



# Vélocimétrie Doppler ultrasonore : approche classique ou approche régularisée ?

Jean-François Giovannelli (\*), Alain Herment (\*\*), et Guy Demoment (\*)

(\*) Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-ESE-UPS)

École Supérieure d'Électricité

Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

(\*\*) Instrumentation et Dynamique Cardio-Vasculaire (INSERM U256)

Hôpital Broussais

96, rue Didot, 75674 Paris Cedex 14, France

## RÉSUMÉ

Dans cet article, nous nous intéressons au problème de l'estimation spectrale d'un signal gaussien stationnaire par modélisation auto-régressive (AR) à partir d'un petit nombre d'échantillons. Les coefficients AR sont estimés par une méthode initialement introduite par Kitagawa & Gersch [4]. Nous décrivons une étude en simulation de cette méthode et une comparaison avec la méthode classique des moindres carrés. Ce travail est motivé par l'excellent article de Vaitkus *et al.* [8] dont le but était de comparer les intérêts potentiels des méthodes d'estimation spectrale classiques – paramétriques ou non – pour des applications biomédicales en vélocimétrie Doppler ultrasonore.

## ABSTRACT

In this paper, we address the problem of power spectral density estimation of stationary gaussian process with Auto-Regressive (AR) models when only a short span of data is available for analysis. The AR coefficients are estimated through a regularized method proposed by Kitagawa & Gersch [4]. We describe an experimental study of this method and a comparison with the classical Least Squares (LS) one. This work is motivated by the excellent paper by Vaitkus *et al.* [8] whose purpose was to compare and assess classical spectral estimation methods – either parametric or not – in the area of biomedical ultrasonic Doppler applications.

## 1. INTRODUCTION

La modélisation AR est souvent présentée comme une approche privilégiée pour l'analyse spectrale : les modèles AR sont assez souples pour décrire une large classe de signaux et, dans un contexte des moindres carrés (MC), les estimés de leur coefficients sont des fonctions explicites des données, ce qui simplifie considérablement les problèmes de mise en œuvre.

Mais les résultats obtenus dépendent étroitement de l'ordre du modèle. Bien que plusieurs critères (AIC, FPE, etc ...) aient été proposés pour déterminer un ordre optimal, ils conduisent en pratique à des ordres relativement faibles et donc à des modèles trop pauvres. Inversement, si l'ordre est accru, les spectres estimés par ces méthodes de moindres carrés souffrent de la variabilité excessive des statistiques utilisées. Il est possible de remédier à cette situation par un approche bayésienne [1, 4]. Nous montrons en quoi elle s'oppose à l'approche classique puis, par un ensemble de simulations, nous montrons que cette méthode conduit toujours à de meilleurs résultats.

## 2. MODÉLISATION AR

### 2.1. Approche classique

Un processus gaussien  $\mathbf{x}$ , centré et stationnaire de dimension  $N$  est entièrement caractérisé par sa matrice de covariance  $\mathbf{R}_x$ . On peut donc écrire la vraisemblance attachée aux données :

$$f_{\mathbf{X}|\mathbf{R}_x}(\mathbf{x}|\mathbf{R}_x) = (2\pi)^{-N/2} \det \mathbf{R}_x^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^t \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{x}\right\}.$$

Cette expression de la vraisemblance conduit à de difficiles problèmes d'optimisation non linéaire, et on choisit de paramétrer la covariance par  $N$  coefficients AR et d'utiliser une forme approchée de la vraisemblance :  $f(\mathbf{x}|\mathbf{a}, \sigma_u^2) = (2\pi\sigma_u^2)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_u^2}(\mathbf{x} - \mathbf{X}\mathbf{a})^t(\mathbf{x} - \mathbf{X}\mathbf{a})\right\}$ , (où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X}$  sont les vecteur et matrice d'observation,  $\mathbf{a}$  le vecteur des paramètres AR dans leur forme classique [3], et  $\sigma_u^2$  la variance du processus générateur).

On connaît, dans ces conditions, une expression pour la solution du maximum de vraisemblance approché :  $\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{x}$  et  $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{N}(\mathbf{x} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{a}})^t(\mathbf{x} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{a}})$ .

