $f-\alpha/2$  par la relation

$$\frac{1}{\theta_3^2(f, \alpha)} = \frac{1}{\theta_3^2(f + \alpha/2)} + \frac{1}{\theta_3^2(f - \alpha/2)}. \quad (12)$$

La relation (12) appliquée en  $\alpha=0$  fait apparaître un facteur  $1/\sqrt{2}$  sur la limite de Rayleigh de la formation de voies classique. Ce

facteur ne provient que de l'élévation au carré de la sortie de la formation de voies cyclique, il convient donc d'en tenir compte lors de l'interprétation du résultat. La relation liant la limite de Rayleigh cyclique aux limites de Rayleigh classiques est alors une moyenne harmonique sur les  $\theta_3^2$ .

### 4. FORMULE DE WOODWARD

On se place sous l'hypothèse d'une source unique et d'un bruit stationnaire, spatialement blanc. Le rapport signal à bruit à la fréquence  $f$ , défini comme le rapport des densités spectrales de puissance du signal et du bruit, est noté  $\rho_f$ .  $K$  désigne le nombre de degrés de liberté de l'estimée de la matrice de corrélation spectrale. La variance  $W(f)$  des estimées de la direction d'arrivée d'une onde par formation de voies classique est donnée par la formule de Woodward usuelle

$$W(f) = \frac{\theta_3^2(f)}{K} \frac{1 + N\rho_f}{N^2\rho_f^2}. \quad (13)$$

On montre (Annexe II) que la variance des estimées de la direction d'arrivée d'une onde par formation de voies cyclique, pour  $f$  et  $\alpha$  non nuls, est donnée par la formule de Woodward cyclique

$$W(f, \alpha) = \frac{1}{C^2(f, \alpha)} \frac{\theta_3^4(f, \alpha)}{\theta_3^2(f + \alpha/2) \theta_3^2(f - \alpha/2)} \left[ \frac{\rho_{f+\alpha/2}}{\rho_{f-\alpha/2}} W(f + \alpha/2) + \frac{\rho_{f-\alpha/2}}{\rho_{f+\alpha/2}} W(f - \alpha/2) \right], \quad (14)$$

où  $C(f, \alpha)$  est la fonction de cohérence spectrale définie par

$$C(f, \alpha) = \frac{|\gamma_s^\alpha(f)|}{\sqrt{\gamma_s(f + \alpha/2) \gamma_s(f - \alpha/2)}}. \quad (15)$$

Le résultat (14) est à multiplier par 2 lorsque  $f$  ou  $\alpha$  est nul. Appliqué avec  $\alpha=0$ , il redonne ainsi la formule de Woodward usuelle. Lorsque  $\alpha$  est non nul, deux cas sont à considérer. Lorsque  $f$  est nul, la formation de voies cyclique revient à faire une formation de voies sur la matrice des seconds moments des composantes spectrales du signal, et la formule de Woodward cyclique s'écrit plus simplement

$$W(0, \alpha) = \frac{1}{C^2(0, \alpha)} W\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (16)$$

La perte sur la variance est donc d'un facteur  $1/C^2(0, \alpha)$ . Lorsque  $f$  est non nul, la variance de la formation de voies cyclique peut être comparée à celle obtenue en sommant sans pondérations les sorties des formations de voies aux fréquences  $f \pm \alpha/2$ . Un calcul similaire à celui mené en annexe montre que cette dernière vaut

$$\frac{\theta_3^4(f - \alpha/2) \gamma_s(f + \alpha/2) W(f + \alpha/2) + \theta_3^4(f + \alpha/2) \gamma_s(f - \alpha/2) W(f - \alpha/2)}{\left( \gamma_s(f + \alpha/2) \theta_3^2(f - \alpha/2) + \gamma_s(f - \alpha/2) \theta_3^2(f + \alpha/2) \right)^2} \quad (17)$$

Pour la discussion, supposons le signal à bande étroite autour de  $f$ , et les densités spectrales de puissance du signal et du bruit constantes aux deux fréquences. La relation (17) devient alors  $W(f \pm \alpha/2)/2$ , et la perte de la formation de voies cyclique est alors à nouveau d'un facteur  $1/C^2(f, \alpha)$ .

