



Estimation simultanée de l'objet et des hyperparamètres en reconstruction d'images à partir du champ diffracté

Maï Khuong Nguyen * † and Ali Mohammad-Djafari *

*Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-ESE-UPS)

École Supérieure d'Électricité

Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cédex, France

† Université de Cergy-Pontoise, 95014 Cergy-Pontoise Cédex

RÉSUMÉ

Plusieurs applications d'imagerie permettant de reconstruire l'image d'un objet par des techniques non-destructives ou non-invasives ont un point d'intérêt commun : c'est la reconstruction d'un objet à partir du champ électromagnétique diffracté par cet objet. Il s'agit souvent d'un problème inverse mal-posé à cause de la non-unicité dans la résolution de la diffraction inverse. En remédiant à cette situation par une technique de régularisation probabiliste qui repose sur l'introduction de l'information supplémentaire sous forme des lois *a priori* paramétrées, nous sommes confrontés à un problème de double estimation : estimation des paramètres (objet inconnu) et estimation des hyperparamètres (paramètres des lois *a priori*). Dans cette communication nous proposons une méthode d'estimation simultanée dans laquelle l'objet est reconstruit par une estimation bayésienne à maximum *a posteriori* (MAP) et les hyperparamètres sont estimés par la méthode des moments (MM).

ABSTRACT

Several imaging applications which reconstruct the image of an object by the non-destructive or non-invasive techniques have a common point of interest that is to reconstruct an object from the scattered field data measured behind the object. This reconstruction is an ill-posed inverse problem because of the non-uniqueness in the solution of the inverse scattering. In order to remedy this situation by a probability regularisation technique which rests on the introduction of the supplementary information in the form of the parametric *a priori* laws, we run up against a problem of double estimation : estimation of parameters (unknown object) and estimation of hyperparameters (parameters of the *a priori* laws). In this paper we propose a simultaneous estimation method in which the object is reconstructed by a Bayesian maximum *a posteriori* (MAP) estimation and the hyperparameters are estimated by the moment method (MM).

1. INTRODUCTION

La reconstruction d'image exploitant le phénomène de diffraction inverse consiste à reconstruire l'image d'un objet illuminé par une onde électromagnétique à partir du champ diffracté par cet objet. Pour cela, on est amené à inverser l'équation intégrale suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega_0\mu \iiint_{(v)} \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dv + \vec{B} \quad (1)$$

dont la forme discrète s'écrit :

$$e = Gj + b \quad (2)$$

où e est un vecteur représentant les mesures du champ diffracté \vec{E} , j est un vecteur qui représente la source de courant équivalent \vec{J} caractérisant l'objet à reconstruire (valeurs des pixels), G est une matrice déduite de la dyade de Green $\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ et b est un vecteur contenant le bruit de mesures et de modélisation \vec{B} . Remarquons que dans le cas de l'utilisation d'une onde plane, l'équation vectorielle (1) devient scalaire.

La reconstruction de l'objet j à partir du champ diffracté e est un problème inverse mal-posé. Ce caractère mal-posé reflète exactement l'ambiguïté du phénomène physique de la diffraction : il y a plusieurs objets qui peuvent créer le même champ diffracté ou il y a une infinité de

sources qui peuvent produire le même champ [1]. Le champ diffracté recueilli hors de l'objet n'est donc pas suffisant pour déterminer uniquement l'objet diffractant. Il s'agit d'un problème de manque d'information ou information incomplète. Dans cette situation, l'approche bayésienne s'avère très utile car elle permet de régulariser la solution en combinant d'une façon cohérente l'information *a priori* et l'information apportée par les données. Dans un contexte statistique, l'*a priori* sur l'objet est décrit par une loi de probabilité *a priori*. En pratique, l'information *a priori* dont on dispose n'est que partielle et seule une famille de lois paramétrées peut être déterminée. Les paramètres caractérisant la loi de probabilité (nommés des hyperparamètres θ) doivent être estimés au même titre que les inconnus du problème. Cette estimation est une tâche difficile dans beaucoup de cas tant théoriques que pratiques. Il est convenable de distinguer deux stratégies: estimation simultanée et estimation successive des hyperparamètres et des inconnus. Ces méthodes d'estimation sont respectivement connues sous les noms de maximum de vraisemblance généralisée (MVG) et maximum de vraisemblance marginale (MVM). La méthode MVM possède un certain nombre de propriétés théoriques intéressantes, cependant en dehors du cas gaussien, les calculs deviennent très vite inextricables, parfois impraticables. Quand à la méthode MVG, elle ne bénéficie d'aucune propriété théorique de convergence [2]. Dans notre étude, nous avons proposé une es-