Le problème a ainsi été ramené à un problème d'estimation au sens des moindres carrés; cependant, dans une telle situation (où on dispose de  $N$  données pour estimer  $N$  coefficients), on sait que la variance d'estimation est excessive et on est conduit à réduire sensiblement le nombre de paramètres. Il existe des critères (FPE, AIC, ...) permettant d'y parvenir, mais dans le cas où l'on ne dispose que de très peu d'échantillons, les ordres obtenus sont trop faibles pour donner des résultats satisfaisants.

### 2.2. Approche bayésienne

Dans cette approche on conserve un ordre  $N$  (égal au nombre d'échantillons) pour le modèle AR et on remplace la vraisemblance simple par une vraisemblance a posteriori. On introduit donc une loi a priori pour les paramètres AR qui traduit l'information de douceur spectrale dont on dispose et qui reste simple à manipuler. Kitagawa & Gersch ont proposé une loi a priori gaussienne centrée dont la covariance se déduit d'une norme de douceur [4].



La distribution a posteriori étant normale, le choix d'un estimateur ponctuel n'est pas critique. Sa maximisation conduit à minimiser le critère des MC régularisés :  $Q(\mathbf{a}) = (\mathbf{x} - \mathbf{X}\mathbf{a})^t(\mathbf{x} - \mathbf{X}\mathbf{a}) + \lambda \mathbf{a}^t \Delta \mathbf{a}$ . Ce critère comprend deux termes, le premier impose à la solution une fidélité aux données et le second impose une fidélité à l'a priori, le paramètre  $\lambda$  réglant le poids relatif de chacun des deux termes.  $\lambda$  étant fixé on dispose d'une expression explicite pour l'estimée de  $\mathbf{a}$  au sens des moindres carrés régularisés :  $\hat{\mathbf{a}}_{MCR} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X} + \lambda \Delta)^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{x}$ , ce qui permet comme précédemment une application en temps réel.

Le coefficient de régularisation  $\lambda$  apparaissant dans l'expression de  $\hat{\mathbf{a}}_{MCR}$  doit être estimé lui aussi à partir des données. Kitagawa & Gersch ont proposé de l'estimer par maximum de vraisemblance (MV). Nous proposons, dans cet article d'utiliser en plus la validation croisée généralisée (VCG) [2].

### 3. PRINCIPE DES SIMULATIONS

Une comparaison théorique des méthodes d'analyse spectrale MC classiques et MC régularisés ainsi que des deux techniques d'estimation du paramètre de régularisation est vivement souhaitable mais elle est très difficile car on ne connaît pas d'expression explicite pour les estimées du paramètre  $\lambda$ , que ce soit par MV ou par VCG. Seuls quelques résultats approchés sont connus pour  $\lambda$  estimé par VCG et pour de faibles valeurs de  $\lambda$  [7]. Nous nous sommes donc livrés à une étude comparative exhaustive de ces méthodes, en simulation, par une technique de Monte-Carlo.

#### 3.1. Signaux simulés

Le modèle de simulation utilisé par Mo & Cobbold [6], et couramment utilisé dans le domaine du Doppler ultrasonore, permet de générer des réalisations d'un signal Doppler  $\mathbf{x}$  gaussien centré stationnaire dont la densité spectrale de puissance (DSP)  $S_{\mathbf{x}}(f)$  est typique des écoulements sanguins observés au pic systolique dans l'aorte. Un exemple en est donné Fig. 2.

Le principe de la synthèse de ces signaux est le suivant : partant de la DSP théorique  $S_{\mathbf{x}}(f)$ , on l'échantillonne sur une grille fréquentielle fine, on multiplie chaque terme par une variable aléatoire du second ordre et par un terme de phase aléatoire equirepartie entre 0 et  $2\pi$ , on en prend la racine carrée et, enfin, la transformée de Fourier inverse.