On considère par exemple un réseau linéaire à  $N=5$  capteurs espacés de  $\lambda/4$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde définie à la fréquence 0.25. Le signal provient de la direction d'arrivée  $\theta_0=45^\circ$  par rapport au travers de l'antenne. Le rapport signal à bruit est le même pour toutes les fréquences de travail, et la cohérence spectrale est égale à 1. Les matrices spectrales sont estimées avec  $K=64$  moyennes. La variance théorique des estimées prévue par la formule de Woodward est représentée sur la figure 1 pour différents couples  $(f, \alpha)$ . Les courbes en (0.25,0) et (0,0.5) sont confondues. La variance mesurée par simulation sur 1000 tirages réalisés dans les mêmes conditions est représentée sur la figure 2. Les résultats sont conformes à la théorie jusqu'au seuil d'environ -8dB au dessous duquel on entre dans le domaine des grandes erreurs [4].



## CONCLUSION

La limite de Rayleigh de la formation de voies cyclique en  $(f, \alpha)$  est liée à celle des formations de voies classiques en  $f \pm \alpha/2$  par une moyenne harmonique sur les  $\theta_3^2$ . Selon le coefficient de cohérence spectrale du signal considéré, la variance des estimées, en présence de bruit stationnaire et spatialement blanc, est généralement supérieure ou égale à celle obtenue en utilisant la formation de voies classique. Cependant, la formation de voies cyclique, lorsqu'on peut l'appliquer, présente deux avantages : elle permet de séparer des sources de même gisement mais dont les paramètres cycliques sont différents ; elle est également moins sensible à la corrélation spatiale du bruit.

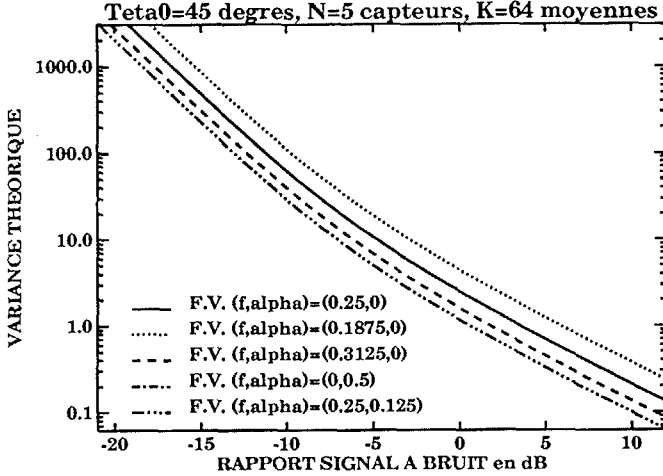


Fig. 1 : Variance théorique des estimées

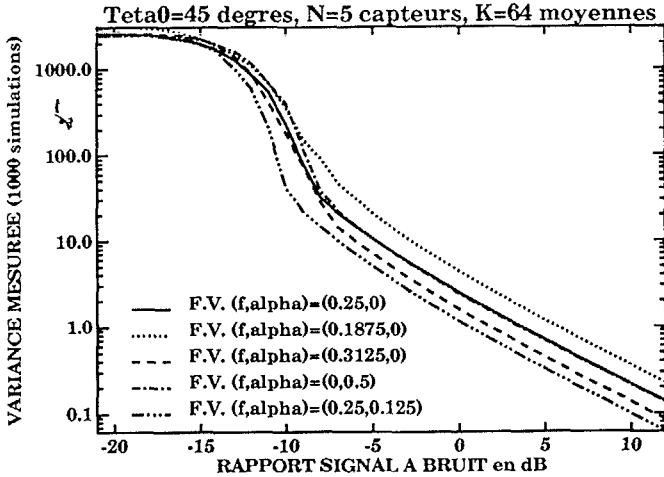


Fig. 2 : Variance mesurée des estimées

## ANNEXE I : Calcul de la limite de Rayleigh

On note  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  les vecteurs directionnels aux fréquences  $f + \alpha/2$  et  $f - \alpha/2$ .  $\underline{A}_0$  et  $\underline{B}_0$  désignent ces mêmes vecteurs pris dans la direction d'arrivée  $\theta_0$  de l'onde. La norme au carré des vecteurs directionnels est une constante égale au nombre de capteurs  $N$ . Par dérivation par rapport à la direction d'arrivée, on obtient les relations suivantes, ainsi que leur équivalent pour  $\underline{B}$  :

$$\begin{aligned} \underline{A}^\dagger \underline{A}' + \underline{A}'^\dagger \underline{A} &= 0 \\ \text{Re}[\underline{A}^\dagger \underline{A}'' ] + \|\underline{A}'\|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

