



Déconvolution par Détection des Structures Significatives en utilisant la Transformée en Ondelettes

Jean-Luc Starck (1, 2) Albert Bijaoui (2)

(1) Cisi-Ingenierie, 1360 route des Dolines 06560 Valbonne

(2) Observatoire de la Côte d'Azur, B.P. 229 F-06304 Nice Cedex 4

RÉSUMÉ

Cet article montre comment une stratégie de suppression du bruit peut-être introduite dans les algorithmes de déconvolution itératifs. Pour ce faire, un algorithme de transformée en ondelettes a été utilisé, et on ne garde que les coefficients significatifs à chaque itération. Ceci conduit à une régularisation du problème inverse. Un exemple est donné à partir de la méthode de Lucy.

ABSTRACT

This paper shows how an effective noise suppression strategy can be incorporated into algorithms for the solution of the inverse problem. A wavelet transform algorithm has been used, and significant wavelet coefficients, only, are retained at each iteration. This leads to a regularization of the inverse problem. An example is given from Lucy method.

1 Introduction

1.1 La relation objet-image

La relation objet-image est donnée par la relation:

$$I(x, y) = O(x, y) * P(x, y) + N(x, y) \quad (1)$$

I est l'image captée par l'instrument de mesure, P est la réponse instrumentale (PSF), N est un bruit additif et O est l'objet que l'on cherche à restaurer. Dans l'espace de Fourier, on a:

$$\hat{I}(u, v) = \hat{O}(u, v)\hat{P}(u, v) + \hat{N}(u, v) \quad (2)$$

On veut déterminer O connaissant I et P . Ce problème inverse a conduit à un grand nombre de travaux. Les principales difficultés résident dans l'existence de la fréquence de coupure de la PSF, et du bruit.

L'équation 1 est un problème dit mal-posé. Cela signifie qu'il n'y a pas une solution unique à la minimisation de la norme $\| I(x, y) - P(x, y) * O(x, y) \|^2$. Une régularisation est alors nécessaire.

1.2 Les méthodes de déconvolution

Les algorithmes qui donnent les meilleurs résultats sont itératifs. Van Cittert [10] a proposé l'itération suivante:

$$O^{(n+1)} = O^{(n)} + \alpha [I - P * O^{(n)}] \quad (3)$$

où α est un paramètre de convergence qui est en général choisi égal à 1. Dans cette équation, la distribution de l'objet est modifiée en ajoutant un terme

proportionnel au résidu. Mais cet algorithme diverge en présence de bruit [2].

Une méthode plus robuste est celle du gradient à pas fixe qui consiste à minimiser la norme $\| I - P * O \|^2$, et qui conduit à l'itération suivante [2]:

$$O^{(n+1)} = O^{(n)} + P_s * [I - P * O^{(n)}] \quad (4)$$

avec $P_s(x, y) = P(-x, -y)$.

La régularisation de Tikhonov [9] consiste à minimiser:

$$\| I - P * O \|^2 + \lambda \| H * O \|^2 \quad (5)$$

où H correspond à un filtre passe-haut. L'équation contient deux termes: Le premier, $\| I - P * O \|^2$, exprime la fidélité par rapport aux données, et le second, $\lambda \| H * O \|^2$, exprime le degré de douceur dans l'image restaurée. Trouver la valeur optimale λ implique l'utilisation de méthodes numériques telle que la Cross-Validation [3]. La méthode marche bien, mais est relativement longue, et produit en général des images lisses, ce qui est problématique si l'on veut restaurer des contours où si l'on cherche des structures compactes comme en imagerie astronomique.

La méthode de Lucy [5] est dérivée du théorème de Bayes sur les probabilités conditionnelles:

$$O^{(n+1)} = O^{(n)} \left[\frac{I}{I^{(n)}} * P_s \right] \quad (6)$$

$$I^{(n)} = P * O^{(n)} \quad (7)$$



Le flux est conservé, ainsi que la positivité de l'image. Cette méthode est couramment utilisée en imagerie astronomique. Elle a toutefois le désavantage d'amplifier le bruit, ce qui gêne considérablement la détection d'objets faibles, et augmente la probabilité de détecter de faux objets.

La suite montre comment le bruit peut être contrôlé dans le processus de déconvolution grâce à la transformée en ondelettes.