#### 3.2. Mesure des performances

Connaissant, dans notre étude en simulation, la DSP théorique, les techniques de Monte-Carlo permettent de calculer des mesures des caractéristiques statistiques moyennes pour les méthodes MC classiques et MC régularisés.

Outre le biais  $B(f)$ , la variance  $V(f)$  et l'erreur quadratique moyenne  $EQM(f)$ , qui sont fonctions de la fréquence, nous avons calculé des indices scalaires que l'on peut déduire par intégration de ces indices sur le domaine des fréquences : le biais intégré  $IB$ , la variance intégrée  $IV$  et erreur quadratique moyenne intégrée  $IEQM$ .

De plus, nous avons calculé une distance quadratique et une distance logarithmique entre les spectres estimés et le spectre théorique, ainsi qu'une mesure de Kullback entre la distribution de probabilité estimée et la distribution théorique.

Ces différents indices ont été calculés pour les différentes méthodes (MC classiques, et MC régularisés avec d'une part  $\lambda = \lambda_{GCV}$  et d'autre part  $\lambda = \lambda_{ML}$ ), dans différentes conditions de rapport signal-à-bruit (RSB) et pour différentes longueurs de signaux.

## 4. RÉSULTATS DE SIMULATION

Dans cette partie, après avoir comparé les résultats des deux méthodes d'estimation du paramètre de régularisation, nous présentons les résultats obtenus avec  $N = 16$  échantillons et pour un RSB de 20dB. Enfin nous étudions l'influence du nombre  $N$  de données, et du rapport signal-à-bruit.

### 4.1. Estimation de $\lambda$

Dans cette partie, les résultats présentés ont été obtenus à partir de signaux simulés sur  $N = 16$  échantillons et avec un RSB de 20dB.

**Détermination du paramètre optimal.** Dans cette première étape, connaissant le spectre théorique  $S_{\mathbf{x}}(f)$ , on calcule les indices  $IB$ ,  $IV$  et  $IEQM$  en fonction du paramètre  $\lambda$ . Les résultats sont présentés sur la Fig. 1. Le comportement des trois indices est classique : lorsque la solution est sous-régularisée, on observe un faible biais et une forte variance (comportement typique d'une méthode de MC); lorsque la solution est sur-régularisée la situation est inverse, on observe un fort biais et une faible variance. La situation intermédiaire que l'on souhaite atteindre, conduit à un minimum de l' $IEQM$  pour  $\lambda = 2.02$ . Cette valeur du coefficient de régularisation est maintenant supposée être la valeur optimale  $\lambda_{opt}$ .

**Comparaison des deux techniques d'estimation de  $\lambda$ .** Dans une seconde étape, les deux techniques d'estimation du paramètre  $\lambda$  sont comparées en termes de biais, de variance et d'erreur quadratique moyenne. La Table 1 résume les résultats obtenus et montre que les deux techniques surestiment légèrement le paramètre (par rapport à la valeur optimale  $\lambda_{opt}$  déterminée précédemment); la technique par MV conduisant à des résultats légèrement meilleurs.

### 4.2. Comparaison des spectres estimés

Dans cette partie, les résultats présentés sur les spectres estimés ont été obtenus à partir des mêmes signaux simulés que précédemment.

**Recherche de la meilleure solution des moindres carrés.** Un problème important de la méthode MC est le choix de l'ordre. Dans nos simulations, la DSP théorique étant connue, nous avons effectué une étude exhaustive des performances de la méthode MC classiques pour tous les ordres entre  $p = 1$  et  $N$ . Nous avons ensuite sélectionné l'ordre conduisant aux meilleurs résultats, en terme d' $IEQM$ . Cette étude conduit à choisir  $p = 2$  et l' $IEQM$  correspondante est  $IEQM_0 = 0.73$ .



Ainsi, quel que soit le critère de choix de l'ordre (AIC, FPE, ...) pour la méthode MC classiques, les résultats ne peuvent être meilleurs que  $IEQM_0$ .