La fonction de directivité de la formation de voies cyclique en  $(f, \alpha)$ , pour une source unique de corrélation spectrale unité et de direction d'arrivée  $\theta_0$ , peut s'exprimer sous la forme du produit des fonctions de directivité des formations de voies classiques en  $f + \alpha/2$  et  $f - \alpha/2$

$$D(\theta) = \frac{|\underline{A}^\dagger \underline{A}_0 \underline{B}_0^\dagger \underline{B}|^2}{N^4} = D_+(\theta) D_-(\theta). \quad (19)$$

Ces trois fonctions de directivité sont composées d'un lobe principal maximum en  $\theta_0$  et de lobes secondaires. On les approxime par une parabole autour de leur maximum. Ainsi, la fonction de directivité de la formation de voies cyclique est approximée par

$$D(\theta_0 + \Delta\theta) = D(\theta_0) + (\Delta\theta)^2 \frac{D''(\theta_0)}{2}. \quad (20)$$

Par définition de la limite de Rayleigh, la fonction de directivité pour  $\Delta\theta = \theta_3$  est la moitié de celle en  $\theta_0$ , et par conséquent

$$(\theta_3)^2 = -\frac{D(\theta_0)}{D''(\theta_0)}. \quad (21)$$

La dérivée seconde  $D''(\theta)$  se calcule comme la dérivée du produit (19). En  $\theta = \theta_0$ , les dérivées des fonctions de directivité sont nulles, et on a

$$D''(\theta_0) = D_+''(\theta_0) D_-(\theta_0) + D_+(\theta_0) D_-''(\theta_0), \quad (22)$$

ce qui amène directement l'expression (12) de la limite de Rayleigh de la formation de voies cyclique. Les dérivées par rapport à  $\theta$  des fonctions de directivité des formations de voies classiques se calculent comme la dérivée d'un produit de vecteurs directionnels. En tenant compte des simplifications introduites par la formule (18), la fonction de directivité et sa dérivée seconde prises dans la direction d'arrivée  $\theta_0$  de l'onde s'expriment simplement sous la forme

$$\begin{aligned} D_+(\theta_0) &= 1 \\ D_+''(\theta_0) &= 2 \left[ \left| \underline{A}'^\dagger \underline{A}_0 \underline{A}'_0 \right|^2 - N \|\underline{A}'_0\|^2 \right] / N^2. \end{aligned} \quad (23)$$

On en déduit l'expression (11) de la limite de Rayleigh de la formation de voies classique.

## ANNEXE II : Calcul de la formule de Woodward

### 1. Estimation de la corrélation spectrale

Nous rappelons ici le principe de l'estimation de la corrélation spectrale par moyennage temporel d'un périodogramme cyclique, qui est détaillé en [5]. Les composantes fréquentielles du signal en  $f + \alpha/2$  et  $f - \alpha/2$  sont isolées par deux filtres sélectifs. Les sorties de ces filtres sont ramenées en bande de base par l'opération de démodulation complexe, la seconde est conjuguée. La moyenne temporelle des produits croisés constitue alors une estimée asymptotiquement non biaisée de la corrélation spectrale au point  $(f, \alpha)$ . On montre que si la bande des filtres sélectifs est inférieure à la plus petite fréquence cyclique du signal, alors leurs sorties sont rigoureusement stationnaires. Elles sont cependant non circulaires, et la propriété de cyclostationnarité reste contenue dans leurs corrélations croisées.