2 La transformée en ondelettes

Une importante littérature existe sur la transformée en ondelettes et ses applications [6], [7]. De nombreux algorithmes à deux dimensions ont été développés les dernières années [1]. L'algorithme à trous [4], [8] multiplie le nombre de données par le nombre d'échelles, mais permet de travailler avec une ondelette isotrope. Le fait que l'on ne sous-échantillonne pas permet aussi de supprimer les artéfacts à la reconstruction après un seuillage dans l'espace des ondelettes.

On suppose que les données échantillonnées $\{c_0(k)\}$ sont le produit scalaire aux pixels k d'une fonction $f(x)$ avec une fonction d'échelle $\phi(x)$ qui correspond à un filtre passe-bas.

$$c_0(k) = \langle f(x), \phi(x - k) \rangle \quad (8)$$

La fonction d'échelle satisfait la condition de dilatation:

$$\frac{1}{2} \phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_l h(l) \phi(x - l) \quad (9)$$

h étant un filtre discret passe-bas. En conséquence, le produit scalaire $c_i(k) = \frac{1}{2^i} \langle f(x), \phi\left(\frac{x-k}{2^i}\right) \rangle$ est obtenu par:

$$c_i(k) = \sum_l h(l) c_{i-1}(k + 2^{i-1}l) \quad (10)$$

et le signal différence w_i par:

$$w_i(k) = c_{i-1}(k) - c_i(k) \quad (11)$$

où:

$$w_i(k) = \frac{1}{2^i} \langle f(x), \psi\left(\frac{x-k}{2^i}\right) \rangle \quad (12)$$

quand la fonction ondelette ψ est défini par:

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \phi(x) - \frac{1}{2} \phi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (13)$$

On a choisit une B-spline de degré 3 pour la fonction d'échelle dans nos calcul. Un algorithme de reconstruction évident est:

$$c_0(k) = c_{n_p} + \sum_{i=1}^{n_p} w_i(k) \quad (14)$$

Le dernier plan lissé est ajouté à toutes les différences w_i

L'algorithme est facilement extensible à deux dimensions. Ceci conduit à une convolution avec un masque de 5×5 pixels dérivé d'une B_3 -spline. À chaque échelle i , on obtient un ensemble $\{w_i(k, l)\}$ (que l'on appellera plan d'ondelettes par la suite), qui a le même nombre de pixels que l'image.

3 Ondelettes et Régularisation

3.1 Régularisation à partir des structures significatives

Notons $R^{(n)}(x, y)$, l'erreur à l'itération n d'un algorithme de déconvolution. On a alors:

$$R^{(n)}(x, y) = I(x, y) - P(x, y) * O^{(n)}(x, y) \quad (15)$$

En utilisant l'algorithme à trous, $R^{(n)}$ peut être défini comme la somme de ses n_p plans d'ondelettes et du plan à très basse résolution (voir equation 14):

$$R^{(n)}(x, y) = c_{n_p}(x, y) + \sum_{i=1}^{n_p} w_i(x, y) \quad (16)$$

Les coefficients d'ondelettes fournissent un mécanisme pour n'extraire du résidu, à chaque itération, que les structures significatives. Une grande partie des coefficients d'ondelettes du résidu ne sont statistiquement pas significatifs. Le résidu significatif est:

$$\tilde{R}^{(n)}(x, y) = c_{n_p}(x, y) + \sum_{i=1}^{n_p} \Gamma(w_i(x, y), N_i) w_i(x, y) \quad (17)$$

N_i est l'écart type du bruit à l'échelle i , et Γ est une fonction défini par:

$$\Gamma(a, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } |a| \geq 3\sigma \\ 0 & \text{si } |a| < 3\sigma \end{cases} \quad (18)$$

L'écart type du bruit à l'échelle i peut être déduit de l'écart type du bruit de l'image et de l'étude de la variation du bruit dans l'espace des ondelettes, avec une hypothèse d'un bruit Gaussien.

3.1.1 Régularisation de l'algorithme de Van Cittert

L'itération de Van Cittert est:

$$O^{(n+1)} = O^{(n)} + R^{(n)} \quad (19)$$

avec $R^{(n)} = I - P * O^{(n)}$. La régularisation par les structures significatives conduit à:

$$O^{(n+1)} = O^{(n)} + \tilde{R}^{(n)} \quad (20)$$



Le principe consiste à détecter à chaque échelle, les structures significatives dans le résidu $R^{(n)}(x, y)$, et de les transférer dans l'objet restauré $O^{(n)}(x, y)$. Le processus se finit quand on ne détecte plus rien. Alors, on a séparé $I(x, y)$ en deux images $\tilde{O}(x, y)$ et $R(x, y)$. \tilde{O} est l'image restaurée qui ne contient pas de bruit, et $R(x, y)$ est le résidu final qui ne contient pas de structure. R est en fait notre estimation du bruit $N(x, y)$.