**Comparaison avec la méthode régularisée.** Les résultats ainsi obtenus par la méthode MC classiques sont confrontés à ceux obtenus par la méthode MC régularisés, et sont présentés dans la Table 2 pour les indices  $IB$ ,  $IV$  et  $IEQM$  et Fig. 2a, 2b et 2c pour les spectres. Ils montrent que la meilleure méthode MC classiques conduit à une erreur  $IEQM$  supérieure à celle obtenue par la méthode régularisée, que ce soit avec un paramètre de régularisation estimé par MV ou par VCG.

### 4.3. Influence du nombre de données

Nous présentons dans ce paragraphe une comparaison des performances de la méthode classique et de la méthode régularisée, pour différentes longueurs de fenêtres ( $N = 16, 32, \dots, 256$ ), et en conservant le même RSB.

Dans une première étape nous calculons les différents indices pour la méthode MC classiques, pour chaque longueur de fenêtre  $N$  et pour différents ordres de modèle ( $P = N/2, N/4, \dots, N/32$ ).

Dans une seconde étape, partant des mêmes signaux, les mêmes indices sont calculés, en utilisant la méthode régularisée et en estimant le coefficient de régularisation par VCG d'une part et par MV d'autre part.

La Fig. 3 montre que l'erreur obtenue avec la méthode MC classiques est supérieure, ici encore, à celle obtenue par la méthode régularisée et ce, quel que soit le nombre de données.

### 4.4. Influence du rapport signal-à-bruit

Dans cette dernière partie nous nous intéressons à l'influence du RSB, variant entre  $-30\text{dB}$  et  $30\text{dB}$ , sur les résultats de l'estimation, avec  $N = 16$  données comme au paragraphe 4.2.

Les différents indices ont été calculés pour la meilleure méthode MC classiques (ordre  $p = 2$ ), et pour la méthode MC régularisés. La Fig. 4 donne les résultats concernant l'indice  $IEQM$ , et montre clairement que, quel que soit le RSB, les performances de la méthode régularisée sont meilleures, comme on l'avait constaté précédemment.

Notons de plus que les résultats obtenus par VCG sont légèrement meilleurs pour un RSB positif et que les résultats obtenus par MV légèrement meilleurs pour un RSB négatif.

## 5. CONCLUSIONS

Les caractéristiques d'une méthode d'analyse spectrale AR régularisée et d'une méthode classique des moindres carrés ont été comparées, en simulation, par une technique de Monte-Carlo, dans diverses conditions, et en utilisant divers indices.

Les résultats obtenus confirment ceux de Kitagawa & Gersch avec d'autres mesures de performances, et montrent sans équivoque que la méthode par AR long régularisée, quels que soient le nombre de données, le RSB, la technique d'estimation du paramètre  $\lambda$  et la mesure de qualité utilisée,

conduit toujours à de meilleurs résultats que la méthode d'analyse AR classique.

## 6. RÉFÉRENCES

- [1] G. Demoment, A. Houacine, A. Herment et I. Mouttapa, "Adaptive Bayesian Spectrum Estimation", Fourth ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling, Mineapolis, 1988, pp. 33-38.
- [2] G.H. Golub, M. Heath et G. Wahba, "Generalized Cross Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter", *Technometrics*, Vol. 21, 1979, pp. 215-233.
- [3] S.M. Kay, "Modern Spectral Estimation, Theory and Applications", Prentice Hall, 1988.
- [4] G. Kitagawa et W. Gersch, "A Smoothness Priors Long AR Model Method for Spectral Estimation", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC 30, 1985, pp. 57-65.
- [5] L.Y.L. Mo et R.S.C. Cobbold, "A Stochastic Model of the Backscattered Doppler Ultrasound from Blood", *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. BME 33, 1986, pp. 20-27.
- [6] L.Y.L. Mo et R.S.C. Cobbold, "Speckle in Continuous Wave Doppler Ultrasound Spectra : A Simulation Study", *IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. UFFC 33, No 6, 1986, pp. 747-753.
- [7] A.M. Thompson, J.C. Brown, J.W. Kay et D.M. Titterington, "A Study of Choosing the Smoothing Parameter in Image Reconstruction by Regularization", *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13, 1991, pp. 326-339.
- [8] P.J. Vaitkus, R.S.C. Cobbold et K.W. Johnston, "A Comparative Study and Assessment of Doppler Ultrasound Spectral Estimation Techniques part II : Methods and results", *Ultrasound in Med. and Biol.*, Vol. 14, 1988, pp. 673-688.

