

**NOUVELLES MODALITÉS DE DÉCOMPOSITION MULTIRÉSOLUTION DES
SIGNAUX À ENERGIE FINIE**

Alexandru ISAR

Faculté d'Électronique, Université Technique de Timișoara ,
B-dul V.Pârvan 2, 1900, Timișoara, Roumanie

RÉSUMÉ

Les bases orthonormées d'ondelettes sont appliquées de plus en plus souvent dans le traitement du signal. Elles sont utilisées pour l'étude des signaux aléatoires, [3] pour l'estimation de paramètres des signaux non stationnaires [2], dans la vision artificielle [8], ou pour l'approximation des signaux [7]. Dans [1], on présente plusieurs mécanismes de génération de bases orthonormées d'ondelettes de l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Le but de cette étude est un tel mécanisme construit à l'aide de deux nouveaux théorèmes, obtenus en généralisant deux théorèmes correspondants, démontrés en [4].

1. DEUX NOUVEAUX THÉORÈMES

Soit H_m , un sous-espace de Hilbert fermé de l'espace de Hilbert des signaux à énergie finie, $L^2(\mathbb{R})$. On note par \hat{H}_m le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les transformées de Fourier des éléments du H_m . L'énoncé du premier théorème est :

T1. Si l'ensemble $A_m = \{a_{m,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de H_m alors l'ensemble $\hat{A}_m = \{(1/\sqrt{2\pi}) \hat{a}_{m,n}(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base ortho-normée de \hat{H}_m et réciproquement.

L'énoncé du deuxième théorème est :

T2. Etant donné la fonction réelle, $\mu(\omega)$, continue par morceaux et la base orthonormée du sous-espace de Hilbert fermé \hat{H}_m , $\hat{A}_m = \{(1/\sqrt{2\pi}) \hat{a}_{m,n}(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, l'ensemble

ABSTRACT

The orthonormal bases of wavelets are often used in signal processing. Some applications are: the study of very complex signals [3], the estimation of parameters for nonstationary signals [2], the artificial vision [8], or the approximation of signals [7]. In [1] are presented many methods for building orthonormal bases of wavelets on $L^2(\mathbb{R})$. In this paper is presented a new method for the generation of such sets, that utilizes two new theorems. These theorems are generalizations of correspondent theorems presented in [4].

${}_{\mu} \hat{A}_m = \{(1/\sqrt{2\pi}) e^{j\mu(\omega)} \hat{a}_{m,n}(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée du même espace.

On peut démontrer les deux théorèmes par la vérification directe des propriétés de définition d'une base orthonormée.

On utilise les théorèmes de Parseval et de Plancherel.

2. TECHNIQUES DE DÉCOMPOSITION EN SOUS-ESPACES FERMÉS D'UN ESPACE DE HILBERT

L'une des plus connues méthodes de décomposition en sous-espaces fermés d'un espace Hilbert est l'analyse multirésolution [1].

Si $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est une telle décomposition, alors il existe une fonction

$\Phi_{0,0}(t)$ de V_0 , telle que l'ensemble :



$\{\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \phi_{0,0}(2^{-m}t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de l'espace V_m , pour chaque m de \mathbb{Z} .

Une autre méthode de partage d'un espace de Hilbert en sous-espaces fermés est sa décomposition orthogonale.

D1. On appelle décomposition orthogonale de l'espace $L^2(\mathbb{R})$, l'ensemble $\{W_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ dont les éléments sont des sous-espaces fermés, avec les propriétés :

$$\begin{aligned} i) & \quad n \neq m \quad \rightarrow \quad W_m \perp W_n \\ ii) & \quad \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m = L^2(\mathbb{R}) \end{aligned} \quad (1)$$

Un exemple de base orthonormée d'ondelettes sur W_m est l'ensemble :

$$\{\psi_{m,n} = 2^{-m/2} \psi_{0,0}(2^{-m}t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (2)$$

où $\psi_{0,0}(t)$ est un certain élément de W_0 , appelé " mère des ondelettes " .

