

**SUR L'ORDRE D'ANALYSE D'UNE STRUCTURE DE SPECKLES  
EN ASTRONOMIE A HAUTE RESOLUTION ANGULAIRE**

**G. RICORT, H. LANTERI, C. AIME, E. ARISTIDI, F. SULTANI**

Département d'Astrophysique  
U.R.A. 709 du CNRS  
Université de Nice — Sophia Antipolis  
Parc Valrose — 06108 Nice Cedex 02  
FRANCE

**RESUME**

Ce travail se situe dans le cadre de la reconstruction d'images en astronomie par analyse statistique du champ de speckles au foyer d'un grand télescope. En faisant l'hypothèse que chacun des  $N$  points de l'objet est bien résolu par le télescope, on montre qu'une analyse statistique d'ordre  $N$  est exhaustive. Ce résultat s'appuie sur le fait que la fonction caractéristique d'ordre  $N+1$  peut s'écrire à partir des fonctions caractéristiques d'ordre inférieur.

**1. INTRODUCTION**

Cette communication se situe dans le cadre de la reconstruction d'images en astronomie par analyse statistique des images observées au foyer d'un grand télescope au sol. On sait qu'en l'absence de turbulence atmosphérique, la relation liant l'image géométrique  $O(r)$  de l'objet astronomique à l'image  $I(r)$  lissée par la diffraction, est la relation de convolution

$$I(r) = O(r) * S(r) \quad (1)$$

où  $S(r)$  est la réponse impulsionnelle de l'instrument, c'est à dire l'image correspondant à un point-source. Dans le cas d'un télescope circulaire parfait,  $S(r)$  est la fonction d'Airy, dont l'étendue spatiale  $s$  est inversement proportionnelle au diamètre de la pupille. Pour la future génération de grands télescopes au sol de la classe 8 m, la limite de résolution  $s$  sera de l'ordre de  $2/100^e$  de seconde d'arc dans le visible. En présence de turbulence atmosphérique,  $S(r)$  s'étale sur une grande surface (quelques secondes d'arc) fixée uniquement par l'état de la turbulence. Une petite lunette donne ainsi des images de qualité comparable à celle d'un gros instrument. Labeyrie (1970) a montré que  $S(r)$  est une fonction spatialement et temporellement aléatoire. Des poses très courtes, de l'ordre de  $1/100^e$  de seconde, montrent que  $S(r)$  est formée

**ABSTRACT**

The paper deals with the problem of image reconstruction in astronomy by means of a statistical analysis of the speckle pattern present at the focus of a large telescope. Under the assumption that the  $N$  points defining the object are well separated one another regard to the telescope resolution, it is shown that a statistical analysis of order  $N$  completely defines the statistical properties of the image speckle pattern. This result is based upon the fact that the characteristic function of order  $N+1$  can be obtained from lower order ones.

de fines structures brillantes, les speckles, de la dimension de  $s$ . Il a proposé une technique, l'interférométrie des tavelures, qui tend à retrouver la forme de l'objet  $O(r)$  à partir de l'analyse des propriétés statistiques des images aléatoires  $I(r)$ . Cette technique s'appuie sur le calcul de la fonction d'autocorrélation de l'image, mais d'autres invariants statistiques d'ordre supérieur ont été proposés, en particulier la triple corrélation (Weigelt, 1977) [2].

Le problème que nous examinons ici concerne le degré de l'invariant statistique qu'il convient d'utiliser, en fonction de la complexité de l'objet à reconstruire. La réponse est donnée en utilisant le formalisme mis au point dans le cadre des techniques probabilistes développées depuis quelques années par notre équipe [3].

**2. PRESENTATION DU PROBLEME**

Nous nous proposons de montrer qu'il existe, pour une structure de speckles correspondant à un objet donné, un ordre d'analyse qui est exhaustif pour l'étude des propriétés statistiques. Pour cela, nous ferons un maximum d'hypothèses simplificatrices, en traitant le problème à une dimension et en supposant que l'objet à reconstruire peut être décrit par une suite de  $N$  points de brillance  $a_n$ , situés aux positions 1, 2, ...  $N$  sur l'axe des  $r$ . Dans ce cas, la relation de convolution (Eq. 1) prend la forme discrète :



$$I(r) = \sum_{n=1}^N a_n S(r-n) \quad (2)$$

Les positions étant fixées, le problème de la reconstruction d'image est de trouver la valeur de chaque  $a_n$ , à partir de l'analyse statistique de l'image  $I(r)$ . Nous envisageons successivement les informations qui peuvent être obtenues par une analyse d'ordre  $Q$  croissant de 1 à  $N$  et au delà.