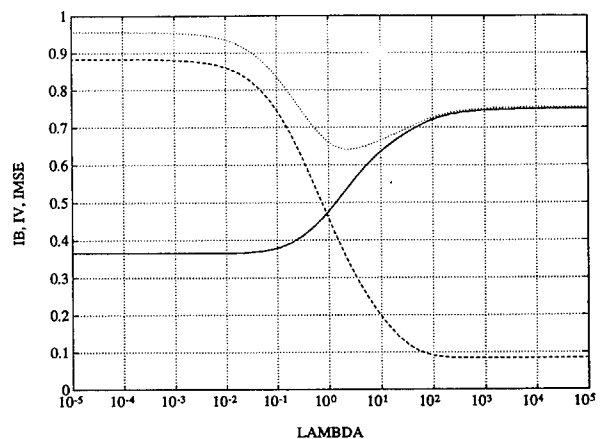


Fig. 1 : Indices intégrés en fonction de  $\lambda$ . Biais intégré (trait plein), variance intégrée (trait tireté) et erreur quadratique moyenne intégrée (trait pointillé).

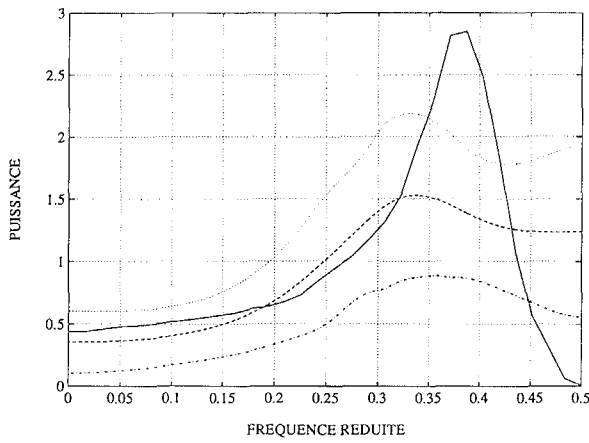


Fig. 2a : Meilleure solution MC ( $p = 2$ ). DSP théorique (trait plein), moyenne (trait tireté), moyenne  $\pm$  écart-type (trait pointillé et mixte).

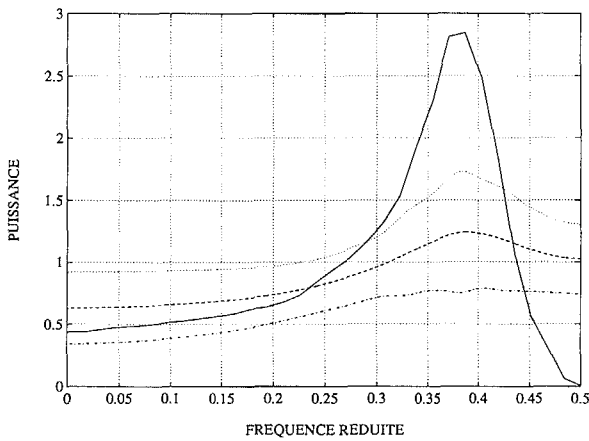


Fig. 2b : Solution régularisée avec  $\lambda_{MV}$ . DSP théorique (trait plein), moyenne (trait tireté), moyenne  $\pm$  écart-type (trait pointillé et mixte).