timation simultanée dans laquelle l'objet est reconstruit par un estimateur bayésien à MAP et l'estimation des hyperparamètres est résolue par la MM. Bien que la méthode proposée ne s'applique que dans les cas où la MM fonctionne, elle présente l'avantage de fournir des résultats intéressants avec un coût raisonnable de calcul.

2. ESTIMATION SIMULTANÉE DE L'OBJET ET DES HYPERPARAMÈTRES

L'estimateur bayésien à MAP que nous avons proposé conduit à la solution \hat{j} qui maximise la probabilité *a posteriori* $p(j/e; \theta)$:

$$\hat{j} = \arg \max_j \{p(j/e; \theta) \propto p(j; \theta)p(e/j)\} \quad (3)$$

dans laquelle $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_R\}$ caractérise la probabilité *a priori* $p(j; \theta)$ sur l'objet.

L'estimation simultanée de l'objet et des hyperparamètres consiste à estimer les hyperparamètres θ au même niveau que la solution j du problème :

$$(\hat{j}, \hat{\theta}) = \arg \max_{(j, \theta)} \{p(j/e; \theta)\} \quad (4)$$

Notons que θ contient seulement les paramètres de la loi *a priori*, alors ceci permet en pratique de calculer θ et j par le procédé itératif suivant :

$$\begin{cases} \hat{\theta}^{(k)} = \arg \max_{\theta} \{p(\hat{j}^{(k)}; \theta)\} & (a) \\ \hat{j}^{(k+1)} = \arg \max_j \{p(j/e; \hat{\theta}^{(k)})\} & (b) \end{cases} \quad (5)$$

L'étape 5(a) d'estimation de $\hat{\theta}$ peut être considérée comme une estimation au sens du maximum de vraisemblance (MV) de θ si l'on considère $\hat{j}^{(k)} = \{\hat{j}_1^{(k)}, \hat{j}_2^{(k)}, \dots, \hat{j}_N^{(k)}\}$ comme un N-échantillon de la loi *a priori* $p(j; \theta)$. La réalisation de cette étape nécessite la résolution du système d'équations non linéaires suivant :

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_r} = 0 \quad r = 1, 2, \dots, R \quad \text{avec} \quad L(\theta) = \ln p(\hat{j}^{(k)}; \theta). \quad (6)$$

En général, ces équations peuvent être résolues par la méthode de Newton.

L'étape 5(b) d'estimation de \hat{j} étant une estimation à MAP demande de connaître deux termes : la probabilité *a priori* $p(j; \theta)$ et la probabilité conditionnelle de données $p(e/j)$.

En supposant que le bruit est blanc, de moyenne nulle et de variance connue σ^2 , nous avons

$$p(e/j) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} Q(j) \right] \quad (7)$$

où $Q(j) = [e - Gj]^t W [e - Gj]$ et $W = \text{diag} \left[\frac{1}{\sigma^2}, \dots, \frac{1}{\sigma^2} \right]$.

En ce qui concerne la loi *a priori*, dans notre étude nous avons choisi deux types de lois : loi gaussienne et loi Gamma dépendant de deux paramètres et ayant les expressions suivantes :

$$p(j; \theta) = \frac{1}{Z(\theta_1, \theta_2)} \exp [-\theta_1 \phi_1(j) - \theta_2 \phi_2(j)] \quad (8)$$

Sous l'hypothèse des pixels indépendants et interchangeables, nous avons :

$$\phi_1(j) = \sum_{i=1}^N \phi_1(j_i) \quad \text{et} \quad \phi_2(j) = \sum_{i=1}^N \phi_2(j_i). \quad (9)$$

Pour la loi gaussienne :

$$\phi_1(j_i) = j_i^2 \quad \text{et} \quad \phi_2(j_i) = j_i. \quad (10)$$

Pour la loi Gamma :

$$\phi_1(j_i) = \log j_i \quad \text{et} \quad \phi_2(j_i) = j_i \quad j_k > 0. \quad (11)$$

