

ESTIMATION DE DÉFORMATION D'ANTENNE

Jean-Jacques FUCHS

IRISA/Université de Rennes I

Campus de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex - France

RÉSUMÉ

Nous considérons le cas d'une antenne linéaire, longue et flexible de capteurs équirépartis remorquée par un bâtiment de surface et nous développons un test qui permet de décider de la rectitude de l'antenne. Un algorithme d'estimation de la forme de l'antenne quand celle-ci est déclarée déformée est également proposé. L'idée est d'utiliser le test pour déterminer des sous-antennes *linéaires* de taille maximale sur lesquelles le traitement habituel peut être poursuivi et de reconstruire une antenne linéaire par morceaux à partir des gisements estimés par ces différentes sous-antennes.

ABSTRACT

We consider a thin flexible line array of equispaced hydrophones that is towed through the sea and develop a procedure that allows to test the straightness of the array. An algorithm that allows to estimate the form of the array when it has been declared deformed is also proposed. The test is used to determine the maximum size of admissible sub-arrays on which the standard processing can be pursued. By combining then the bearings estimated by the different sub-arrays we reconstruct a piecewise linear estimate of the form of the array.

1. INTRODUCTION

La calibration d'antenne constitue un enjeu important pour les antennes remorquées de grande longueur car l'incertitude sur la position des capteurs dégrade de façon importante les performances des techniques de détection et de localisation. De nombreuses publications récentes considèrent ce problème [1, 2, 3]. Si les incertitudes sur les positions sont suffisamment faibles, les algorithmes de localisation supposant que les capteurs occupent leurs positions nominales donnent des estimées de gisements qui ne sont que faiblement biaisées. On imagine alors aisément qu'en utilisant ces estimées et les positions nominales des capteurs comme point initial d'un algorithme d'optimisation d'un critère global incluant une paramétrisation des déformations de l'antenne, on ait des chances de converger vers l'unique optimum global associé aux vrais gisements et vraies positions. Ces approches sont cependant strictement limitées à de petites déformations et l'on a du mal à caractériser les écarts admissibles qui dépendent d'ailleurs de la configuration des sources. De plus comme ce sont les antennes longues qui sont le plus sensibles aux déformations, on arrive à une sorte de contradiction, car ce sont également elles qui sont le plus susceptibles de se déformer.

Nous adoptons ¹ une approche résolument différente et proposons un test qui permet de décider si, sur le laps de temps considéré, l'antenne doit être calibrée ou non. Si la réponse est positive pour l'ensemble de l'antenne, le même test peut être appliqué à différentes sous-parties de l'antenne pour définir des sous-antennes admissibles (juxtaposées ou non) de longueurs maximales. L'hypothèse habituelle de petites déformations a donc été supprimée et doit essentiellement rester vérifiée sur les sous-antennes dont la taille est par ailleurs estimée par la procédure. Pour une antenne longue, il faut alors espérer que l'ouverture des sous-antennes est suffisante

pour permettre une bonne localisation des sources présentes. Dans ce cas, l'exploitation des gisements estimés par les différentes sous-antennes permet de reconstruire la forme de l'antenne globale sous la forme d'une antenne linéaire par morceaux.

L'algorithme que nous développons ne s'applique qu'à des antennes (nominalement) linéaires à capteurs équirépartis, une situation assez courante pour les antennes remorquées. Nous allons supposer que les capteurs et les sources sont dans un même plan et que les fronts d'onde sont plans le long de l'antenne. Toutes ces hypothèses sont faites pour que, sous l'hypothèse *non déformée* la matrice de densité spectrale exacte R des observations (snapshots) soit Toeplitz et hermitienne et qu'en présence de déformations cette même matrice R soit hermitienne mais non Toeplitz. L'estimée \hat{R} de la matrice de covariance exacte R obtenue à partir d'un nombre fini d'observations est hermitienne par construction mais bien sûr jamais Toeplitz. Nous nous proposons donc de développer un test qui permet de décider si la matrice de covariance estimée \hat{R} est l'estimée d'une matrice Toeplitz ou non. Il s'agit d'un test d'hypothèses composites à appliquer à la matrice de covariance des observations. Dans un premier temps nous introduisons ce test, détaillé dans [7], puis nous présentons l'algorithme de reconstruction et des résultats de simulation.