Dans la figure 1 sont présentées les deux techniques de décomposition rappelées ci-dessus.

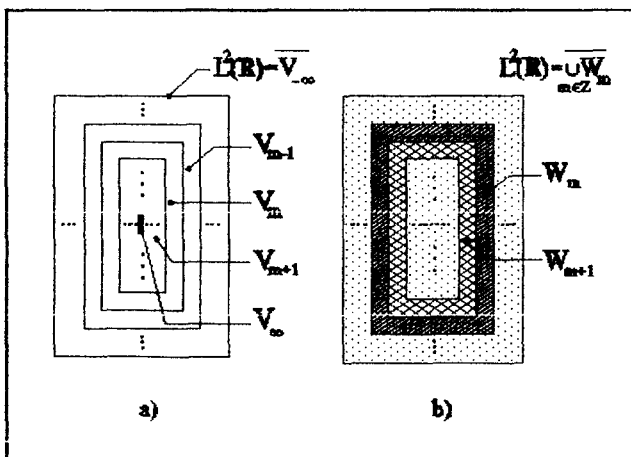


Figure 1. a) Une analyse multirésolution ;
b) Une décomposition orthogonale

3. NOUVEAUX MÉCANISMES DE GÉNÉRATION DES BASES ORTHONORMÉES D'ONDELETTES DE $L^2(\mathbb{R})$

À partir des bases orthonormées des W_m , $m \in \mathbb{Z}$, on peut construire des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$, en utilisant le théorème connu de l'analyse fonctionnelle, avec l'énoncé suivant :

T3. Si l'ensemble $A_m = \{\psi_{m,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée du sous-espace fermé W_m , élément d'une décomposition orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, alors l'ensemble $A = \{\psi_{m,n}(t)\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée du $L^2(\mathbb{R})$.

À partir d'un ensemble A_m déjà connu, les théorèmes T1 et T2, avec $H_m = W_m$, $m \in \mathbb{Z}$ permettent l'enrichissement de la classe de bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$.

Les éléments de bases μA sont des ondelettes, si les bases A_m sont composées d'ondelettes et si la fonction continue par morceaux $\mu(\omega)$ obéit à la condition :

$$\mu(\omega) = \mu(2^m \omega), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Dans la figure 2b) est présenté l'algorithme de génération de bases orthonormées d'ondelettes décrit.

Conformément à [1] les éléments d'une décomposition orthogonale $\{W_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ peuvent être obtenus à l'aide d'une analyse multirésolution correspondante $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Les théorèmes T1 et T2 permettent aussi l'enrichissement de la classe des bases orthonormées d'un sous-espace V_m élément d'une analyse multirésolution, si la condition (3) est satisfaite.

L'algorithme d'enrichissement est présenté dans la figure 2a).

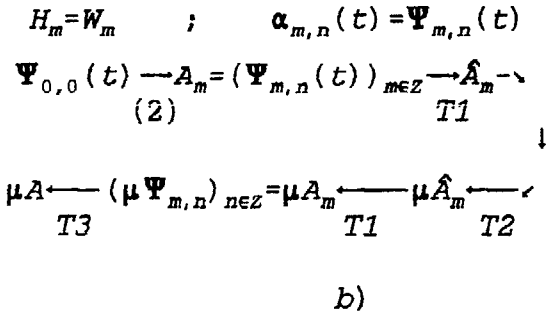
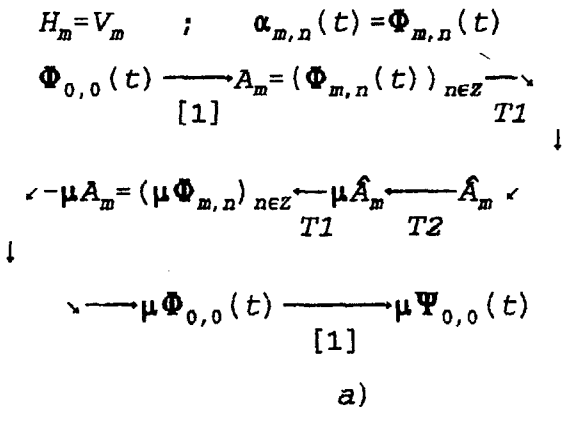