3.1.2 Régularisation de la méthode du gradient à pas fixe

L'itération de la méthode du gradient à pas fixe est:

$$O^{(n+1)} = O^{(n)} + P_s * R^{(n)} \quad (21)$$

avec $R^{(n)} = I - P * O^{(n)}$. La régularisation par les structures significatives conduit à:

$$O^{(n+1)} = O^{(n)} + P_s * \bar{R}^{(n)} \quad (22)$$

3.1.3 Régularisation de l'algorithme de Lucy

Notons $I^{(n)} = P(x, y) * O^{(n)}(x, y)$. alors $R^{(n)} = I - I^{(n)}$, et donc $I = I^{(n)} + R^{(n)}$. L'équation de Lucy est:

$$O^{(n+1)} = O^{(n)} \left[\frac{I^{(n)} + R^{(n)}}{I^{(n)}} * P_s \right] \quad (23)$$

La régularisation conduit à:

$$O^{(n+1)} = O^{(n)} \left[\frac{I^{(n)} + \bar{R}^{(n)}}{I^{(n)}} * P_s \right] \quad (24)$$

3.1.4 Convergence

L'écart type du résidu diminue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de structures significatives détectées. La convergence peut être estimée à partir de l'écart type du résidu. L'algorithme est arrêté quand:

$$\frac{\sigma_{R^{(n-1)}} - \sigma_{R^{(n)}}}{\sigma_{R^{(n)}}} < \epsilon \quad (25)$$

4 Exemple

Sur la figure 1 en haut à gauche est représentée une image simulée composée d'étoiles et de galaxies. En haut à droite, l'image a été convoluée par une réponse instrumentale et un bruit a été ajouté. Les images du bas montrent les restaurations par la méthode de Lucy et par la méthode de Lucy régularisée. Des techniques de détection automatique d'objets astronomiques ont ensuite été utilisées sur ces deux images. Les objets trouvés ont pu être alors comparés à ceux existant réellement dans l'image de départ (en haut à gauche). Les résultats de cette étude montrent que:

- Des objets ont été détectés jusqu'à une magnitude de l'ordre de 18.14 dans l'image restaurée par la méthode de Lucy, et de l'ordre 19.41 par la méthode basée sur les ondelettes.
- Le nombre de faux objets détectés est d'environ 25% pour la méthode de Lucy, et de 8.3% pour la méthode régularisée.
- Le rapport signal sur bruit de l'image dégradée est de 3.5 dB, celui de l'image restaurée par la méthode de Lucy est de 10dB, et celui de l'image restaurée par la méthode de Lucy régularisée est de 15.5 dB.

5 Conclusion

On a montré dans ce papier comment une méthode de déconvolution peut être régularisée en détectant à chaque échelle les structures significatives. La régularisation ne nécessite aucun autre paramètre que l'écart type du bruit. Celui ci peut être déterminé de manière automatique ou introduit interactivement. Une simulation a permis de mettre en évidence l'intérêt d'une telle approche: des objets plus faibles ont pu être détectés, le nombre de faux objets détectés a diminué considérablement, et le rapport signal sur bruit est bien meilleur. La qualité visuelle est aussi améliorée, ce qui rend l'image plus agréable à analyser.

References

- [1] A. Bijaoui, "Algorithmes de la Transformée en Ondelettes, Application à l'imagerie astronomique", *Ondelettes et Paquets d'Ondes*, Inria, Rocquencourt, 1991.
- [2] B.R. Frieden, "Image Enhancement and Restoration", *Topics in Applied Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Vol. 6, pp 177-249, 1975.
- [3] G.H. Golub, M. Heath and G. Wahba, "Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing good ridge Parameter", *Technometrics* 21 (2), 215-223, 1979.
- [4] M. Holschneider, P. Tchamitchian, "Les ondelettes en 1989", Ed. P.G. Lemarié, Springer Verlag, p. 102, 1990.
- [5] L. B. Lucy, "An Iteration Technique for the Rectification of Observed Distributions", *Astron. Journal*, 79, 745-754, 1974.