2. FORMULATION DU PROBLÈME ET MODÉLISATION

Pour développer le test il nous faut une description statistique complète des observations. Nous considérons une antenne linéaire à N capteurs omnidirectionnels équirépartis. La sortie des capteurs est filtrée par un filtre passe-bas, échantillonnée et on en prend la Transformée de Fourier Discrète (TFD). Nous nous plaçons en bande étroite et ne considérons qu'un bin de fréquence de la TFD. Sur le k -ème

¹Ce travail est réalisé dans le cadre d'une convention entre l'université de Rennes 1 et la DCAN/CERDSM, Toulon.



intervalle de temps les valeurs de ce bin sur les N capteurs sont rangées dans le vecteur complexe X_k de dimension N qui constitue le vecteur d'observation. Une estimée \hat{R} de la matrice de covariance de ces vecteurs X_k obtenue à partir de T observations est alors donnée par :

$$\hat{R} = \frac{1}{T} \sum X_k X_k^* \quad (1)$$

Ceci est également une estimée de la matrice de densité spectrale des sorties des capteurs à la fréquence temporelle considérée. Sa valeur exacte notée R , peut être décomposée en la somme de R_n , la contribution du bruit ambiant, et de R_s , la contribution des sources :

$$\begin{aligned} R &= R_s + R_n \\ R_s &= \sum_{p=1}^P a_p d\theta(\nu_p) d\theta^*(\nu_p) \\ R_n &= \sigma_n^2 I \end{aligned} \quad (2)$$

où σ_n^2 est la variance du bruit ambiant supposé spatialement blanc et $d\theta(\nu_p)$ est le vecteur-direction associé à la p -ème source dont la puissance est notée a_p et la fréquence spatiale ν_p .

Sous les hypothèses faites plus haut, les vecteurs $d\theta(\nu_p)$ sont tels que la matrice R_s est Toeplitz et hermitienne si l'antenne est rectiligne et seulement hermitienne sinon. Comme aucune information sur la forme de l'antenne n'est présente dans la contribution du bruit, une déformation ne peut être détectée que si des sources sont présentes. Il apparait aussi que l'amplitude de l'écart à Toeplitz est non seulement fonction de la déformation proprement dite mais également du nombre de sources et de leurs caractéristiques (puissances et gisements).

Comme les composantes du vecteur des observations X_k sont des points de TFD isolés, ces vecteurs sont modélisés comme des vecteurs aléatoires gaussiens, complexes, circulaires centrés de matrice de covariance R ou bien, de façon équivalente, l'estimée \hat{R} en (1) est telle que $T\hat{R}$ est un échantillon d'une loi de Wishart complexe à T degrés de liberté et de matrice R :

$$\begin{aligned} X_k &\sim CN_N(0, R) \\ T\hat{R} &\sim CW_N(R, T) \end{aligned} \quad (3)$$

On en déduit que \hat{R} est une statistique suffisante pour les observations $\{X_k\}$. La densité de probabilité correspondante est alors [4, 5] :

$$L(R, \hat{R}) = \pi^{-TN} |R|^{-T} \exp \left\{ -T \operatorname{tr} \left(\hat{R} R^{-1} \right) \right\} \quad (4)$$

où $|A|$ et $\operatorname{tr}(A)$ désignent respectivement le déterminant et la trace de A . En utilisant ce modèle, il est alors possible d'étudier la loi asymptotique du rapport de vraisemblance correspondant à ces deux hypothèses.

3. LE RAPPORT DE VRAISEMBLANCE

En utilisant les observations $\{X_k\}$, dont la matrice \hat{R} définie en (1) constitue un résumé, nous voulons tester l'hypothèse H_0 que la matrice de covariance exacte R est Toeplitz, hermitienne, définie positive contre l'hypothèse H_1 que la matrice R est hermitienne, définie positive mais non Toeplitz.