Pour les deux cas, $Z(\theta_1, \theta_2)$ est la fonction de partition normalisant et a la forme suivante :

$$Z(\theta_1, \theta_2) = \int \exp [-\theta_1 \phi_1(j) - \theta_2 \phi_2(j)] dj. \quad (12)$$

En remplaçant les expressions (8) et (12) dans le système d'équations (6), on est ramené à résoudre un système de deux équations non linéaires à deux inconnues :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \ln Z(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{N} \phi_1(\hat{j}_{MAP}^{(k)}) \\ -\frac{\partial \ln Z(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{N} \phi_2(\hat{j}_{MAP}^{(k)}) \end{cases} \quad (13)$$

Les démonstrations des expressions (8)-(13) sont détaillées dans la référence [3] et [4].

Les raisons pour lesquelles nous avons choisi ces deux lois sont nombreuses :

- Ces lois appartiennent à la famille des lois exponentielles généralisées qui possèdent la caractéristique de maximum d'entropie et sont proches de notre cas réel [5]. La loi gaussienne convient aux variables réelles et la loi Gamma aux variables positives.

- Ces lois possèdent une propriété importante : celle de l'invariance par changement d'échelle, c'est à dire que même si le facteur d'échelle de l'image est changé la forme de la loi reste la même [3].

- Il existe des relations analytiques entre les hyperparamètres de ces lois et les deux premiers moments de l'image, ce qui permet d'estimer θ par la MM et d'éviter de résoudre le système d'équations non linéaires (13).

En effet, rappelons que la MM consiste à relier les R hyperparamètres d'une loi de probabilité aux R premiers moments de la variable aléatoire de cette loi. Dans notre cas les lois de probabilité dépendent de deux hyperparamètres (θ_1, θ_2) , alors si notons $m = E\{j\}$: la moyenne et $v = E\{(j - m)^2\}$: la variance de l'image, nous obtenons les relations intéressantes suivantes [3] :

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2v} \\ \theta_2 = -\frac{m}{v} \end{cases} \quad (14)$$

pour la loi gaussienne et

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{v - m^2}{m} \\ \theta_2 = \frac{m}{v} \end{cases} \quad (15)$$

pour la loi Gamma.



Les détails de calculs de ces lois peuvent être trouvés dans les références [3], [4] et [5].

Prenant en compte de (7) et (8) la solution MAP (3) devient :

$$\hat{j} = \arg \min_j \{F(j) = Q(j) + \theta_1 \phi_1(j) + \theta_2 \phi_2(j)\}. \quad (16)$$

L'image à reconstruire est celle qui satisfait le critère (16). C'est la solution régularisée par l'information *a priori* introduite d'une façon cohérente sous forme d'une loi *a priori* ou autrement dit sous forme des fonctions régularisantes ϕ_1 et ϕ_2 .

En résumé, la méthode proposée consiste à estimer simultanément les hyperparamètres par la MM et la solution par le critère (16).

3. MISE EN OEUVRE DE LA MÉTHODE DE RECONSTRUCTION D'IMAGE

Afin de vérifier la méthode proposée, nous avons procédé à une simulation numérique de la reconstruction d'images à partir du champ diffracté dont les différentes étapes sont les suivantes :

- Création d'un objet original. Dans notre simulation numérique l'objet sera décomposé en certain nombre de points contigus traversés par une distribution de courant équivalent $\mathbf{j} = \{j_1, j_2, \dots, j_N\}$ qui prend la valeur réelle constante dans l'objet et nulle hors de l'objet.
- Calcul du champ diffracté $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$ (avec M le nombre de mesures) dans un plan parallèle avec le plan d'incidence, à la distance de cinq longueurs d'onde et à la fréquence d'incidence de 2.5GHz. En suite, à ce champ est ajouté un bruit gaussien avec le rapport du signal à bruit de 20dB. Notons que le champ \mathbf{e} est complexe.
- Reconstruction de l'objet par la méthode proposée qui peut être détaillée comme suit :

- 1 Choix de la solution initiale $\hat{\mathbf{j}}^{(0)} = (G^t \mathbf{e}) \alpha$ où α est une constante.
- 2 A l'itération (k) , la moyenne $m^{(k)}$ et la variance $v^{(k)}$ empiriques de l'image sont calculées, puis les hyperparamètres $\hat{\theta}^{(k)} = \{\hat{\theta}_1^{(k)}, \hat{\theta}_2^{(k)}\}$ en sont déduits par les expressions (14) ou (15).
- 3 Une fois $\hat{\theta}^{(k)} = \{\hat{\theta}_1^{(k)}, \hat{\theta}_2^{(k)}\}$ est déterminé, nous estimons la solution $\hat{\mathbf{j}}^{(k+1)}$ par l'expression (16) et puis revenons à l'étape 2.