On note  $\underline{X}(k)$ ,  $1 \leq k \leq K$  et  $\underline{Y}(k)$ ,  $1 \leq k \leq K$  les vecteurs des sorties de capteurs filtrés autour de  $f + \alpha/2$  et  $f - \alpha/2$ , démodulées complexe et échantillonnées :

$$\begin{aligned} \underline{X}(k) &= [X_1(k), \dots, X_N(k)]^T \\ \underline{Y}(k) &= [Y_1(k), \dots, Y_N(k)]^T. \end{aligned} \quad (24)$$

Ces vecteurs aléatoires sont supposés gaussiens, complexes, indépendants temporellement et de même loi. Leurs moments sont des matrices de corrélation spectrale particulières, que l'on note

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx} &= \mathbf{E} \underline{X} \underline{X}^\dagger = \Gamma^0(f + \alpha/2), & \tilde{\Gamma}_{xx} &= \mathbf{E} \underline{X} \underline{X}^T = \Gamma^{2f + \alpha}(0), \\ \Gamma_{yy} &= \mathbf{E} \underline{Y} \underline{Y}^\dagger = \Gamma^0(f - \alpha/2), & \tilde{\Gamma}_{yy} &= \mathbf{E} \underline{Y} \underline{Y}^T = \Gamma^{2f - \alpha}(0), \\ \Gamma_{xy} &= \mathbf{E} \underline{X} \underline{Y}^\dagger = \Gamma^\alpha(f), & \tilde{\Gamma}_{xy} &= \mathbf{E} \underline{X} \underline{Y}^T = \Gamma^{2f}(\alpha/2). \end{aligned} \quad (25)$$

Soit  $\hat{\Gamma}$  l'estimée de  $\Gamma_{xy}$  et  $\Delta\Gamma$  l'erreur d'estimation :

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \underline{X}(k) \underline{Y}^\dagger(k) = \Gamma_{xy} + \Delta\Gamma. \quad (26)$$

### 2. Formules de covariance

On cherche la covariance selon les premiers et les seconds



moments des erreurs d'estimation de la corrélation spectrale. L'estimée étant non biaisée, le premier moment s'écrit sous la forme

$$E\Delta\Gamma(i,j)\Delta\Gamma^*(m,n) = E\hat{\Gamma}(i,j)\hat{\Gamma}^*(m,n) - \Gamma_{xy}(i,j)\Gamma_{xy}^*(m,n), \quad (27)$$

avec

$$\hat{\Gamma}(i,j)\hat{\Gamma}^*(m,n) = \frac{1}{K^2} \sum_{k,l=1}^K X_i(k)Y_j^*(k)X_m^*(l)Y_n(l). \quad (28)$$

L'espérance mathématique de cette expression se calcule en utilisant l'indépendance temporelle des composantes des vecteurs, puis en appliquant la formule d'Isserli de factorisation des moments d'ordre 4 pour les variables gaussiennes. On obtient ainsi l'expression de la covariance selon le premier moment des erreurs d'estimation

$$E\Delta\Gamma(i,j)\Delta\Gamma^*(m,n) = \frac{1}{K}\Gamma_{xx}(i,m)\Gamma_{yy}^*(j,n) + \frac{1}{K}\tilde{\Gamma}_{xy}(i,n)\tilde{\Gamma}_{xy}^*(m,j). \quad (29)$$

On calcule de la même manière la covariance selon le second moment des erreurs d'estimation

$$E\Delta\Gamma(i,j)\Delta\Gamma(m,n) = \frac{1}{K}\Gamma(i,n)\Gamma(m,j) + \frac{1}{K}\tilde{\Gamma}_{xx}(i,m)\tilde{\Gamma}_{yy}^*(j,n). \quad (30)$$

Soit maintenant  $Q=[Q(i,j), 1 \leq i,j \leq N]$  une matrice complexe quelconque. Considérons la trace

$$\text{tr}(\Delta\Gamma Q) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta\Gamma(i,j)Q(j,i). \quad (31)$$

L'espérance mathématique du module au carré se calcule en utilisant la relation (29). Le résultat s'écrit sous la forme

$$E|\text{tr}(\Delta\Gamma Q)|^2 = \frac{1}{K}\text{tr}(\Gamma_{xx} Q^\dagger \Gamma_{yy}^\dagger Q) + \frac{1}{K}\text{tr}(\tilde{\Gamma}_{xy} Q^* \tilde{\Gamma}_{xy}^* Q). \quad (32)$$