La vraisemblance des observations est donnée par (4) et sous H_1 (pas de structure de Toeplitz) il est facile d'établir [6] que le maximum de la vraisemblance est atteint en $R_1 = \hat{R}$. La valeur L_1 du maximum est alors :

$$L_1 = L(\hat{R}, \hat{R}) = \pi^{-TN} |\hat{R}|^{-T} \exp \{-TN\}$$

Sous H_0 , la tâche est bien plus délicate. Il s'agit de trouver la matrice appartenant à l'ensemble \mathcal{T}^+ des matrices définies positives, hermitiennes et Toeplitz, qui maximise la vraisemblance (4). Il n'existe pas de résultats généraux. Nous allons supposer pour le moment que le maximum est atteint en une matrice notée R_T , un point intérieur de cet ensemble. La valeur du maximum est alors égale à :

$$\begin{aligned} L_0 &= \max_{R \in \mathcal{T}^+} L(R, \hat{R}) \\ &= \pi^{-TN} |R_T|^T \exp \left\{ -T \operatorname{tr} \left(R_T^{-1} \hat{R} \right) \right\} \end{aligned}$$

et le rapport de vraisemblance (LR) devient :

$$\frac{L_1}{L_0} = \left| \hat{R} R_T^{-1} \right|^{-T} \exp \left\{ T \operatorname{tr} \left(R_T^{-1} \hat{R} \right) - TN \right\} \quad (5)$$

En utilisant les techniques classiques pour des tests composés [7], on peut alors déduire la loi asymptotique de :

$$t = 2 \operatorname{Log} L_1 / L_0 \quad (6)$$

de celle des estimées au sens du maximum de vraisemblance (MV) de \hat{R} sous les deux hypothèses.

On montre que la loi limite de t est une loi du Chi-2 avec un nombre de degrés de liberté égal à $(N-1)^2$. La loi est centrée sous H_0 et pour des alternatives locales elle ne l'est pas sous H_1 . Dans notre contexte, puisque H_1 est essentiellement inconnue (il faut se souvenir que l'écart à Toeplitz est non seulement une fonction de la géométrie mais dépend également des caractéristiques des sources et de leur nombre) la valeur du seuil auquel on compare la statistique t , permet de fixer principalement la probabilité de fausse alarme (de décider H_1 alors que H_0 est vrai).

4. ÉVALUATION DU TEST

Le logarithme de la vraisemblance des observations (4) est donnée par :

$$\operatorname{Log} L(R, \hat{R}) = -TN \operatorname{Log} \pi - T \operatorname{Log} |R| - T \operatorname{tr} \left(\hat{R} R^{-1} \right)$$

en changeant le signe et en modifiant les constantes, nous définissons :

$$t(R) = 2T \left\{ \operatorname{tr} \left(\hat{R} R^{-1} \right) - \operatorname{Log} \left| \hat{R} R^{-1} \right| - N \right\} \quad (7)$$

Maximiser la log-vraisemblance par rapport à R est alors équivalent à minimiser $t(R)$ dont le minimum sur \mathcal{T}^+ n'est autre que la valeur de la statistique t introduite en (6). Dans la suite, nous nous intéresserons donc à la minimisation de $t(R)$ par rapport à R une matrice hermitienne de structure Toeplitz que nous paramétrons, dans l'optique de l'écriture d'un algorithme d'optimisation, de la façon linéaire suivante :

$$R = \sum_{-N+1}^{N-1} \alpha_j U_j \quad (8)$$



où les α_j sont des coefficients réels et les matrices U_j sont telles que $r_{|j|} = \alpha_{|j|} + i\alpha_{-|j|}$. Ces matrices sont donc construites de façon évidente à partir de la matrice de décalage ayant des uns sur la sous-diagonale. La présence du terme R^{-1} dans (7) fait que, même si R est linéaire en α , la fonctionnelle $t(R)$ ne l'est pas. Nous allons donc introduire une approximation de $t(R)$ qui est plus facile à optimiser. On peut montrer que pour R proche de \hat{R} , $t(R)$ est proche de $t_1(R)$:

$$t_1(R) = T \operatorname{tr} \left(I - \hat{R} R^{-1} \right)^2 \quad (9)$$

L'optimisation d'un des critères, $t(R)$ ou $t_1(R)$ sur l'ensemble T^+ en utilisant la paramétrisation linéaire (8) est un problème souvent abordé dans le contexte de l'estimation au sens du maximum de vraisemblance et [6] est toujours une bonne référence. Notons qu'il est difficile avec la modélisation (8) de tenir compte des contraintes de positivité et réécrivons $t_1(\cdot)$ sous la forme :

$$t_1(R) = T \operatorname{tr} \left\{ \left(R - \hat{R} \right) R^{-1} \left(R - \hat{R} \right) R^{-1} \right\}$$

Nous proposons alors d'utiliser la procédure itérative suivante qui est une sorte d'algorithme de relaxation :

Pour un R_k donné, on définit :

$$R_{k+1} = \arg \min_R g(R, R_k)$$

avec :

$$g(R, R_k) = \operatorname{tr} \left(\left(R - \hat{R} \right) R_k^{-1} \left(R - \hat{R} \right) R_k^{-1} \right)$$

Pour R paramétré par le modèle linéaire (8), $g(R, R_k)$ est une forme quadratique en $\underline{\alpha}$. L'optimum s'obtient donc facilement et on montre qu'il s'agit d'un minimum si R_k est définie positive. Mais rien ne garantit cependant que le minimum est atteint en une matrice R_{k+1} définie positive. Dans les simulations qui suivent nous initialisons cette procédure en $R_0 = \hat{R}$. Cette approche par relaxation est comparable à l'algorithme par itération inverse proposé dans [6].

5. ESTIMATION DE LA FORME

Quand le test précédent appliqué à l'antenne complète décide que celle-ci est déformée, on l'applique à des sous-antennes de dimension croissante pour en déduire un ensemble de sous-antennes de taille maximale pouvant être considérées comme linéaires. Les résultats présentés plus loin sont obtenus de la façon suivante. On commence à une extrémité de l'antenne et on applique le test à la sous-antenne constituée d'un nombre croissant de capteurs. On obtient ainsi la première sous-antenne. L'origine de la 2ème sous-antenne est prise au milieu de celle-ci et on cherche à nouveau la plus grande sous-antenne admissible. On continue ainsi jusqu'à parcourir l'antenne complète en définissant des sous-antennes qui se recouvrent de moitié. Si ces sous-antennes sont de longueurs suffisantes pour pouvoir, chacune, localiser les sources présentes, on utilise les jeux de gisements obtenus sur chaque paire de sous-antennes successives pour estimer l'angle que font entre-elles ses deux sous-antennes. Ces estimées permettent alors de reconstruire une antenne linéaire par morceaux dont la forme est une estimée de l'antenne déformée.

Diverses techniques sont possibles pour estimer l'angle que font deux sous-antennes consécutives et nous en avons retenues une particulièrement simple dans les simulations qui suivent. Nous ne considérons qu'une source du scénario (la plus forte ou la plus isolée) et prenons pour estimée la différence des gisements associés. Sans information complémentaire il est bien entendu impossible d'orienter l'antenne ainsi reconstruite qui est définie à une rotation près. Dans les figures qui permettent de comparer la forme exacte et la forme reconstruite nous avons donc appliqué à l'antenne reconstruite une rotation *l'amenant* sur l'antenne déformée exacte.

6. SIMULATIONS ET CONCLUSIONS

Nous considérons le cas d'une antenne à $N = 32$ capteurs séparés d'une demie longueur d'onde ($\lambda/2$) et un nombre d'observations $T = 100$. Le bruit ambiant est supposé spatialement blanc de variance unité. L'antenne est éclairée par 4 sources dont les gisements, en degrés par rapport au travers, sont: -35, -30, -20 et 10 et les puissances respectives 0.1, 0, 0 et 10 (soient -10, 0, 0 et 10 dB par rapport au bruit ambiant). Il s'agit d'une antenne déjà relativement sensible aux déformations comme nous allons le voir.