La minimisation de cette l'étape est réalisée par la technique de gradient conjugué qui économise la mémoire par rapport aux autres techniques d'optimisations (la méthode de Newton-Raphson, par exemple). Le critère d'arrêt consiste à stopper les itérations lorsque la solution $\hat{\mathbf{j}}^{(k+1)}$ ne présente plus la variation significative par rapport à la solution $\hat{\mathbf{j}}^{(k)}$.

Cette procédure s'arrête lorsque la différence entre $\hat{\theta}^{(k)}$ et $\hat{\theta}^{(k+1)}$ n'est plus significative et accepte l'estimation finale comme la solution $\hat{\mathbf{j}}$.

4. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Notons :

θ_1 et θ_2 : les valeurs des hyperparamètres estimées à partir de l'objet original et appelées par la suite les "valeurs exactes".

$\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$: les valeurs des hyperparamètres estimées à partir de l'objet reconstruit.

Les résultats de simulation des reconstructions avec le rapport du signal à bruit de 20dB sont présentés dans les figures suivantes :

• Figure 1 : l'objet original et les données (seul le module du champ diffracté est présenté).

• Figure 2 : objet reconstruit avec la loi *a priori* gaussienne dont les "valeurs exactes" des hyperparamètres sont

$$\begin{cases} \theta_1 = 9.35 \\ \theta_2 = -1.06 \end{cases}$$

et les valeurs estimées des hyperparamètres convergent vers

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = 17.3 \\ \hat{\theta}_2 = -1.00 \end{cases}$$

• Figure 3 : objet reconstruit avec la loi *a priori* Gamma dont les "valeurs exactes" des hyperparamètres sont

$$\begin{cases} \theta_1 = 0.94 \\ \theta_2 = 1.06 \end{cases}$$

et les valeurs estimées des hyperparamètres convergent vers

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = 0.91 \\ \hat{\theta}_2 = 1.86 \end{cases}$$

Sur les figure 2 et figure 3 :

- ◊ D est l'écart relatif entre l'objet original et l'objet reconstruit.
- ◊ La première colonne présente l'objet reconstruit.
- ◊ Les hyperparamètres estimés $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont présentés sur les axes verticaux et le nombre d'itérations est sur les axes horizontaux des deuxième et troisième colonnes.
- ◊ Dans les deux cas, les résultats acceptables sont obtenus à partir d'un nombre d'itérations raisonnable (de 5 à 10 itérations).

Les résultats obtenus permettent de tirer les quelques remarques suivantes :

Lorsque la loi *a priori* a été judicieusement choisie la méthode proposée fournit de résultats satisfaisants.

Les valeurs des hyperparamètres estimées sont convergentes mais pas toujours vers les valeurs exactes.

Quant à la qualité de reconstruction d'images, elle dépend plus du choix de la loi *a priori* que des valeurs des hyperparamètres.



5. RÉFÉRENCES

- [1] A.J. Devaney, G.C Sherman, "Nonuniqueness in inverse source and scattering problems," *IEEE, EP-30, No.5*, (1982).
- [2] E. Gassiat, F. Monfront, Y. Goussard, "On simultaneous signal stimulation and parameter identification using a Generalized likelihood approach," *IEEE Transactions on information theory, Vol.38, No.1. january*, pp. 157-162, (1992).
- [3] A. Mohammad-Djafari and J. Idier, "Maximum entropy prior laws of images and estimation of their parameters," *W.T. Grandy, Jr. and L.H. Schick(eds), Maximum Entropy and Bayesian Methods*, pp:285-293, by Kluwer Academic Publishers, (1991).
- [4] Mohammad-Djafari, "On the Estimation of Hyperparameters in Bayesian Approach of Solving Inverse Problems," *ICASSP-93, Minneapolis, USA*, 1993.
- [5] M.K Nguyen and A. Mohammad-Djafari, "Bayesian maximum entropy image reconstruction from the scattered field data," *Proc. of 12th Int. MaxEnt Workshop, Paris*, (1992).