### 3. ANALYSE STATISTIQUE D'ORDRE 1 ET PRESENTATION DES HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES COMPLEMENTAIRES.

On sait que les propriétés statistiques d'une variable aléatoire sont complètement décrites par la densité de probabilité ou par les fonctions qui en découlent, comme la fonction caractéristique (FC). Nous baserons notre étude sur cette dernière quantité. La FC d'ordre 1 de  $I(r)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi_I(\omega, r) &= E[\exp(i\omega I(r))] \\ &= E\left[\exp\left(i \sum_{n=1}^N \omega a_n S(r-n)\right)\right] \end{aligned} \quad (3)$$

où  $E[\ ]$  désigne l'espérance mathématique. Nous introduisons à ce niveau deux hypothèses simplificatrices :

#### a. Hypothèse d'indépendance

Nous supposons que la dimension  $s$  des speckles est petite par rapport au pas d'échantillonnage (choisi égal à l'unité dans notre présentation), de telle sorte que  $S(r-n)$  est statistiquement indépendant de  $S(r-p)$  pour  $n \neq p$ . Dans ce cas, l'expression (3) devient :

$$\phi_I(\omega, r) = \prod_{n=1}^N E[\exp(i\omega a_n S(r-n))] \quad (4)$$

#### b. Hypothèse de stationnarité

Nous supposons que les propriétés statistiques de  $S(r)$  sont indépendantes de  $r$ . En particulier, on notera :

$$\phi_S(\omega) = E[\exp(i\omega S(r))] \quad (5)$$

et l'équation (4) s'écrira finalement :

$$\phi_I(\omega, r) \equiv \phi_I(\omega) = \prod_{n=1}^N \phi_S(a_n \omega) \quad (6)$$

Supposons que l'on puisse obtenir expérimentalement une très bonne estimation de  $\phi_I(\omega)$ , et sur un objet non résolu une estimation de  $\phi_S(\omega)$ . Quelle information peut on en déduire sur l'objet  $O(r)$ , c'est à dire sur les  $a_n$  ? En

minimisant une distance entre  $\phi_I(\omega)$  et le produit des  $\phi_S(a_n \omega)$  déduits de  $\phi_S(\omega)$  pour tout  $\omega$ , on pourra obtenir une collection de valeurs  $a_1, a_2, \dots, a_N$  qui satisfont à l'équation (6). Tout ensemble non ordonné de valeurs  $\{a_n\}$  sera solution. On peut donc en déduire que l'on a restreint le nombre de candidats objets, c'est à dire de solutions possibles, à  $N!$ . Il faut noter en incidente qu'une analyse au niveau de la valeur moyenne — premier moment — ne donnerait que la somme des valeurs  $a_n$  et contraindrait beaucoup moins la solution.

### 4. ANALYSE STATISTIQUE D'ORDRE 2. POSSIBILITE D'IMAGERIE.

Sous les mêmes hypothèses simplificatrices conduisant à l'équation (6) une généralisation du calcul à l'analyse de l'image aléatoire en deux points distants de  $\rho$  conduit à la définition de la FC d'ordre 2 sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi_{I^{(2)}}(\omega_1, \omega_2; \rho) &= E[\exp(i\omega_1 I(r) + i\omega_2 I(r+\rho))] \\ &= E\left[\exp\left\{i \sum_{n=1}^N \omega_1 a_n S(r-n) + i \sum_{k=1}^N \omega_2 a_k S(r+\rho-k)\right\}\right] \quad (7) \\ &= E\left[\prod_{n=1}^N \exp(i\omega_1 a_n S(r-n)) \times \prod_{k=1}^N \exp(i\omega_2 a_k S(r+\rho-k))\right] \end{aligned}$$