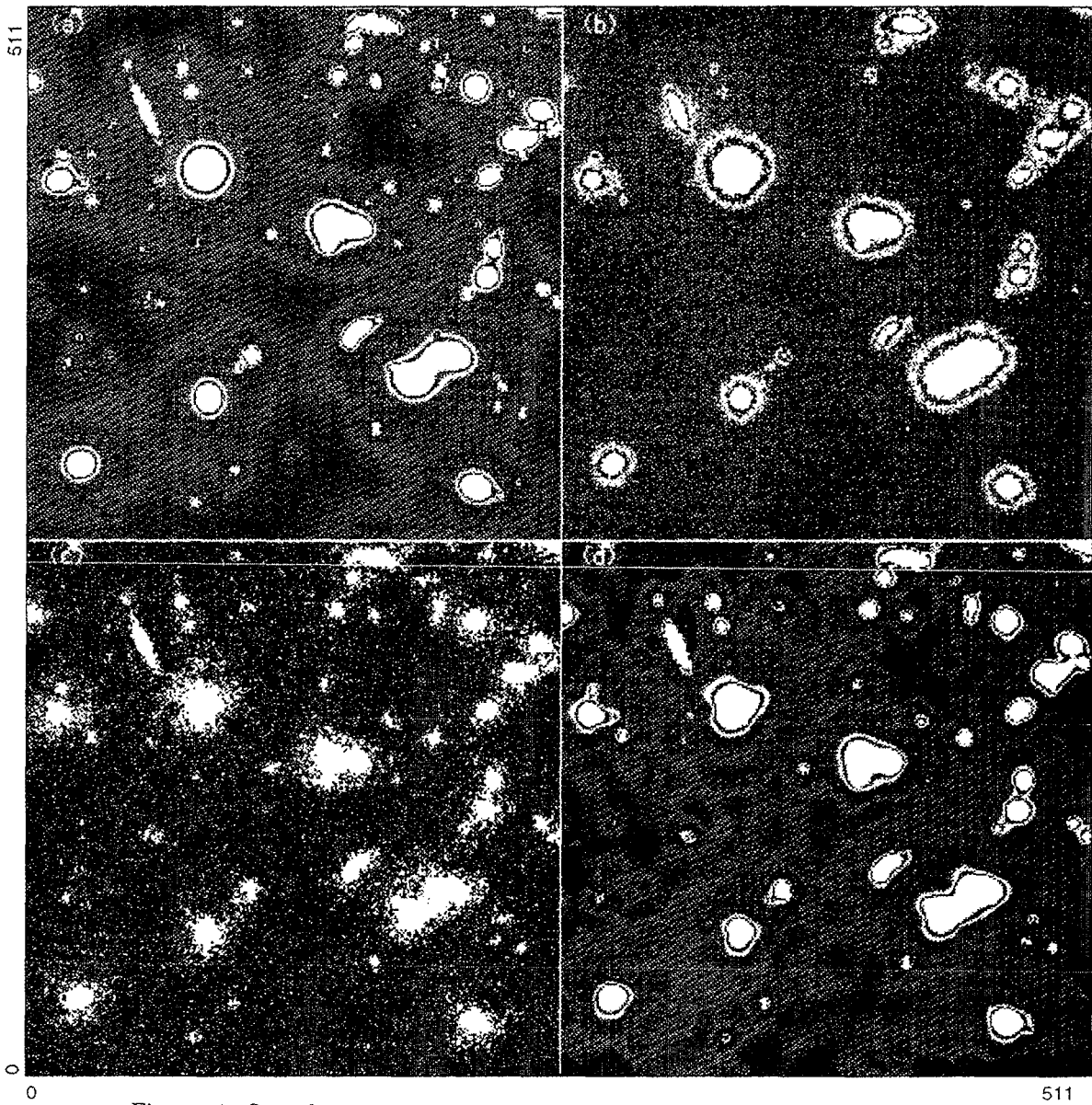


Figure 1: Simulation: En haut à gauche, image simulée. En haut à droite, convolution de l'image simulée par une réponse instrumentale, et un bruit a été ajouté. En bas, respectivement à gauche et à droite, les images restaurées par la méthode de Lucy et celle basée sur les ondelettes.

- [6] Y. Meyer, "Ondelettes", Ed. Hermann, Editeur des Sciences et des Arts, 1990.
- [7] M.B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, "Wavelets and their Applications", Jones and Barlett, 1992.
- [8] M.J. Shensa, "Discrete Wavelet Transforms: Wedding the à trous and Mallat Algorithms", Proc. IEEE Trans. Signal Process., Vol. 40, 2464–2482, 1992.
- [9] A.N. Tikhonov, and V. Y. Arsenin, "Solution of Ill-Posed Problems", Winston, Wahington, D.C., 1977.
- [10] P.H. Van Cittert, Z. Physik, Vol. 69, p. 298, 1931.