On obtient de la même manière, en utilisant la relation (30),

$$E(\text{tr}(\Delta\Gamma Q))^2 = \frac{1}{K}\text{tr}(\Gamma_{xy} Q)^2 + \frac{1}{K}\text{tr}(\tilde{\Gamma}_{yy}^\dagger Q \tilde{\Gamma}_{xx} Q^\dagger). \quad (33)$$

### 3. Principe du calcul

La direction d'arrivée est estimée au maximum de

$$F(\theta) = \frac{|\underline{A}^\dagger(\theta)\hat{\Gamma}\underline{B}(\theta)|^2}{N^4}. \quad (34)$$

On l'approxime autour de son maximum par une parabole. On pose  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ . L'approximation linéaire de  $F'(\theta)$  autour de la direction d'arrivée vraie  $\theta_0$  s'écrit sous la forme

$$F'(\theta) = F'(\theta_0) + \Delta\theta F''(\theta_0). \quad (35)$$

Elle s'annule en  $\theta = \hat{\theta}$ . La variance de l'erreur d'estimation de la direction d'arrivée est donc donnée par

$$E(\Delta\theta)^2 = E\left[\frac{F'(\theta_0)}{F''(\theta_0)}\right]^2. \quad (36)$$

On choisit de limiter le développement de  $[F'(\theta_0)/F''(\theta_0)]^2$  à son second ordre en  $\Delta\Gamma$ . On constate qu'au premier ordre,  $F'(\theta_0)$  est une variable aléatoire centrée dont la variance varie comme  $1/K$ , et  $F''(\theta_0)$  est une variable aléatoire de moyenne non nulle, dont la variance varie également en  $1/K$ . Le développement recherché est donc obtenu en développant  $F'(\theta_0)$  au premier ordre en  $\Delta\Gamma$ , et en ne conservant que le terme constant du développement de  $F''(\theta_0)$ . L'équation (35) est alors équivalente à

$$E(\Delta\theta)^2 = \frac{E[F'(\theta_0)]^2}{[E F''(\theta_0)]^2}. \quad (37)$$

On mène le calcul pour  $f, \alpha, f \pm \alpha/2$  non nuls. Le cas  $f=0$  s'en déduit facilement et est traité en conclusion, le cas  $\alpha=0$  est celui de la formation de voies classique, et les cas  $f \pm \alpha/2=0$  présentent peu

d'intérêt pratique. Le résultat (18) est utilisé tout au long du calcul.

### 4. Calcul de la formule de Woodward

Calcul de  $E[F'(\theta_0)^2]$

La dérivée par rapport à  $\theta$  de la sortie de formation de voies (34) se calcule comme la dérivée d'un produit de fonctions de  $\theta$ . On écrit alors  $F'(\theta)$  en décomposant la matrice de corrélation spectrale estimée sous la forme  $\hat{\Gamma} = \gamma_s^\alpha(f)\underline{A}_0\underline{B}_0^\dagger + \Delta\Gamma$ , et en ne conservant que le terme constant et le terme linéaire. Au point  $\theta = \theta_0$ , on constate que le terme constant est nul. Le carré de la dérivée de la sortie de formation de voies s'écrit alors

$$F'(\theta_0)^2 = \frac{2}{N^8} \left| \gamma_s^\alpha(f) \right|^2 |\text{tr}(\Delta\Gamma Q)|^2 + \frac{2}{N^8} \text{Re} \left( \gamma_s^\alpha(f) \right)^2 [\text{tr}(\Delta\Gamma Q)]^2, \quad (38)$$

avec

$$Q = N^2 \left( \underline{B}_0 \underline{A}_0^\dagger + \underline{B}_0^\dagger \underline{A}_0 \right) + N \left( \underline{A}_0^\dagger \underline{A}_0 + \underline{B}_0^\dagger \underline{B}_0 \right) \underline{B}_0 \underline{A}_0^\dagger. \quad (39)$$

L'espérance mathématique de (38) se calcule en utilisant les résultats (32) et (33). Compte tenu des hypothèses sur  $f$  et  $\alpha$ , les différentes matrices de corrélation spectrale ont pour expression