Nous avons fixé le seuil sur la statistique t de façon à avoir une probabilité de fausse alarme de l'ordre de 5 % (soit un seuil de 4 par degrés de liberté du Chi-2).

6.1. DÉFORMATION EN ARC DE CERCLE

Dans un premier temps nous considérons le cas où l'antenne est déformée pour former un arc de cercle dont l'angle au centre vaut 25 degrés. Le rayon du cercle vaut alors 2,3 fois la longueur de l'antenne ce qui correspond à un rayon de courbure très faible bien que l'écart maximale entre l'arc de cercle et la corde qui le sous-tend ne représente que 5,5 % de la longueur de l'antenne. Un traitement standard appliqué à cette antenne ne permet pas de se faire une idée du scénario comme l'atteste (fig. 1) la sortie du goniomètre appliquée à une réalisation de cet exemple. Le test décide que l'antenne est déformée et quand on applique l'algorithme de reconstruction décrit plus haut à ce scénario, les sous-antennes sont typiquement constituées de 9 capteurs et ne permettent pas de détecter la source à $-10dB$. En estimant les angles entre sous-antennes voisines à l'aide de la seule source à 10 degrés nous obtenons une antenne reconstruite linéaire par morceaux dont les *morceaux* (moitié des sous-antennes admissibles comme linéaires) comprennent en général 4 capteurs (fig. 2). Même si la source la plus faible n'a jamais été détectée au niveau du traitement des sous-antennes, elle apparaît dans la sortie du goniomètre quand on prend en compte la forme estimée de l'antenne (fig. 3) à laquelle on a appliqué la rotation adéquate mais non identifiable correspondant à l'ambiguïté inhérente au problème. Cette courbe est identique à celle que l'on obtient en utilisant les positions exactes.

6.2. DÉFORMATION EN SINUSOÏDE

Nous reprenons le même scénario pour une antenne déformée suivant une période complète de sinussoïde d'amplitude égale à $\lambda/2$. La longueur curviligne de la sinussoïde et sa période sont alors comparables (31.08 et 31 $\lambda/2$ respectivement). Nous avons choisi cette forme pour avoir, contrairement au cas de l'arc de cercle, un rayon de courbure variable.



On vérifie effectivement que la longueur des sous-antennes varie entre 6 et 13 le long de l'antenne et est d'autant plus petite que le rayon de courbure est petit. On constate que l'algorithme d'estimation de la forme donne des résultats satisfaisants et permet notamment de détecter la source à -10dB . Les figures correspondantes sont les fig. 4 à 6.

6.3. CONCLUSIONS

Les figures 2 et 5 sont trompeuses, l'échelle des ordonnées est très dilatée par rapport à celles des abscisses et l'erreur est en fait minimale et ne semble pas s'agrandir, se cumuler en avançant le long de l'antenne. Comme nous l'avons indiqué à plusieurs reprises, la distance à Toeplitz est fonction non seulement de la déformation proprement dite mais également du nombre de sources, de leurs gisements et de leurs puissances, il est donc assez difficile de prévoir la taille des sous-antennes que le test va déclarer *linéaire*. Comme par ailleurs l'ouverture des sous-antennes doit être suffisante pour localiser les sources présentes ou du moins celle(s) utilisée(s) pour estimer les angles entre les sous-antennes, il est relativement difficile de se faire une idée précise des performances que l'on peut attendre. On peut bien sûr utiliser différentes fréquences temporelles pour estimer la déformation et se placer à une fréquence où une source apparaît comme forte et isolée.