Il faut insister sur le fait que l'espérance mathématique porte sur les variables aléatoires  $S(r-n)$  et  $S(r+\rho-k)$  qui sont les valeurs de  $S(r)$  sur  $2N$  positions, à savoir la suite de points  $\Sigma_1 = \{r-N, \dots, r-1\}$  pour la première somme, et la suite de points  $\Sigma_2 = \{r+\rho-N, \dots, r+\rho-1\}$  pour la seconde. Nous supposons que  $\rho$  est un entier positif ou nul (le cas où  $\rho < 0$  peut être traité de la même manière). Deux situations sont à considérer, selon les valeurs relatives de  $\rho$  et  $N$  :

**a. Pour  $\rho \geq N$**  les suites de position  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont disjointes. L'espérance mathématique porte sur  $2N$  variables aléatoires indépendantes. Il vient :

$$\begin{aligned} \phi_{I^{(2)}}(\omega_1, \omega_2; \rho) &= \prod_{n=1}^N \phi_S(a_n \omega_1) \prod_{k=1}^N \phi_S(a_k \omega_2) \quad (8) \\ &= \phi_I(\omega_1) \phi_I(\omega_2) \end{aligned}$$

et cette analyse à l'ordre 2 ne fournit pas d'information supplémentaire sur la valeur des  $a_n$ , par rapport à l'analyse à

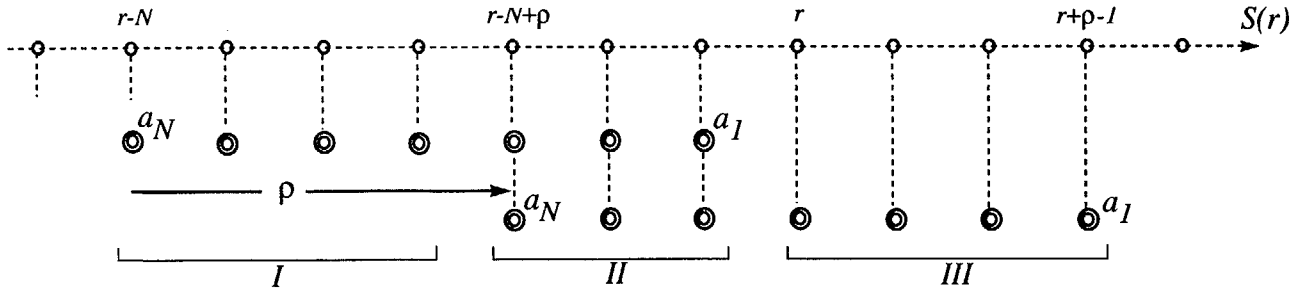


Figure 1. Illustration conduisant à l'écriture de la FC d'ordre 2 (eq. 10). La ligne 1 représente  $S(r)$ . Les autres lignes donnent lieu à deux lectures complémentaires :

i) Elles représentent tout d'abord les coefficients de pondération de  $S(r)$  donnant  $I(r)$  et  $I(r+\rho)$  selon l'équation 2. L'inversion d'une des fonctions dans la relation de convolution (eq. 1) est à l'origine de l'écriture des  $a_n$  de droite à gauche.

ii) Si l'on considère maintenant que chaque point représente les termes  $\exp(i \omega_1 a_n S(r-n))$  pour la ligne 2, et  $\exp(i \omega_2 a_k S(r+\rho-k))$  pour la ligne 3, alors l'espérance mathématique (EM) du produit de tous ces points donne la FC d'ordre 2 (eq. 7). La figure met en évidence trois régions définies dans le texte. Les régions I et III correspondent à des produits de variables aléatoires indépendantes : l'EM s'écrit comme le produit des EM. Pour la régions II, il convient de regrouper deux à deux les termes dépendant de la même valeur de  $S(r)$ , comme l'explicite l'équation 9, avant de prendre l'EM.

L'écriture complète des bornes des trois produits de l'équation 10 s'obtient facilement en se reportant sur l'axe de  $S(r)$ , en faisant  $r=0$  et en parcourant la figure de gauche à droite.

l'ordre 1.