Figure 2. Mécanismes d'enrichissement de la classe des bases orthonormées d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ par: a) génération de nouvelles fonctions $\mu \Phi_{0,0}(t)$; b) génération de nouvelles "mères des ondelettes" $\mu \Psi_{0,0}(t)$.

**NOUVEAUX EXEMPLES DE " MÈRES DES ONDE-
LETTES "**

Une analyse multirésolution utilisée fréquemment est $\{V_m^{b.b.}\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Ses éléments sont les sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$: $V_m^{b.b.} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\omega) = 0, \text{ pour } \omega \notin [-\pi/(2^m), \pi/(2^m)]\}$. La fonction de génération correspondante est notée par $\Phi_{0,0}^{b.b.}(t)$. La décomposition orthogonale correspondante $\{W_m^{b.b.}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ a comme éléments les sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$: $W_m^{b.b.} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\omega) = 0, \text{ pour } \omega \notin [-\pi/(2^{m-1}), -\pi/(2^m)] \cup [\pi/(2^m), \pi/(2^{m-1})]\}$. La " mère des ondelettes" correspondante est notée par $\Psi_{0,0}^{b.b.}(t)$. Dans le tableau 1 on présente trois nouveaux exemples de " mère des ondelettes " obtenues avec les mécanismes décrits.

M.	$\Phi_{0,0}(t)$	$\mu(\omega)$	$\Psi_{0,0}(t)$
a)	$\Phi_{0,0}^{b.b.}(t)$	—	$\Psi_{0,0}^1(t)$
a)	$\Phi_{0,0}^{b.b.}(t)$	$-(\pi/2) \operatorname{sgn} \omega$	$\Psi_{0,0}^2(t)$
b)	—	$(\pi/2) \operatorname{sgn} \omega$	$\Psi_{0,0}^3(t)$

M. signifie le type de mécanisme de génération (voir la figure 2)

Tableau 1

Les formules pour les fonctions du Tableau 1 sont:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{0,0}^{b.b.}(t) &= \sin(\pi \cdot t) / (\pi \cdot t) = \operatorname{sinc}(\pi \cdot t) \\
 \Psi_{0,0}^1(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sinc}(\pi(n+1)/2) \cdot \operatorname{sinc}(\pi(2t-n)) \\
 \Psi_{0,0}^2(t) &= H(\Psi_{0,0}^1(t)) \\
 \Psi_{0,0}^3(t) &= -H(\Phi_{0,0}^{b.b.}(t)) = -H((1/2) \cdot \operatorname{sinc}(\pi \cdot t/2) \cdot \cos(3 \cdot \pi \cdot t/2)) = (1/2) \cdot \operatorname{sinc}(\pi \cdot t/2) \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot t/2)
 \end{aligned}$$

On a noté par H l'opérateur d'Hilbert. On peut obtenir d'autres exemples aussi, en utilisant d'autres solutions de l'équation (3) ou d'autres analyses multirésolution.

5. UNE APPLICATION DANS LE TRAITEMENT DU SIGNAL

On peut représenter chaque signal à énergie finie à l'aide de la base orthonormée μ^A dans la forme:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} \mu \Psi_{m,n}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m(t) \\
 c_{m,n} &= \langle x(t), \mu \Psi_{m,n}(t) \rangle
 \end{aligned} \tag{4}$$



où $x_m(t)$ représente la projection du signal $x(t)$ sur l'espace W_m , considéré.

On présente dans la figure 3 le système décrit par la relation (4). Ce système fait l'analyse du signal de l'entrée en fournissant les échantillons $c_{m,n}$. Utilisant ces échantillons le système conduit à la reconstruction parfaite du signal $x(t)$.