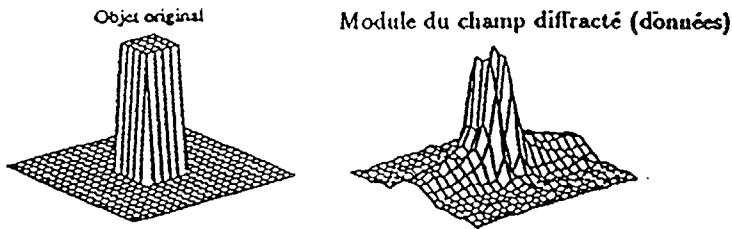


Figure 1

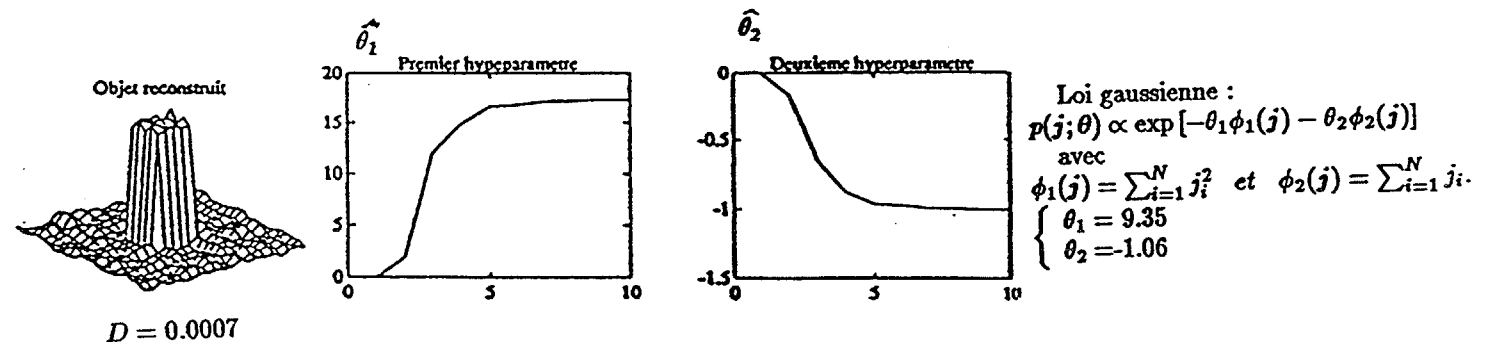


Figure 2 : Reconstruction avec la loi *a priori* gaussienne.

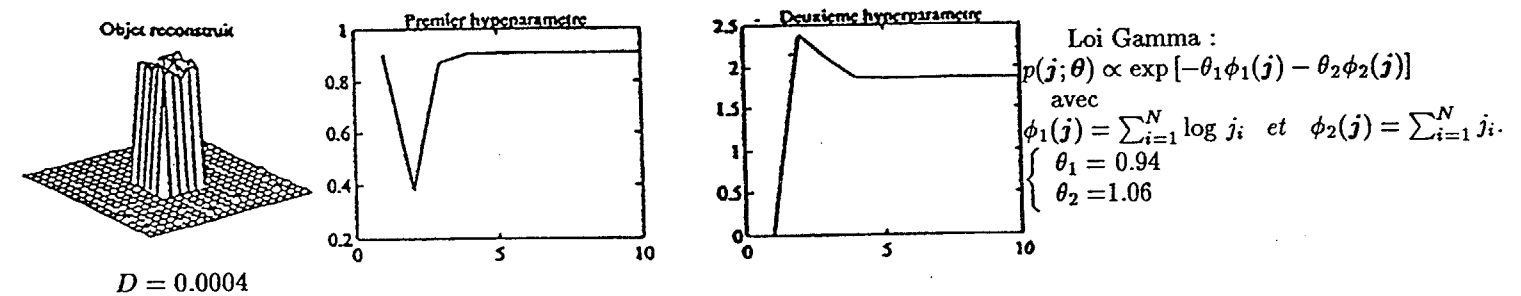


Figure 3: Reconstruction avec la loi *a priori* Gamma.