**b. Pour  $\rho < N$ ,** les  $N-\rho$  premières valeurs de  $\Sigma_2$  sont identiques aux  $N-\rho$  dernières valeurs de  $\Sigma_1$ . Le nombre total de variables aléatoires indépendantes chute de  $2N$  à  $N+\rho$ . Il convient de considérer trois régions,  $I=\{r-N, \dots, r+\rho-N-1\}$ ,  $II=\{r+\rho-N, \dots, r-1\}$  et  $III=\{r, \dots, r+\rho-1\}$ . Une illustration est faite figure 1. Les régions I et III conduisent à des termes spectralement purs en  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . La région II correspond à des termes de dégénérescence de la forme :

$$E[\exp(i \omega_1 a_n S(r-n)) \exp(i \omega_2 a_k S(r+\rho-k))] = E[\exp(i (a_n \omega_1 + a_k \omega_2) S(r-n))] = \phi_S(a_n \omega_1 + a_k \omega_2) \quad (9)$$

pour  $k=\rho+N$ . On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \phi_{I^{(2)}}(\omega_1, \omega_2; \rho) &= \prod_{j=N-\rho+1}^N \phi_S(a_j \omega_1) \} I \\ II \{ &\times \prod_{n=1}^{N-\rho} \phi_S(a_n \omega_1 + a_{\rho+n} \omega_2) \\ &\times \prod_{k=1-\rho}^0 \phi_S(a_{k+\rho} \omega_2) \} III \end{aligned} \quad (10)$$

Nous avons montré [4] que l'information sur la structure de l'objet provient des termes croisés. La FC présente en effet des structures radiales bien marquées pour les droites  $a_n \omega_1 + a_{\rho+n} \omega_2 = 0$ , permettant de mettre en évidence des rapports  $a_n/a_{\rho+n}$ .

Les autres termes apparaissent comme des termes parasi-

tes atténuant le signal. Comme l'indique l'expression (10) le nombre de termes regroupés varie linéairement avec  $\rho$  (de  $N$  pour  $\rho=0$  à 0 pour  $\rho=N$ ).

La détermination des valeurs  $a_1, \dots, a_n$  doit être faite en analysant la FC d'ordre 2 pour tous les décalages  $\rho$  de 0 à  $N$ . Ceci est nécessaire pour s'affranchir des indéterminations qui apparaissent sur les valeurs des  $a_{\rho+k}/a_k$  lorsque plusieurs termes sont regroupés.

## 5. ANALYSE STATISTIQUE EXHAUSTIVE

Des analyses statistiques d'ordre supérieur à 2 peuvent être entreprises. Par exemple, la technique de triple corrélation de Weigelt correspond à une analyse à l'ordre 3 et la technique de *fork* de Bagnuolo [5] est une analyse en quatre points. Augmenter l'ordre d'analyse consiste en général à augmenter les contraintes sur l'invariant statistique et à permettre une meilleure détermination de l'objet.

Nous allons montrer en nous plaçant dans les hypothèses simplificatrices décrites précédemment, qu'une analyse en  $N$  points consécutifs est une analyse statistique exhaustive pour l'objet décrit sur  $N$  points. Par  $N$  points consécutifs, nous entendons que le vecteur déplacement  $\rho$  a pour composantes les valeurs  $1, \dots, N$ . Ce cas permet d'exhiber une structure remarquable entre les FCs d'ordre  $N+1$ ,  $N$  et  $N-1$ . On peut écrire :

$$\begin{aligned} &\phi_{N+1}(\omega_1, \dots, \omega_{N+1}; r, \dots, r+N) \times \\ &\quad \phi_{N-1}(\omega_2, \dots, \omega_{N-1}; r+1, \dots, r+N-1) \\ &= \phi_N(\omega_1, \dots, \omega_N; r, \dots, r+N-1) \times \\ &\quad \phi_N(\omega_2, \dots, \omega_{N+1}; r+1, \dots, r+N) \end{aligned} \quad (11)$$

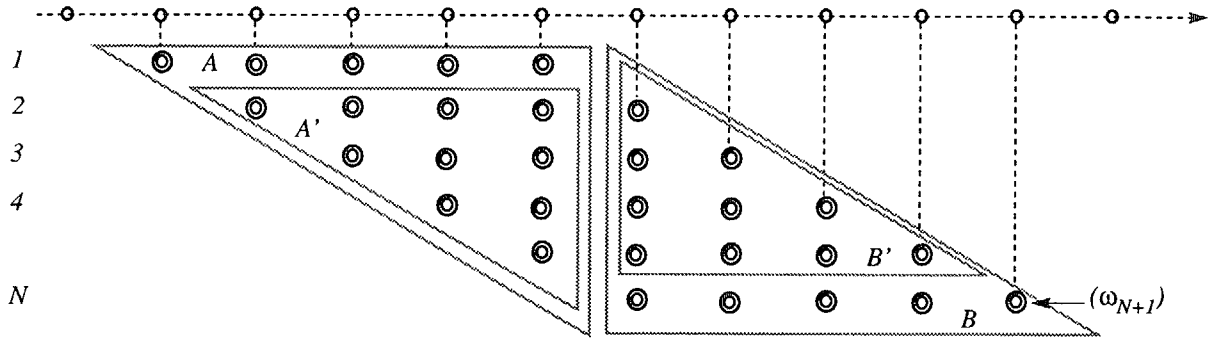


Figure 2. Illustration de l'équation 11. Le diagramme est une généralisation à l'ordre  $N+1$  de la figure 1 qui ne représentait que les lignes 1 et 4 de la présente figure. Les décalages  $\rho$  sont égaux aux premiers entiers successifs. Chaque point a la même signification que dans la figure précédente et représente un terme de la forme  $\exp(i \omega_q a_k S(r+\rho_q-k))$ . La FC d'ordre  $N+1$ ,  $\phi_{N+1}$ , s'exprime comme l'espérance mathématique (EM) du produit de tous les points indiqués sur cette figure. Les triangles  $A$  et  $B$  représentent chacun le produit des points intérieurs de sorte que  $\phi_{N+1} \equiv EM(A.B)$ . Les triangles  $A'$  et  $B'$  représentent des quantités équivalentes, de telle sorte que  $\phi_{N+1} \equiv EM(A'.B')$ . On a de même  $\phi_N \equiv EM(A.B)$  ou  $EM(A'.B')$  selon l'origine choisie. La relation algébrique  $(A.B).(A'.B') = (A.B').(A'.B)$  permet de vérifier l'équation 11.

La démonstration de cette égalité peut se faire simplement de manière graphique. C'est ce que l'on a effectué sur la figure 2.

A titre d'illustration, appliquons l'équation (11) à l'analyse en trois points d'une structure de speckles d'étoile double. Supposons les trois points alignés et distants entre eux de la séparation  $d$  de la binaire, de telle sorte qu'avec l'hypothèse de stationnarité on écrira la FC d'ordre 3 pour  $\rho_1=d$  et  $\rho_2=2d$  sous la forme :

$$\phi_3(u_1, u_2, u_3; d, 2d) = \frac{\phi_2(u_1, u_2; d) \cdot \phi_2(u_2, u_3; 2d)}{\phi_1(u_2)} \quad (12)$$

Toute autre FC d'ordre supérieur à 3 pour des  $\rho$  multiples de  $d$  s'écrirait également en fonction de la FC d'ordre 2, laquelle définit complètement les propriétés statistiques

de la structure de speckles. Donc pour une étoile double ( $N=2$ ) l'analyse à l'ordre 2 est suffisante, elle décrit entièrement les propriétés statistiques de la structure de speckles de l'image.

On pourrait montrer que la relation (12) et plus généralement la relation (11) restent vérifiées lorsque la relation de convolution objet-image n'est plus valable. Ceci déborde cependant du cadre de ce travail.

**REFERENCES**

- [1] Labeyrie A., *Astron.Astroph.*, **6**, 85-87 (1970).
- [2] Weigelt G., *Opt. Commun.*, **21**, 55-59 (1977).
- [3] Aime C., *J. Opt.* (Paris), **21**, 101-110 (1987).
- [4] Aime C., Aristidi E., Lantéri H., Ricort G. *Applied Optics*. **32**, 2747-2757 (1993).
- [5] Bagnuolo, W.G. Jr., *Opt. Lett.*, **13**, 907-909( 1988)