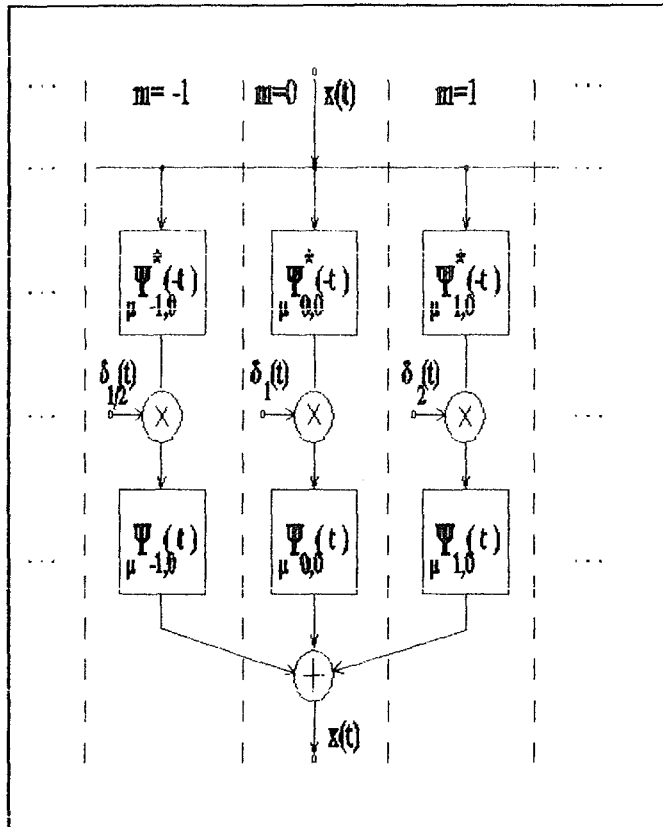


Figure 3. Un système d'identité construit par une banque de préfiltres, une suite de circuits d'échantillonnage idéal et une banque de postfiltres .

Maintenant on peut présenter le théorème d'échantillonnage suivant:

T4. Chaque signal d'énergie finie peut être reconstitué parfaitement après l'échantillonnage idéal si on utilise le système de la figure 3. La reconstitution se fait avec la relation (4). Parce que la bande de fréquence du signal $x(t)$ peut être non bornée, le théorème T4 est plus général que le théorème W.K.S.

6. Bibliographie

1. I. Daubechies : Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLI.
2. N. Delprat, B. Escudié, P. Guillemain, R. Kronland -Martinet, P. Tchamitchian, B. Torrèsani: Asymptotic Wavelet and Gabor Analysis, Extraction of Instantaneous Frequencies : IEEE Transaction on Information Theory vol.38 ,no.2, March 1992.
3. N. Gache, P. Flandrin, D. Garreau : Fractal Dimension Estimators for Fractional Brownian Motions, ICASSP '92.
4. J.R. Higgins : Bases for the Hilbert Space of Paley-Wiener Functions, Proceedings of Aachen Qoloquium, 1984.
5. F. Hlawatsch, G.F. Boudreaux-Bartels : Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations; IEEE Signal Processing Magazine ,April, 1992.
6. S. Jaffard : Ondelettes et applications à l'étude des equations aux dérivées partielles, notes de cours, École postdoctorale, Paris VI, 1992.
7. A. Ludeman : Tailored Orthonormal Sets for Expansion of Specific Classes of Functions, ICASSP 1992.
8. S.G. Mallat: Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models, IEEE Transactions on ASSP , vol.37 , no.1, December 1989.
9. S.G. Mallat : A Theory for Multiresolution Signal Decomposition, The Wavelet Representation ; IEEE Transactions on P.A.M.I., vol.11, no.7, July 1989.
10. Y. Meyer : Ondelettes et opérateurs, Editure Hermann, Paris 1990.