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx} &= \gamma_b(f + \frac{\alpha}{2}) \text{Id} + \gamma_s(f) \underline{A}_0 \underline{A}_0^\dagger, & \tilde{\Gamma}_{xx} &= \gamma_s^{2f+\alpha(0)} \underline{A}_0 \underline{A}_0^\dagger, \\ \Gamma_{yy} &= \gamma_b(f - \frac{\alpha}{2}) \text{Id} + \gamma_s(f) \underline{B}_0 \underline{B}_0^\dagger, & \tilde{\Gamma}_{yy} &= \gamma_s^{2f-\alpha(0)} \underline{B}_0 \underline{B}_0^\dagger, \\ \Gamma_{xy} &= \gamma_s^\alpha(f) \underline{A}_0 \underline{B}_0^\dagger, & \tilde{\Gamma}_{xy} &= \gamma_s^{2f}(\alpha/2) \underline{A}_0 \underline{B}_0^\dagger. \end{aligned} \quad (40)$$

Le calcul montre que seul le premier terme de l'équation (32) est non nul. Il reste alors

$$\begin{aligned} E[F'(\theta_0)^2] &= \frac{2}{KN^4} \left| \gamma_s^\alpha(f) \right|^2 \gamma_b \left[ \gamma_b + N\gamma_{s-} \left[ N \|\underline{A}_0'\|^2 - \|\underline{A}_0^\dagger \underline{A}_0\|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{KN^4} \left| \gamma_s^\alpha(f) \right|^2 \gamma_b \left[ \gamma_b + N\gamma_{s+} \left[ N \|\underline{B}_0'\|^2 - \|\underline{B}_0^\dagger \underline{B}_0\|^2 \right] \right], \end{aligned} \quad (41)$$

où  $\gamma_{s+}, \gamma_{b+}, \gamma_s$  et  $\gamma_b$  sont les densités spectrales du signal et du bruit aux fréquences  $f+\alpha/2$  et  $f-\alpha/2$ , respectivement.

Calcul de  $E[F''(\theta_0)]$

On dérive une seconde fois la sortie de formation de voies. On y introduit l'expression de l'estimée de la matrice de corrélation spectrale. On obtient finalement pour  $\theta = \theta_0$

$$E[F''(\theta_0)] = \frac{2}{N^2} \left| \gamma_s^\alpha(f) \right|^2 \left[ \left( \|\underline{A}_0^\dagger \underline{A}_0'\|^2 - N \|\underline{A}_0'\|^2 \right) + \left( \|\underline{B}_0^\dagger \underline{B}_0'\|^2 - N \|\underline{B}_0'\|^2 \right) \right] \quad (42)$$

Conclusion

Les résultats (41) et (42) conduisent directement à l'expression (14) de la formule de Woodward cyclique lorsque  $\alpha, f$ , et  $f \pm \alpha/2$  sont non nuls. Lorsque  $f$  est nul, le vecteur directionnel  $\underline{A}$  est le conjugué de  $\underline{B}$ ,  $Q$  est symétrique complexe, on a  $\tilde{\Gamma}_{xy} = \Gamma_{xx} = \Gamma_{yy}^\dagger$ , et la variance est doublée par le deuxième terme de (32). Lorsque  $\alpha$  est nul, la variance des estimées est donnée par la formule de Woodward classique.

### REFERENCES

- [1] G. GELLI, L. IZZO, "A cyclic beamforming method for signal DOA estimation", Proc. EUSIPCO'92, Brussels, Belgium, Aug. 24-29 1992 pp 1805-1808
- [2] M. LOEVE, "Probability theory", D. Van Nostrand, 1955
- [3] W.A. GARDNER, "Statistical spectral analysis, a non probabilistic theory", Prentice Hall (1988)
- [4] J.P. IANIELLO, "Time delay estimation via cross-correlation in the presence of large estimation errors", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-30, N° 6, December 1982
- [5] R.S. ROBERTS, W.A. BROWN, H.H. LOOMIS Jr, "Computationally efficient algorithms for cyclic spectral estimation", IEEE S.P. Magazine, April 1991