



ONDELANTS DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

P. Mathieu, M. Barlaud, D. Lebedeff

Laboratoire I3S Ura CNRS
Université de Nice - Sophia Antipolis
Bât 4 SPI, 250 ave. A. Einstein, 06560 VALBONNE (FRANCE)

RÉSUMÉ

Les décompositions pyramidales de type transformée en ondelettes sont très utilisées en compression d'images. Il est encore assez rare de faire collaborer plusieurs résolutions dans l'algorithme de quantification. Nous proposons dans cet article d'établir un critère fiable qui permet d'évaluer la propagation de l'énergie à travers plusieurs résolutions. Ce critère qui tient compte de la distribution de probabilité particulière des coefficients d'ondelettes est basé sur la notion de cumulants; il profite donc de certaines de leur propriétés. Une réalisation sur une colonne d'image est présentée à titre d'exemple.

1. INTRODUCTION

Un certain nombre d'algorithmes de compression utilisent comme prétraitement une décomposition en ondelettes. La plupart des techniques proposées ne mettent en oeuvre qu'une seule résolution à la fois. Certains auteurs ont cependant élaboré des méthodes de quantification hiérarchique [1,2] basés sur la construction d'un arbre de décision. Afin de mettre en évidence le lien énergétique qui existe entre les coefficients d'ondelettes à diverses échelles, nous proposons dans cet article d'établir un critère mettant en jeu plusieurs résolutions. Ce critère, basé sur l'estimation des cumulants du troisième ordre [5,6], est évalué sur des lignes d'images afin de vérifier graphiquement la pertinence des résultats.

Tout d'abord, nous rappelons les définitions des ondelettes biorthogonales que nous utilisons puis celles des cumulants. Dans la deuxième partie, nous proposons notre critère et l'évaluons entre trois résolutions consécutives.

2. DÉFINITIONS

2.1. La transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes introduite d'abord par Grossman et Morlet est devenu un outil d'analyse des signaux. Cette méthode d'analyse a été employée avec succès en traitement du signal, étude de la turbulence, astrophysique ... Le principe est de décomposer un signal sur une base de fonctions bien localisées en temps et en fréquence. Cette décomposition est bien adaptée aux signaux non-stationnaires.

La base d'ondelettes se déduit d'une ondelette mère ψ par translation et dilatation:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n) \quad (1)$$

m est l'indice d'échelle, n l'indice de translation.

ABSTRACT

The pyramidal decompositions are widely used in image compression. Collaborations between resolutions in compression algorithm is not frequently used. In this paper, the authors propose a reliable criterion which evaluates energy spreading through the resolutions. This criterion takes into account the special shape of the probability density function of the wavelets coefficients. It is based on the notion of cumulant and then takes advantage of some of their properties.

An example of realisation is presented.

L'idée de base de cette transformée est de représenter un signal par une combinaison linéaire d'ondelettes.

En traitement d'images, on préfère utiliser la transformée en ondelettes biorthogonales introduite par A. Cohen, I. Daubechies et J.C. Feauveau [3]. Elle met en jeu deux familles d'ondelettes duales ψ et $\tilde{\psi}$ telles que la condition de biorthogonalité suivante soit respectée:

$$\langle \psi_{m,n}, \tilde{\psi}_{m',n'} \rangle = \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \quad (2)$$

δ étant le symbole de Kronecker.

La décomposition en ondelettes biorthogonales d'un signal f s'écrit:

$$f = \sum_{m,n} c_{m,n}(f) \tilde{\psi}_{m,n} \quad (3)$$

$c_{m,n}(f)$ étant les coefficients d'ondelettes calculés par la relation suivante:

$$c_{m,n}(f) = \langle f, \psi_{m,n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}_{m,n}(t) dt \quad (4)$$

Le calcul des coefficients est effectué grâce à un algorithme multirésolution pyramidal [4]. Afin d'introduire la notion de multirésolution, nous devons définir les versions dilatées et translatées d'une fonction d'échelle:

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - n) \quad (5)$$

La projection du signal sur $\phi_{m,n}$ donne une approximation à la résolution 2^{-m} ; les coefficients d'ondelettes décrivent quant à eux l'information perdue entre deux approximations successives.