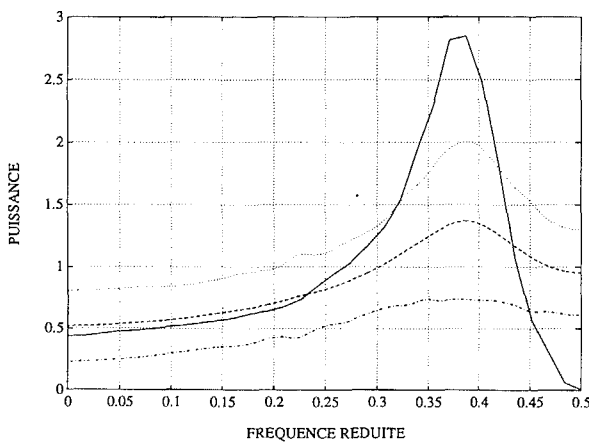


Fig. 2c : Solution régularisée avec  $\lambda_{VCG}$ . DSP théorique (trait plein), moyenne (trait tireté), moyenne  $\pm$  écart-type (trait pointillé et mixte).

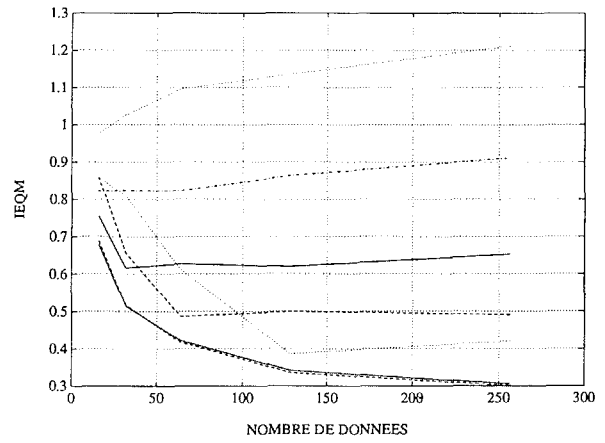


Fig. 3 : Erreur quadratique moyenne intégrée pour différents ordres  $p$  en fonction de la longueur  $N$  du signal analysé. Solution MC et  $p = N/2$  (trait pointillé),  $p = N/4$  (trait mixte),  $p = N/8$  (trait plein),  $p = N/16$  (trait tireté) and  $p = N/32$  (trait pointillé). Solution régularisée et  $\lambda = \lambda_{MV}$  et  $\lambda = \lambda_{VCG}$  (trait tireté et plein quasiment confondus).

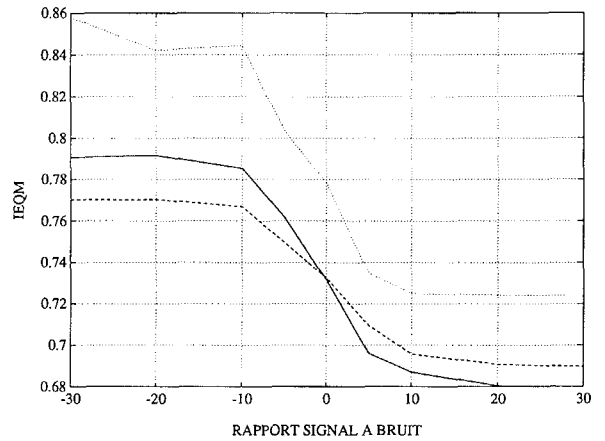


Fig. 4 : Erreur quadratique moyenne intégrée en fonction du RSB. Meilleure solution MC (trait pointillé), solution régularisée et  $\lambda = \lambda_{MV}$  (trait plein) et  $\lambda = \lambda_{VCG}$  (trait tireté).

	$\hat{\lambda}_{MV}$	$\hat{\lambda}_{VCG}$
Moyenne	3.93	8.12
Biais	1.91	6.10
Écart-type	2.22	3.66
Distance quadratique moyenne	2.85	7.11

Table 1 : Mesure de la qualité de l'estimation du paramètre  $\lambda$  pour les deux méthodes MV et VCG.

	IB	IV	IEQM
Meilleur MC	.5624	.4676	.7314
MCR - MV	.6168	.3078	.6893
MCR - VCG	.5601	.3838	.6790

Table 2 : Comparaison en terme de biais intégré, de variance intégrée et d'erreur quadratique moyenne intégrée des différentes méthodes : meilleure méthode MC, MC régularisés et  $\lambda = \lambda_{MV}$  (MCR - MV), MC régularisés et  $\lambda = \lambda_{VCG}$  (MCR - VCG).