

# PRÉSEGMENTATION d'IMAGES COULEUR par la TRANSFORMÉE de KARHUNEN-LOEVE

André BRUN BUISSON, Vincent LATTUATI, Daniel LEMOINE

Laboratoire d'Automatique des Arts et Métiers CNAM - ENSAM  
21, Rue Pinel - 75013 PARIS - ☎ 47 07 08 44

RÉSUMÉ

La transformation de Karhunen-Loeve appliquée à une image couleur s'interprète comme un changement d'espace colorimétrique. Le nouvel espace optimise la décorrélation des couleurs et concentre l'information utile sur deux composantes pour des images "naturelles" (paysages, vues aériennes, ...) et pour l'imagerie industrielle lorsque deux ou trois couleurs sont dominantes.

Dans cette configuration, le premier axe porte la luminance et le deuxième la totalité de la chrominance. Ce résultat, intéressant pour la compression, est utilisé dans notre cas pour maîtriser efficacement la segmentation chromatique des images par régions.

ABSTRACT

Karhunen Loeve transform (KLT), computed on a color image array, defines a linear coordinate conversion of the color coordinate system. The new space of primaries performs uncorrelated color components and KL provides best compaction of data on the two first axes, for natural images (landscapes, ...). Artificial scenes are rightly analysed if two or three colors are obvious.

In this approach, the first axis is related to the luminance and the second axis can be expressed in term of the chrominance. This result, used in picture compression, allows to achieve accurate segmentation by region approach.

1. INTRODUCTION

Dans les applications en vision artificielle, la caméra vidéo est le capteur d'images le plus souvent utilisé. Pour des images couleur, on numérise les signaux des trois composantes R, V, B. Cette information tridimensionnelle n'est pas bien adaptée pour le traitement car elle mélange la luminance et la chrominance. Il existe d'autres espaces colorimétriques dans lesquels la luminance est une composante indépendante associée à deux signaux de chrominance (systèmes HIS, YIQ, etc...). Ces espaces sont souvent mieux interprétés mais moins bien conditionnés.

2. RAPPEL sur la TRANSFORMÉE de KARHUNEN-LOEVE.

Une image couleur peut être considérée comme une image multispectrale sur trois composantes. Dans cette image, les données colorimétriques ne sont pas indépendantes. Il existe des liaisons entre les différentes couleurs des points de l'image.

La transformée de Karhunen-Loeve est une méthode d'étude statistique et linéaire des liaisons entre des données. Elle est optimale au sens des moindres carrés et globale car aucune information a priori n'est utilisée.

Soit une image couleur de N pixels ( $A_1, A_2, \dots, A_N$ ) représentée dans  $R^3$  par un nuage de N points (fig 2-1).

La transformée de Karhunen-Loeve recherche un nouveau système d'axes  $R^q$  avec  $q \leq 3$  tel que les points du nuage présentent une décorrélation maximale. Ce résultat est

obtenu lorsque les q axes de  $R^q$  sont les axes principaux du nuage passant par son centre de gravité G.

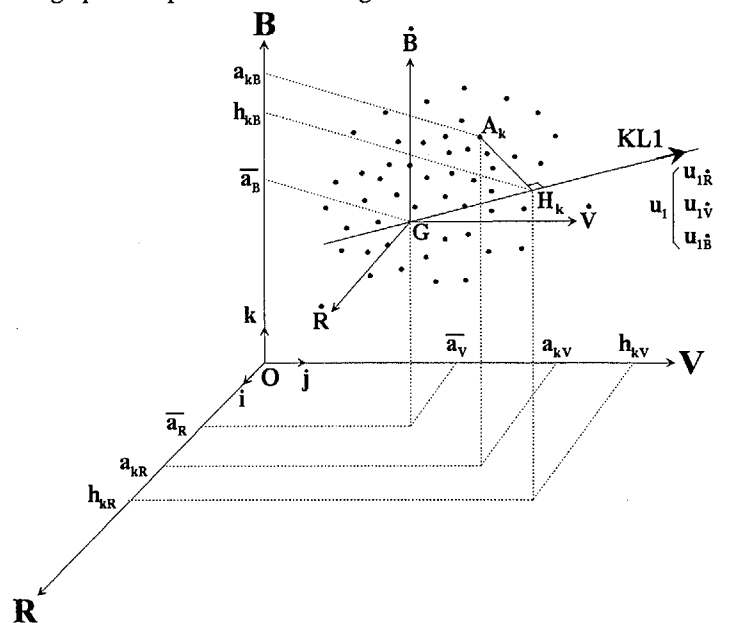


figure 2-1

Pour calculer la transformée de Karhunen-Loeve :

- On effectue la transformation

$$(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \xrightarrow{t} (G, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \quad A_k : (R, V, B) \xrightarrow{t} (\hat{R}, \hat{V}, \hat{B})$$



dans laquelle  $t$  est la translation de vecteur  $\underline{OG}$  et  $A_k$  un point courant de l'espace.

Chaque pixel  $A_k$  est représenté par un vecteur  $\underline{GA}_k$  dont les coordonnées sont notées respectivement  $\underline{\dot{a}}_k$  et  $\underline{\dot{a}}'_k$  dans les repères  $(G, \dot{R}, \dot{V}, \dot{B})$  et  $(G, KL1, KL2, KL3)$  tels que

$$\underline{\dot{a}}_k = (\dot{a}_{kR}, \dot{a}_{kV}, \dot{a}_{kB})^T \text{ et } \underline{\dot{a}}'_k = (\dot{a}'_{kKL1}, \dot{a}'_{kKL2}, \dot{a}'_{kKL3})^T$$

- On recherche un premier axe KL1 passant par G, de vecteur unitaire  $\underline{u}_1$  qui maximise la somme J des carrés des distances  $\underline{GH}_k$  où  $H_k$  est le projeté de  $A_k$  sur  $(G, \underline{u}_1)$ :

$$J = \max_{\underline{u}_1} \left[ \sum_{k=1}^N \underline{GH}_k^2 \right] = \max_{\underline{u}_1} \left[ \sum_{k=1}^N (\underline{GA}_k \cdot \underline{u}_1)^2 \right] = \max_{\underline{u}_1} \left[ \sum_{k=1}^N (\underline{\dot{a}}_k \cdot \underline{u}_1)^2 \right]$$

Un deuxième axe KL2 de vecteur unitaire  $\underline{u}_2$  est déterminé suivant le même critère dans le plan perpendiculaire à KL1 passant par G.

Le troisième axe KL3 de vecteur unitaire  $\underline{u}_3$  est perpendiculaire à  $(G, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$ .

Ces 3 axes forment un nouveau repère colorimétrique qui permet de séparer au mieux les données.

Les vecteurs unitaires  $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$  sont les vecteurs propres de la matrice de covariance centrée des N pixels de l'image. Cette matrice C de dimension 3 est symétrique, son terme général s'écrit  $c_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\dot{a}_{ki} \cdot \dot{a}_{kj}) = E(\dot{a}_i \dot{a}_j)$  pour  $(i, j) \in \{\dot{R}, \dot{V}, \dot{B}\} \times \{\dot{R}, \dot{V}, \dot{B}\}$ .

### 3. PROPRIÉTÉ de la MATRICE de COVARIANCE

Avec une approche statistique, on peut considérer chaque point  $A_k$  du nuage de N points comme la représentation aléatoire, parmi N tirages, d'un pixel aléatoire A représenté par un vecteur  $\underline{GA}$  dont les coordonnées sont notées  $\underline{\dot{a}} = (\dot{a}_{\dot{R}}, \dot{a}_{\dot{V}}, \dot{a}_{\dot{B}})^T$  et  $\underline{\dot{a}}' = (\dot{a}'_{KL1}, \dot{a}'_{KL2}, \dot{a}'_{KL3})^T$ .

La matrice de covariance des 3 couleurs calculée sur les N pixels de l'image s'écrit :

$$C = E(\underline{\dot{a}} \cdot \underline{\dot{a}}^T) = \begin{bmatrix} E(\dot{a}_{\dot{R}}^2) & E(\dot{a}_{\dot{R}} \cdot \dot{a}_{\dot{V}}) & E(\dot{a}_{\dot{R}} \cdot \dot{a}_{\dot{B}}) \\ E(\dot{a}_{\dot{V}} \cdot \dot{a}_{\dot{R}}) & E(\dot{a}_{\dot{V}}^2) & E(\dot{a}_{\dot{V}} \cdot \dot{a}_{\dot{B}}) \\ E(\dot{a}_{\dot{B}} \cdot \dot{a}_{\dot{R}}) & E(\dot{a}_{\dot{B}} \cdot \dot{a}_{\dot{V}}) & E(\dot{a}_{\dot{B}}^2) \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont réelles, positives, décroissantes et ses vecteurs propres orthogonaux.

Si l'on prend la même dimension pour les deux espaces, on peut écrire  $\underline{\dot{a}} = U \cdot \underline{\dot{a}}'$ .

La matrice de passage U formée par les vecteurs propres  $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$  de C est solution de l'équation matricielle  $C \cdot U = U \cdot \Lambda$  où  $\Lambda$  est la matrice diagonale des valeurs propres.

Les vecteurs propres sont choisis unitaires :  $U^T = U^{-1}$

Donc :  $U^T \cdot C \cdot U = \Lambda$ .

On démontre que dans l'espace des vecteurs propres :

-la matrice de covariance C' de la nouvelle image formée par les N pixels de vecteurs  $\underline{\dot{a}}'$  est diagonale et égale à  $\Lambda$ ,

-les composantes de l'image transformée sont décorréelées,

-les variances des nouvelles couleurs, mesurées sur les axes de K.L., sont les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

En conséquence  $\lambda_k$  mesure la quantité d'information supportée par la composante k. Elle représente aussi l'inertie  $I_k$  du nuage de points autour de la droite de couleur définie par  $(G, \underline{u}_k)$ . L'inertie totale par rapport au centre de gravité est donnée par  $I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(C)$ .

### 4. PROJECTION des COULEURS sur les AXES de K.L.

Sur chaque axe de K.L., on peut associer l'équivalent d'une luminance à l'amplitude de chacune des 3 composantes de  $\underline{\dot{a}}'_k$ . En reprenant les pixels de l'image, on reconstruit, pour chaque axe, une image de teintes en noir et blanc.

L'interprétation de ces images est souvent difficile et peu de chercheurs ont approfondi le contenu de ces informations, en particulier sur les images fournies par les axes KL2 et KL3.

Nous nous proposons de montrer que pour les images naturelles, dont le nuage des pixels est souvent aplati sur le plan formé par les axes KL1 et KL2, les images des deux premiers axes ont une signification qui les rendent particulièrement intéressantes pour la segmentation chromatique.

#### 4.1 Projection des couleurs sur l'axe KL1

Projetons tous les points  $A_k$  du nuage sur  $(G, \underline{u}_1)$  (fig 4-1).

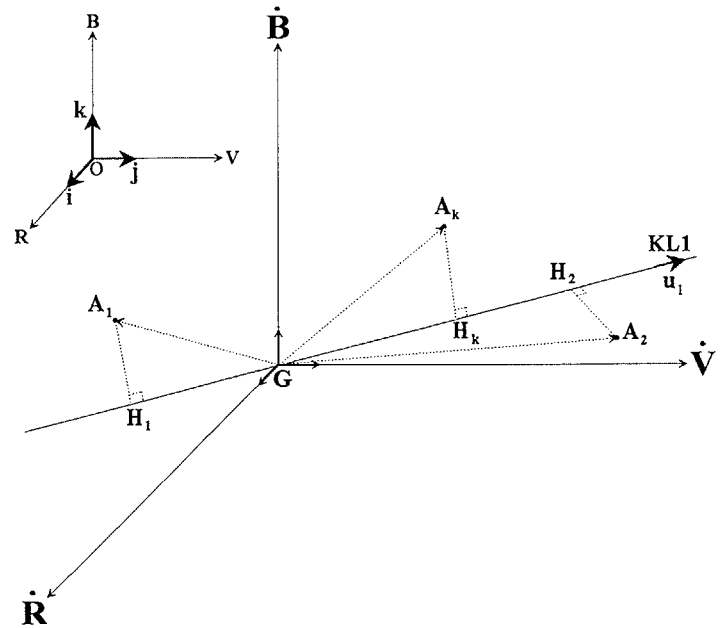


figure 4-1

Contrairement à l'usage qui associe à la projection  $H_k$  de chaque couleur  $A_k$  une luminance proportionnelle à l'abscisse  $\underline{GH}_k$ , nous allons associer au point  $H_k$  la couleur qui correspond à sa position spatiale dans le repère  $R, V, B$ . Soient:

$\underline{a}_k = (\dot{a}_{kR}, \dot{a}_{kV}, \dot{a}_{kB})^T$ ,  $\underline{h}_k = (\dot{h}_{kR}, \dot{h}_{kV}, \dot{h}_{kB})^T$ ,  $\underline{\bar{a}} = (\bar{a}_R, \bar{a}_V, \bar{a}_B)$  les coordonnées de  $A_k, H_k$  et G dans le repère  $(O, i, j, k)$  (fig 2-1).

Le passage de  $\underline{a}_k$  à  $\underline{h}_k$  s'écrit  $\underline{OH}_k = \underline{OG} + \underline{GH}_k$  ou  $\underline{h}_k = \underline{OG} + (\underline{GA}_k \cdot \underline{u}_1) \underline{u}_1 = \underline{\bar{a}} + (\underline{\dot{a}}_k \cdot \underline{u}_1) \underline{u}_1 = \underline{\bar{a}} + M \underline{\dot{a}}_k$

avec  $\underline{u}_1 = (u_{1R}, u_{1V}, u_{1B})^T$  dans le repère  $(G, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$  et

$$M = \begin{bmatrix} u_{1R}^2 & u_{1R}u_{1V} & u_{1R}u_{1B} \\ u_{1V}u_{1R} & u_{1V}^2 & u_{1V}u_{1B} \\ u_{1B}u_{1R} & u_{1B}u_{1V} & u_{1B}^2 \end{bmatrix}$$

On remarque que cette transformation modifie l'histogramme de l'image. Dans le cas présent, la dégénérescence est extrême puisque le nuage des couleurs dans la représentation de la figure 4-1 se ramène aux couleurs de l'axe KL1.

Pour la plupart des images naturelles, nous avons trouvé l'axe KL1 dans le premier triède. Dans cette portion d'espace les relations d'ordre sont conservées entre les pixels et leurs projections. Cette propriété explique le résultat connu qui associe à l'image fournie par l'axe KL1 l'image de la luminance.

#### 4.2 Projection des couleurs sur le plan défini par les axes KL1 et KL2

Projetons tous les pixels  $A_k$  sur  $(G, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$  (fig 4-2).

Soit  $\underline{p}_k = (p_{kR}, p_{kV}, p_{kB})^T$  les coordonnées de  $P_k$  dans le repère  $(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ .

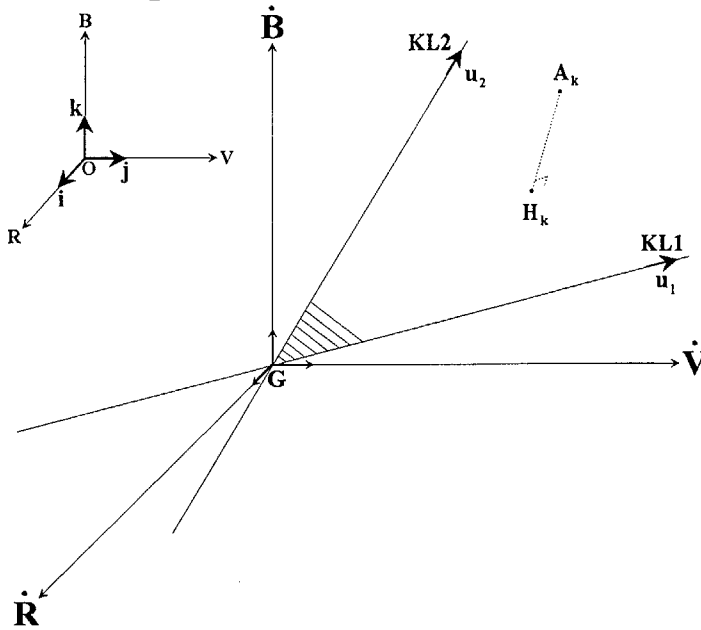


figure 4-2

De la même façon, nous restituons une image en remplaçant les couleurs des pixels  $A_k$  par les couleurs de leurs projections  $P_k$  dans le repère R, V, B.

On a :  $\underline{p}_k = \bar{a} + N\hat{a}_k$  avec

$$N = \begin{bmatrix} u_{1R}^2 + u_{2R}^2 & u_{1R}u_{1V} + u_{2R}u_{2V} & u_{1R}u_{1B} + u_{2R}u_{2B} \\ u_{1V}u_{1R} + u_{2V}u_{2R} & u_{1V}^2 + u_{2V}^2 & u_{1V}u_{1B} + u_{2V}u_{2B} \\ u_{1B}u_{1R} + u_{2B}u_{2R} & u_{1B}u_{1V} + u_{2B}u_{2V} & u_{1B}^2 + u_{2B}^2 \end{bmatrix}$$

Si l'inertie expliquée par les deux premiers axes dépasse les 98% le nuage des couleurs de l'image est très aplati sur le plan (KL1, KL2) et présente une forme allongée sur l'axe KL1.

Dans ces conditions l'image projetée sur ce plan est voisine de l'image couleur de départ.

#### 4.3 Projection des couleurs sur l'axe KL2, segmentation chromatique.

Lorsque les conditions des paragraphes 4-1 et 4-2 sont vérifiées, l'axe KL2 supporte l'information chrominance de l'image. En effet, dans cette hypothèse, le plan (KL2, KL3) est peu différent du plan chromatique du triangle de Maxwell, et la transformée de K.L. distingue l'axe KL2 qui contient le plus d'information.

L'image donnée par l'axe KL2 est un support sur lequel peuvent être appliqués des algorithmes de segmentation chromatique. Sur l'exemple ci-dessous la séquence des opérations enchaînées pour segmenter est très élémentaire puisqu'elle se limite à une opération de seuillage sur les niveaux de gris suivie d'un filtrage par érosion dilatation.



image fournie par l'axe KL2



image seuillée

image segmentée

### 5. MISE en OEUVRE de la TRANSFORMATION

Avec pour objectif d'accélérer le calcul de la transformation, nous donnons les principes mis en oeuvre dans l'algorithme de calcul.

Un balayage complet de l'image permet de construire l'histogramme tridimensionnel qui constitue la signature colorimétrique.

Dans cette représentation, chaque point du nuage est une couleur affectée d'un poids correspondant à l'accumulation dans la couleur.

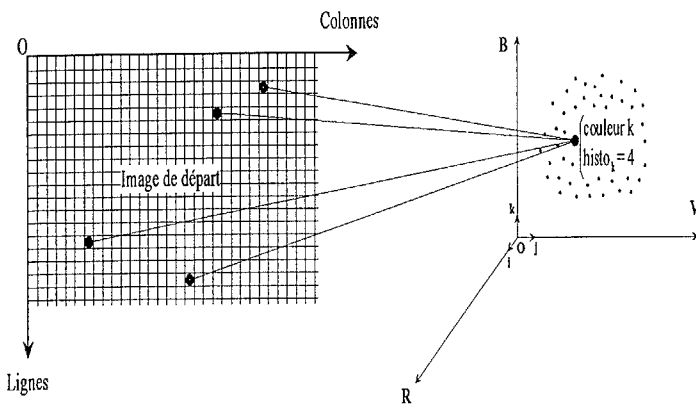


figure 5-1

C'est l'histogramme qui est à la base du calcul de la transformation. Il permet dans un premier temps de centrer l'espace colorimétrique autour des valeurs moyennes des composantes puis de calculer la matrice de covariance.

Le terme  $c_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\hat{a}_{ki} \cdot \hat{a}_{kj})$  dans lequel on doit effectuer N multiplications et N additions est remplacé par  $c_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{nb.couleurs} histo_k (\hat{a}_{ki} \cdot \hat{a}_{kj})$  où  $histo_k$  correspond à l'accumulation de la couleur k.

Cette dernière formule limite la sommation aux couleurs effectives de l'image et permet en moyenne de diviser par 6 le nombre d'opérations.

Les valeurs propres et les vecteurs propres sont calculés par la méthode de JACOBI en utilisant une bibliothèque mathématique.

A cette étape, la transformation fournit la nouvelle base pour le calcul des projections qui s'effectue à partir de l'équation  $\hat{a}' = U^T \hat{a}$ . Le calcul n'est pas effectué pour chacun des N pixels, mais à nouveau uniquement sur les couleurs effectives de l'image.

Les performances de la méthode ont été améliorées pour intégrer la transformation dans un système de vision en ligne. Dans le cas où les différences entre deux images successives restent faibles, le calcul peut se dérouler en temps réel en calculant les projections sur la base de K.L. de l'image précédente.

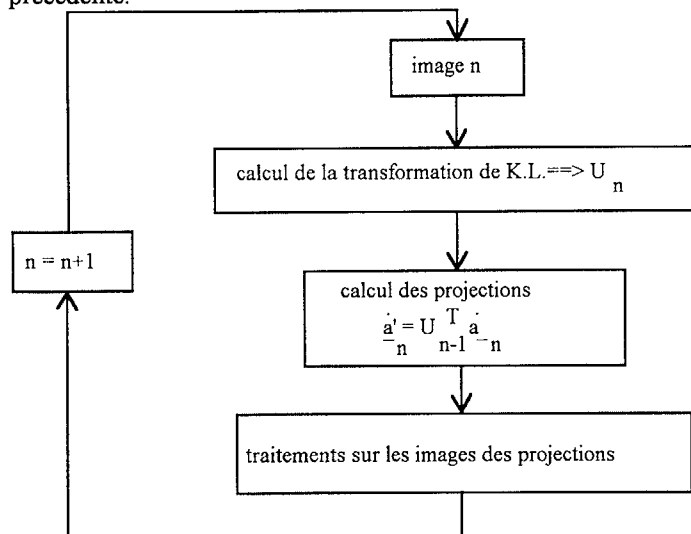


figure 5-2

## 6. APPLICATION à la RESTAURATION des IMAGES COULEUR DÉGRADÉES par le TEMPS.

Certains documents photographiques ou cinématographiques anciens sont aujourd'hui dégradés. Ces images obtenues à partir des trois couleurs complémentaires cyan, jaune et magenta ont tendance à "rosir" car la couche cyan manque de stabilité.

Le traitement global de l'image ne donne pas de bons résultats car la dégradation n'est pas uniforme. Elle est particulièrement visible dans les zones claires de la scène où la correction doit être renforcée. On segmente l'image obtenue sur l'axe KL2 pour en extraire ces zones qui sont coloriées séparément avant d'être réintégrées dans l'image de départ.

## 7. CONCLUSION.

La transformation de Karhunen-Loeve n'a pas la prétention d'être un outil universel. Nous avons rencontré des images pour lesquelles la segmentation n'a pas donné le résultat attendu. Pour segmenter correctement les régions, il faut que l'inertie expliquée sur les 2 premiers axes soit supérieure à 98% car le nuage des couleurs se présente sous une forme aplatie favorable à la compression des données.

Ces limitations étant prises en compte, cette transformée est particulièrement bien adaptée dans la mise en oeuvre d'une coopération dynamique entre image de contours et image de régions en utilisant respectivement les informations de l'axe KL1 et KL2.

Les possibilités de calcul en temps réel d'une transformée approchée sont à retenir car elles permettent d'utiliser un tel outil en prétraitement des images dans des applications industrielles en association avec un transformateur d'espace colorimétrique cablé.

## 8. BIBLIOGRAPHIE.

- [1] FUNDAMENTALS of DIGITAL IMAGE PROCESSING  
Anil K. JAIN - Prentice hall information and system sciences series
- [2] La RECONNAISSANCE des FORMES par ALGORITHMES  
J.C.SIMON - Masson
- [3] A FAST KARHUNEN-LOEVE TRANSFORM for a CLASS of RANDOM PROCESSES  
Anil K. JAIN - Digital Image Processing & Analysis - Vol 1 - I E E E Computer Society
- [4] ANALYSE en COMPOSANTES PRINCIPALES d'une IMAGE COULEUR  
I. A. OCADIZ LUNA - Thèse de l'Institut Polytechnique de Grenoble