La transformée en ondelettes biorthogonales est mise en oeuvre pour des signaux échantillonnés par un banc de filtres symétriques. Les coefficients d'ondelettes $c_{m,n}$ et l'approximation $\hat{a}_{m,n}$ du signal à la résolution 2^{-m} sont calculés à partir du signal à la résolution plus fine 2^{-m+1} :



$$\begin{aligned} a_{m,n} &= \sum_k h(2n-k) a_{m-1,k} \\ c_{m,n} &= \sum_k g(2n-k) a_{m-1,k} \end{aligned} \quad (6)$$

$h(n)$ est le filtre passe bas, $g(n)$ le filtre passe haut; ils sont reliés respectivement à la fonction d'échelle ϕ et à l'ondelette ψ . La reconstruction est obtenue par:

$$a_{m-1,l} = \sum_n \tilde{h}(2n-1) a_{m,n} + \sum_n \tilde{g}(2n-1) c_{m,n} \quad (7)$$

avec \tilde{h} et \tilde{g} les filtres de reconstruction définis par:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(n) &= (-1)^n h(-n+1) \\ g(n) &= (-1)^n \tilde{h}(-n+1) \text{ et } \sum_n h(n) \tilde{h}(n+2k) = \delta_{k,0} \end{aligned} \quad (8)$$

Propriétés statistiques des coefficients d'ondelettes

La densité de probabilité (pdf) d'un signal nous renseigne sur la répartition de ses valeurs. En général, la pdf d'une image est multimodale alors que la pdf des coefficients d'ondelettes est unimodale et symétrique autour de 0 (fig. n°1).

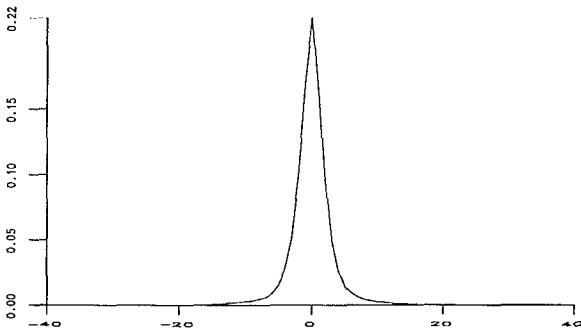


Figure n° 1 : Densité de probabilité typique des coefficients d'ondelettes

Elle est classiquement approchée par une gaussienne généralisée.

$$p(t) = a e^{-b|t|^\alpha} \quad (9)$$

$$\text{avec } a = \frac{b\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)} \text{ et } b = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\Gamma(3/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)}}$$

σ est l'écart type et Γ la fonction Gamma.

Pour $\alpha=1$, on retrouve la loi de Laplace et pour $\alpha=2$, la loi gaussienne.

2.2. Moments et cumulants

Soit un processus aléatoire X , le cumulante d'ordre r est défini par:

$$C_{rX} = (-j)^r \left. \frac{\partial^r \ln \Phi_X(\omega)}{\partial \omega^r} \right|_{\omega=0} \quad (10)$$

avec Φ_X la fonction caractéristique du processus:

$$\Phi_X(\omega) = E[\exp(j\omega X)] \quad (11)$$

Le logarithme népérien de la fonction caractéristique est appelé "seconde fonction caractéristique".

Le moment d'ordre r du même processus est donné par:

$$m_{rX} = E[X^r] = (-j)^r \left. \frac{\partial^r \Phi_X(\omega)}{\partial \omega^r} \right|_{\omega=0} \quad (12)$$

Les cumulants peuvent être exprimés en fonction des moments; on montre notamment que:

$$\begin{aligned} C_{1X} &= m_{1X} \\ C_{2X} &= m_{2X} - m_{1X}^2 \\ C_{3X} &= m_{3X} - 3m_{1X}m_{2X} + 2m_{1X}^3 \end{aligned} \quad (13)$$

On remarque que si X est un processus centré, les cumulants sont égaux aux moments; cette propriété n'est vérifiée que jusqu'à l'ordre trois. Ainsi, le calcul des cumulants jusqu'à cet ordre ne résulte que d'un simple calcul de moments sur des processus centrés.

Propriété:

Dans le cas où $X(k)$ est une séquence gaussienne, le cumulante d'ordre m est nul quel que soit m supérieur à 2.

Si le processus aléatoire $X(k)$ est stationnaire et centré, les cumulants d'ordre deux et trois sont définis par:

$$C_{2X}(\tau) = R(\tau) = E[X(k)X(k+\tau)] \quad (14)$$

$$C_{3X}(\tau_1, \tau_2) = E[X(k)X(k+\tau_1)X(k+\tau_2)] \quad (15)$$

En pratique, nous travaillons avec des signaux échantillonnés. Chaque signal est considéré comme une réalisation d'un processus aléatoire stationnaire et ergodique. Si l'on centre les signaux, on peut estimer C_{2X} et C_{3X} par \mathcal{C}_{2X} et \mathcal{C}_{3X} :

$$\mathcal{C}_{2X}(\tau) = \frac{1}{K} \sum_{k=\max(1,-\tau)}^{\min(K,K-\tau)} X_0(k)X_1(k+\tau) \quad (16)$$

$$\mathcal{C}_{3X}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{K} \sum_{k=\max(1,-\tau_1,-\tau_2)}^{\min(K,K-\tau_1,K-\tau_2)} X_0(k)X_1(k+\tau_1)X_2(k+\tau_2) \quad (17)$$

2.3. Comparaison moments-cumulants

Dans notre application, on veut établir un critère qui évalue la mise en correspondance de trois signaux. On est donc naturellement amené à étudier les moments et les cumulants de ces trois signaux.

On montre cependant, (relation n°18) que des intercorrélations interviennent dans le calcul du moment de signaux non centrés.

$$\begin{aligned} E[Y_0 Y_1 Y_2] &= E[X_0 X_1 X_2] \\ &+ \mu_0 E[X_1 X_2] + \mu_1 E[X_0 X_2] + \mu_2 E[X_0 X_1] \\ &+ \mu_0 \mu_1 \mu_2 \end{aligned} \quad (18)$$

avec $Y_n = X_n + \mu_n$, $E[Y_n] = \mu_n$, $E[X_n] = 0$

et $E[X_0 X_1 X_2]$ le cumulante de $Y_0 Y_1 Y_2$.

Ces trois intercorrélations peuvent prendre des valeurs importantes et complètement masquer le terme du troisième ordre. Cet effet est mis en évidence par un exemple de calcul sur trois lignes (20, 25 et 30) de l'image "LENA" bien connue des traiteurs d'images. Afin d'apprécier la nette différence de variation entre le moment et le cumulante, nous présentons (fig. n°2) une coupe du plan τ_1, τ_2 pour $\tau_1 = \tau_2$.

Pour éviter la prise en compte des moments d'ordre 2, on préférera dans la suite le cumulante au moment.

Cependant, on montre que le cumulante d'ordre trois ne dégage pas un maximum pour la meilleure mise en correspondance.

Par exemple, le cumulante de trois mêmes signaux $\{0,0,0,1,1,1\}$ est nul en $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Ce résultat s'explique par le fait



que la distribution de probabilité des niveaux est symétrique par rapport à la moyenne du signal.

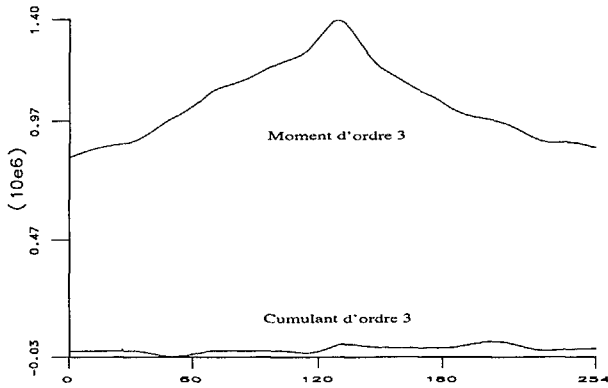


Figure n°2 : Moment et cumulant d'ordre 3 d'une ligne d'image

Différents essais ont montré que la valeur du cumulant d'ordre trois était beaucoup plus sensible à l'asymétrie de la répartition qu'au degré de liaison existant entre les signaux. On met notamment en évidence dans la suite, qu'il peut être utilisé dans le cas où la densité de probabilité des signaux est très "dissymétrique".

3. APPLICATION

Dans cette partie, nous souhaitons mettre en évidence le lien énergétique local qui existe entre les coefficients d'ondelettes à diverses résolutions. Pour cela, nous définissons un critère basé sur les cumulants. Précisons que les décompositions utilisées sont obtenues à partir des filtres biorthogonaux 5-7 très utilisés en compression d'images.

3.1. Évaluation du critère sur un échelon

Pour apprécier la pertinence d'un contour, et sa profondeur à travers les échelles, nous avons tout d'abord effectué nos essais sur un échelon numérique et ses décomposées en ondelettes.

Tout d'abord afin de ne pas perdre l'information de localisation, les calculs de cumulants ont été envisagés sur les coefficients d'ondelettes avant sous-échantillonnage. Sur la figure n°3 il est facile de voir que les coefficients de plus basses résolutions sont faibles au niveau de la rupture du signal d'origine et que donc la détection de la rupture ne sera pas bonne.

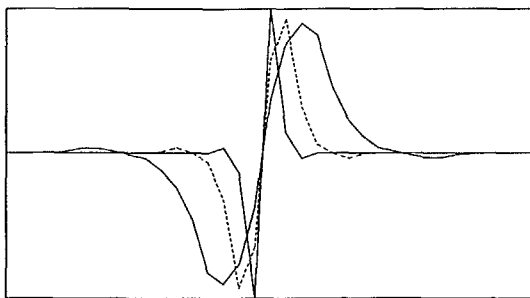


Figure n°3 : Problème de la mise en correspondance des coefficients d'ondelettes sans sous-échantillonnage dans le cas d'un échelon

Pour retrouver une forme semblable dans les trois résolutions, nous devons utiliser les signaux sous-échantillonnés, ce qui conduit aux courbes de la figure n°4. On remarque que suivant la position de l'échelon modulo 4 échantillons, on aura 4 cas, dont la figure n°4 est un exemple.

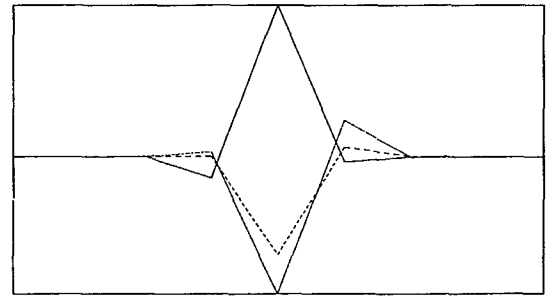


Figure n°4 : Correspondance des coefficients d'ondelettes sous-échantillonnés dans le cas d'un échelon

Avec les signaux sous-échantillonnés, on se heurte à une difficulté : il faut mettre en correspondance des signaux qui ont localement la même forme mais qui représentent une information étalée suivant les résolutions sur 2 ou 4 fois plus de points. La solution choisie est de fenêtrer les signaux sur les 3 résolutions avec des fenêtres de *même taille*, décalées de n , $2n$ et $4n$ échantillons, comme l'indique la figure n°5

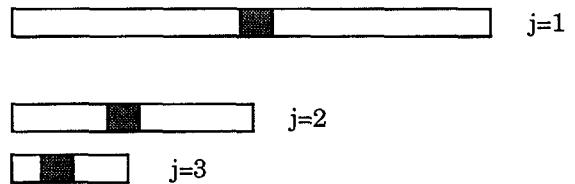


Figure n°5 : Décalage des fenêtres sur les différentes résolutions

On effectue alors itérativement pour chaque valeur de n le calcul du cumulant au centre de la fenêtre.

Cependant, les coefficients d'ondelettes ont une pdf presque symétrique. Pour éliminer cette symétrie on les met au carré. Cette fois la forme de la pdf est très particulière : De nombreux points sont proches de 0, et quelques rares valeurs sont très significatives.

On fait donc une mise en correspondance des énergies des signaux. On ne s'intéresse pas à la phase, mais bien à la localisation des coefficients significatifs.

En définitive le critère retenu est la racine 6^{ème} de la valeur absolue du cumulant des signaux au carré, calculé au centre d'une fenêtre de taille impaire.

Sur l'échelon l'application de ce critère fait ressortir un pic très net à l'endroit de la cassure. Ce résultat montre l'efficacité du critère pour détecter une rupture franche, d'autant plus que l'ondelette choisie n'est pas optimisée pour la détection mais pour la quantification. Précisons qu'avec la fenêtre utilisée (taille 5) il n'y a recouvrement que de 1 point entre les fenêtres à la première résolution.

3.2. Cas d'une ligne d'image

Pour étudier le comportement de l'algorithme sur un signal réel, nous l'avons expérimenté sur un certain nombre de lignes d'images. Nous présentons ci-dessous les résultats sur la colonne 401 de l'image LENA. Cette colonne a été retenue pour l'exemple car elle présente des transitions nettes (zones A, B et C) et d'autres plus douces (zones E, F et G) (cf. fig. 6).

Sur les tracés des coefficients d'ondelettes (fig. 7) aux résolutions 1 et 2, on ne voit que les transitions A, B et C. A la résolution 3 commence à apparaître la transition F mais ce n'est qu'à la résolution 4 qu'elles apparaissent toutes.

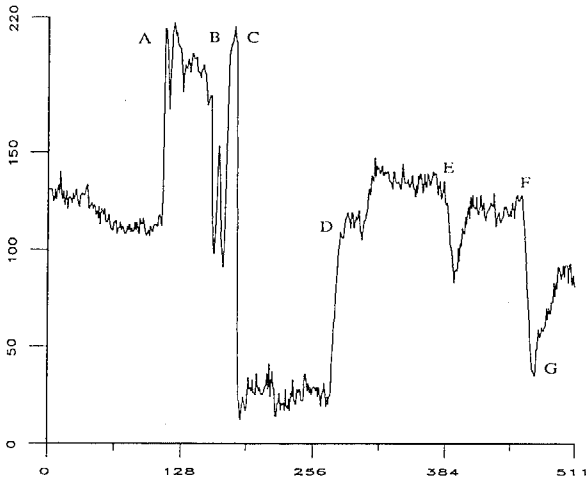


Figure n°6 : Représentation de la colonne 401 de LENA

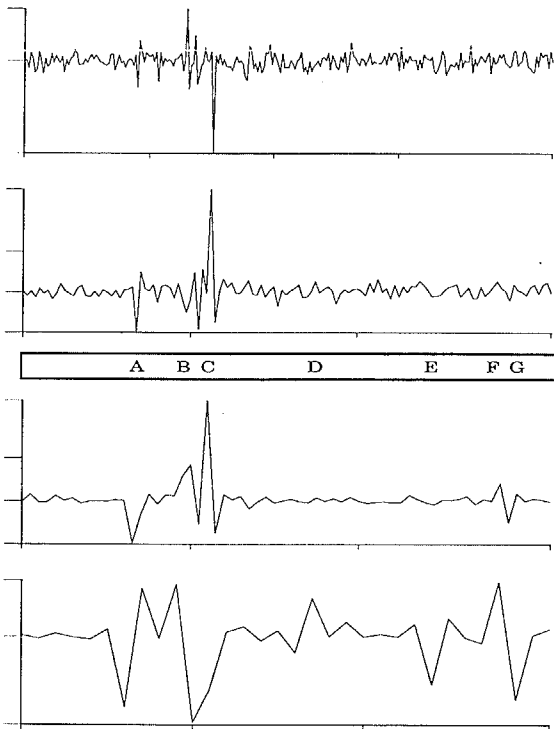


Figure n°7 : Coefficients d'ondelettes de la colonne 401 de LENA

La figure n°8 présente le critère retenu appliqué aux résolutions 1, 2 et 3. On note une très nette détection des zones A et C, la B étant noyée dans la C, mais nettement au-dessus de la base agitée. La zone F qui n'existe que sur la résolution 3 n'est pas significative.

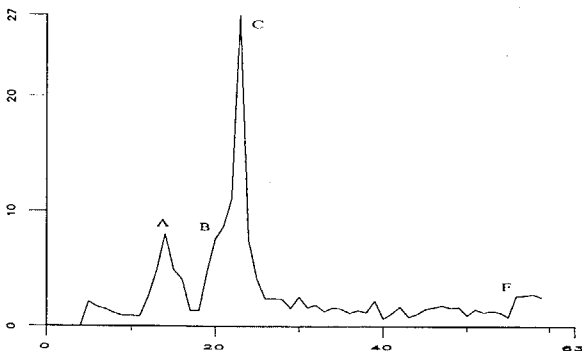


Figure n°8 : Tracé du critère entre les résolutions 1, 2 et 3 de la colonne 401 de LENA

Sur la figure n°9 le critère est établi entre les résolutions 2, 3 et 4. Les zones détectées sont les mêmes : En effet la zone F n'est commune qu'aux résolutions 3 et 4, et D, E, G à la seule résolution 4.

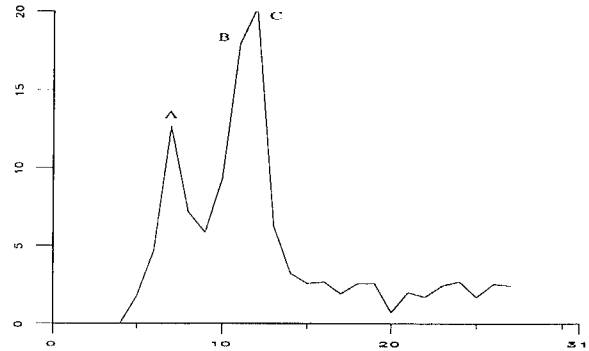


Figure n°9 : Tracé du critère entre les résolutions 2, 3 et 4 de la colonne 401 de LENA

Le critère retenu semble bien adapté à une étude multirésolution. En effet, seules les zones à fortes énergies présentes simultanément dans les trois résolutions sont détectées.

CONCLUSION

La technique de mise en correspondance de trois résolutions consécutives pour établir un degré de pertinence du contour, semble conduire à de bons résultats. De nombreux autres essais ont été effectués qui confirment ce résultat. Cependant le vrai test de validité de cette méthode est son intégration en 2D dans une chaîne de compression hiérarchique d'images.

REMERCIEMENTS

Le troisième auteur tient à remercier le CNES et l'AEROSPATIALE de Cannes pour leur soutien financier.

RÉFÉRENCES

- [1] Z. Xiong, N.P. Galatsanos, M.T. Orchard, "MarginalAnalysis Prioritization for Image Compression Based on a Hierarchical Wavelet Decomposition", IEEE ICASSP, Minneapolis, pp.558-561, April 27-30, 1993.
- [2] J.M. Shapiro, "Application of the Embedded Wavelet Hierarchical Image Coder to Very Low Bit Rate Image Coding", IEEE ICASSP, Minneapolis, pp.558-561, April 27-30, 1993.
- [3] A. Cohen, I. Daudechies and J.C. Feauveau, "Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets", AT&T Bell Laboratories, Technical report, n° TM 11217-900529-07.
- [4] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. intel., Vol. 11 n° 7, July 89.
- [5] A. Papoulis, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes", McGRAW-HILL International Editions, 1991.
- [6] P. Duvaut "Traitement du Signal, concepts et applications", HERMES, 1991.