7. REFERENCES

- [1] A.J. WEISS, B. FRIEDLANDER, Array shape calibration using eigenstructure methods. *Signal Processing*, vol. 22, p. 251–258, 1991.
- [2] J. PIERRE, M. KAVEH, Experimental performance of calibration and direction finding algorithms. *Proc. IEEE ICASSP 1991*, p. 1365–1368.
- [3] Y. ROCKAH, P.M. SCHULTHEISS, Array-shape calibration using sources in unknown locations. Part I : far-field sources. *IEEE-T-ASSP*, vol. 35, p. 286–299, may 1987.
- [4] D.R. BRILLINGER, *Time series : data analysis and theory*. New-York, Holt, Rinehart and Winston, 1975.
- [5] M.S. SRIVASTAVA, C.G. KHATRI, *An introduction to multivariate statistics*. Elsevier North Holland, 1979.
- [6] J.P. BURG, D.G. LUENBERGER, D.L. WENGER, Estimation of structured covariance matrices. *Proc. IEEE*, vol. 70, p. 963–974, sept. 1982.
- [7] J.J. FUCHS, Shape calibration for a nominally linear equispaced array. *Proc. IEEE ICASSP 1993*, p. IV 300–304.

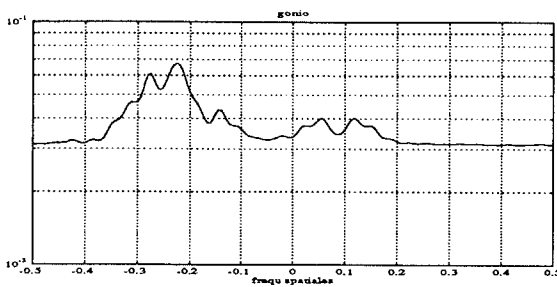


Figure 1:

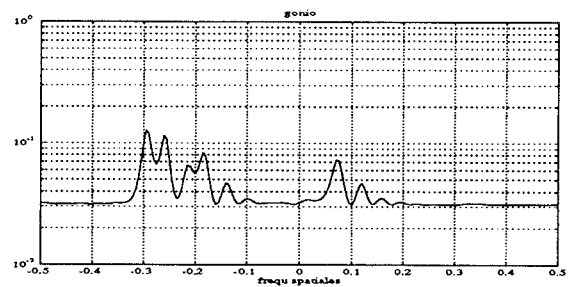


Figure 4:

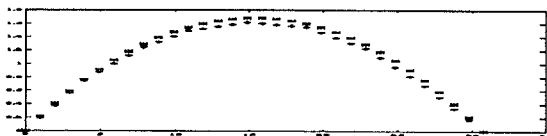


Figure 2:

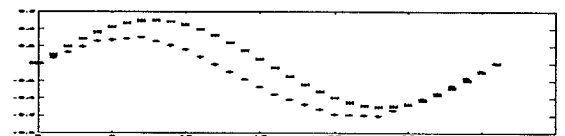


Figure 5:

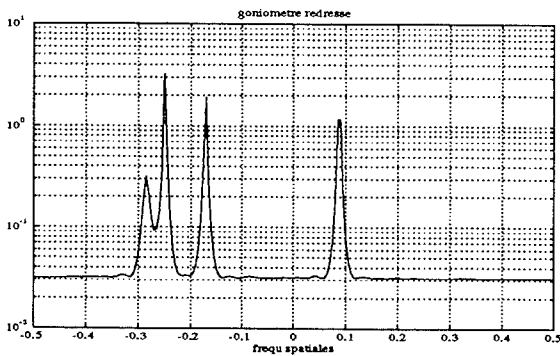


Figure 3:

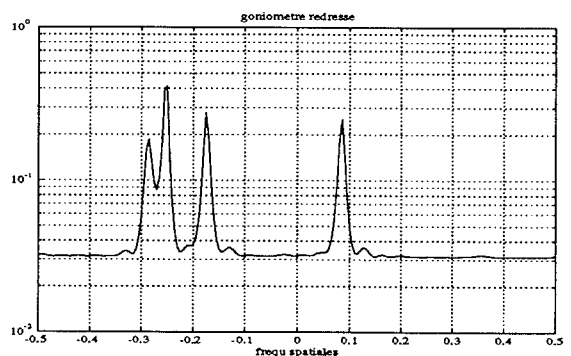


Figure 6: