



APPLICATION DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER GENERALISEE AU PROBLEME DE L'INVARIANCE EN RECONNAISSANCE DE FORMES A NIVEAUX DE GRIS

Faouzi GHORBEL

Groupe image de l'Institut National des Télécommunications et de l'Ecole Nouvelle d'Ingénieurs en
Communication, Cité Scientifique, Rue Guglielmo MARCONI, 59650 Villeneuve d'Ascq, France

Dans cet article, nous introduisons une approche unitaire pour résoudre les problèmes de l'invariance en reconnaissance de formes en se basant sur la notion de transformée de Fourier dans un groupe localement compact et séparable. Grâce à cette approche nous définissons une famille d'invariants complète et convergente par rapport aux similitudes directes planes dans le cas d'images à niveaux de gris. Ce qui permet d'obtenir une distance sur l'espace des formes. Une approximation numérique du prolongement analytique de la transformée de Fourier Mellin et une autre pour sa transformée inverse sont proposées et calculées dans le cas d'images médicales.

L'analyse des scènes dans un certain nombre d'applications telles que l'imagerie médicales, la classification de micro-organismes biologiques, la reconnaissance de caractères, la détection ou le suivi d'objet dans les séquences d'images dynamiques en vue de compression, se fait à l'aide de primitives invariantes par rapport à certaines transformations géométriques du plan (translation, rotation, homothétie, affinité...). La description invariante des images ou des formes est souvent obtenue par les moments de l'image, les descripteurs de Fourier, les descripteurs de Fourier Mellin, les méthodes prédictives ou d'autres. Ce sujet a fait l'objet d'un nombre important de travaux [1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8]... Le choix d'un type de description est souvent conditionné par des critères, les principaux sont :

1. Le *temps de calcul*.
2. La *pertinence* des paramètres invariants : ces paramètres doivent être discriminants.
3. La *complétion* : cette propriété assure la reconstruction de l'image à partir uniquement des invariants à une transformation près.
4. la définition d'une *distance* entre les formes c'est à dire invariante par rapport aux transformations.
5. La *stabilité* des invariants par rapport aux petites variations de formes dues à la variabilité naturelles des objets observés ou aux distorsions apportées par les mesures (acquisition, numérisation, quantification,...)

En littérature, les auteurs ont souvent eu le soucis de satisfaire principalement les deux premiers critères. En effet, ils

The generalised Fourier Transform on a given group of transformations is applied to invariant feature extraction in the case of a gray level image. Thus, a new complete and convergent set of invariant features under planar similarities is proposed using the Analytical Fourier Mellin Transform. This set is complete and convergent, so it gives a distance under planar similarities between the shapes which is invariant. This paper refers mainly to medical images where photos of a retina are taken over a period of time in order to examine the progress of an illness.

correspondent à des impératives au niveau des applications. La complétion a été introduite par Crimmins [5] et a été évoquée par d'autres auteurs [8]. La définition mathématique de la stabilité a été précisée dans le cas des contours plans dans [9] où une familles d'invariants complète et stable à été proposée définissant ainsi une distance euclidienne entre les formes compatible avec la topologie naturelle de l'espace des formes [10]. Les difficultés liées à la construction d'un ensemble de paramètres invariants pertinent varient en fonction du type des images étudiées. Nous les classons en quatre familles :

1. les formes planes se résumant à leurs *contours*.
2. Les formes planes complexes ne pouvant être représentées que par des *images à niveaux de gris*
3. Les objets de *formes tridimensionnelles*.
4. Les séquences d'*images dynamiques*.

Nous étudions dans cet article la représentation invariante des formes dans le cas des images planes à niveaux de gris, en montrant l'existence d'une famille complète et convergente d'invariants par rapport aux similitudes planes directes. Nous rappellerons quelques résultats utiles de l'analyse harmonique commutative afin d'introduire la transformée de Fourier généralisée relative à un groupe commutatif. Une telle approche a deux objectifs :

- Résoudre des questions plus générales : l'invariance par rapport à différents groupes de transformations (les projection tridimensionnelles, les affinités, les similitudes, les dilatation horizontales...).



- La construction d'une famille d'invariants complète et convergente dans le cas des images à niveaux des gris. Nous montrons que la Transformée de Fourier Mellin (TFM) est la transformée de Fourier dans le groupe des similitudes directes planes.

A cause de la divergence de la (TFM) au voisinage de l'origine [5], nous proposons la définition de son prolongement analytique (PATFM). A partir de celui-ci, nous construisons une nouvelle famille d'invariants complète et convergente par rapport aux similitudes définissant ainsi une distance entre les formes dans le cas des images à niveaux de gris. Nous signalerons les difficultés algorithmiques d'implantation de cette transformée (coordonnées polaires, l'inexistence d'une Transformée Discrète de Mellin, l'approximation d'une telle transformée...). La convergence de cette description assure l'existence d'une distance entre les formes.. Cependant, la complexité des êtres mathématiques de cette description pose des problèmes théoriques difficiles à résoudre pour une vérification rigoureuse du critère de stabilité. Nous approximations le PATFM sur des images médicales. Nous illustrerons l'invariance par ce même type d'images. La complétion est ensuite vérifiée par la reconstruction de l'image originale à partir seulement de sa description invariante.

I. INVARIANTS DES MOMENTS

Parmi les méthodes les plus connues, la première à avoir été introduite est celle utilisant les moments de l'image [1],[2] et [3]. Les invariants des moments sont construits de façon à ce que les translations, rotations et homothéties (similitudes directes) spatiales n'aient aucun effet sur les valeurs numériques des mesures de ces derniers.

L'utilisation des invariants des moments a été proposé en premier par Ming-Kuel en 1962 pour la reconnaissance des caractères.

Ainsi, les moments d'une image $f(x,y)$ d'ordre $p + q$, où p et q sont des entiers naturels sont donnés par :

$$m_{p,q} = \iint_{\mathbb{R}^2} x^p y^q f(x,y) dx dy$$

Nous obtenons les coordonnées du centre d'inertie de f

$$x_G = \frac{m_{1,0}}{m_{0,0}} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{m_{0,1}}{m_{0,0}}$$

Des moments centrés peuvent être déduits :

$$\mu_{p,q} = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - x_G)^p (y - y_G)^q f(x,y) dx dy$$

Ces quantités sont invariantes par rapport aux translations. A partir des moments centrés, des moments réduits peuvent être obtenus :

$$\eta_{p,q} = \frac{\mu_{p,q}}{(\mu_{0,0})^{\frac{p+q+2}{2}}}$$

Ces quantités sont invariantes par rapport à la composition d'une translation et d'une homothétie du plan. Afin d'obtenir l'invariance par rapport aux rotations, Nous nous contenterons de rappeler l'expression de quelques invariants globaux pour montrer dans quelle mesure les expressions de ces invariants deviennent lourdes quand l'ordre $p+q$ des moments correspondants augmente.

$$H_1 = \mu_{2,0} + \mu_{0,2}$$

$$H_2 = (\mu_{2,0} - \mu_{0,2})^2 + 4\mu_{1,1}$$

$$H_7 = (3\mu_{2,1} - \mu_{0,3})(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})[(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})^2 - 3(\mu_{2,1} + \mu_{0,3})^2]$$

$$- (\mu_{3,0} - 3\mu_{1,2})(\mu_{2,1} + \mu_{0,3})[3(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})^2 - (\mu_{2,1} + \mu_{0,3})^2]$$

Deux critiques fondamentales peuvent être apporter à ce type d'invariant qui sont les suivantes : 1.La non complétion. 2.Les erreurs de trainages lors de leurs calcul.

II. APPROCHE DE L'ANALYSE HARMONIQUE

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats utiles de l'analyse harmonique commutative afin d'introduire la notion de transformée de Fourier sur un groupe. Nous noterons dans ce qui suit par :

- \mathbb{R} le groupe additif des nombres réels,
- \mathbb{R}^* , [resp \mathbb{R}^*_+] le groupe multiplicatif des réels non nuls [resp strictement positifs]
- S^1 le cercle de \mathbb{R}^2 , pouvant être assimilé au groupe quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} ou au groupe multiplicatif \mathbb{U} des nombres complexes de module égal à 1.
- $\text{SimO}^+(\mathbb{R}^2)$ le groupe des similitudes directes plane de centre O , isomorphe à \mathbb{C}^* le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls. Munis de leur topologie naturelle, ces groupes ont une structure de groupe topologique [11].
- $L^1(\mu)$ l'espace des fonctions de G à valeurs complexes μ -intégrable

1. Mesure de Haar

Définition 1 : Soit G un groupe commutatif localement compact on dit qu'une mesure μ sur G est invariante si pour tout a de G et pour tout borélien B de G , on a :

$$\mu(a.B) = \mu(B)$$

Ce qui implique que pour toute fonction f de $L^1(\mu)$

$$\int_G f(a.x) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$$

Définition 2 : On appelle mesure de Haar sur G une mesure positive non nulle sur G invariante.

Résultat important (Théorème de Haar) : Sur tout groupe localement compact, il existe une mesure de Haar, à un facteur constant près, il n'en existe qu'une.

Exemples: - \mathbb{R}^d muni de l'addition admet comme mesure de Haar la mesure de Lebesgue.

- Le groupe multiplicatif \mathbb{R}^* admet comme mesure de Haar la mesure de ayant la densité $1/x$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

2. Les représentations d'un groupe :

Définition 3 : Soit G un groupe et H un espace vectoriel, on dit que (T,H) est une représentation de G si T associe à tout x de G un endomorphisme de H qu'on note $T(x)$ et si T est tel que $T(e) = I$ (opérateur identique de H) et $T(xy) = T(x).T(y)$ pour tout x et y de G .

H peut être de dimension infinies. Comme il est d'usage, on désignera par T au lieu de (T,H) .

Définition 4 : T est irréductible s'il n'existe pas de sous espace S de H tel que $T(x).S$ soit contenu dans S , pour tout x dans G .

Définition 5 : Si H est un espace préhilbertien et que pour tout x de G la matrice $T(x)$ est unitaire, on dit que la représentation est unitaire.



Définition 6 : L'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G qu'on notera par \hat{G} sera appelé dual de G .

Exemples : - Si $G = \mathbb{R}$ alors $\hat{G} = \mathbb{R}$

Pour tout T dans \hat{G} , il existe un réel λ tel que $T(x).z = e^{i\lambda x}.z$, où z est un nombre complexe et x un réel.

- Si $G = S^1$ alors $\hat{G} = \mathbb{Z}$.

Pour tout T dans \hat{G} , il existe un entier n tel que $T(\xi).z = \xi^n.z$, où z est un nombre complexe, et ξ est un complexe de module égal à 1.

- Si $G = \mathbb{R}^*_+$ alors $\hat{G} = \mathbb{R}$.

Pour tout T dans \hat{G} il existe un réel λ tel que $T(x).z = \alpha^{i\lambda}.z$, où z est un nombre complexe et α un réel strictement positif.

Quand G est commutatif les éléments de \hat{G} s'appellent caractères de G .

3. Transformée de Fourier sur un groupe G :

Définition 7 : Soit f une fonction μ -intégrable sur G à valeurs complexes, sa transformée de Fourier est définie par :

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(x) [T_\lambda(x)]^{-1} d\mu(x)$$

où μ est la mesure de Haar à gauche de G . (Pour tout $\lambda, \hat{f}(\lambda)$ est un opérateur sur H).

Exemples : - $G = \mathbb{R}^n, \hat{G} = \mathbb{R}^n$ pour tout λ dans \mathbb{R}^n

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \lambda \rangle} dx$$

- $G = S^1, \hat{G} = \mathbb{Z}$, pour tout n dans \mathbb{Z}

$$\hat{f}(n) = \int_{[0, 2\pi]} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

c'est la décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.

- $G = \mathbb{Z}, \hat{G} = S^1 \quad \hat{f}(l) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} f(p) e^{-in\theta}$

C'est la transformée de Fourier discrète (T.F.D).

- $G = \mathbb{R}^*_+ \text{ ou } \mathbb{R}^*, \hat{G} = \mathbb{R}$

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^*_+} f(x) x^{-i\lambda} \frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} f(x) x^{-i\lambda-1} dx$$

Dans ce cas, on retrouve la transformée de Mellin.

Remarque: Les principales propriétés classiques de la transformée de Fourier classiques sont conservé dans le cas général. En effet, celle-ci reste inversible et admet sa transformée inverse.

Exemple : - $G = \mathbb{R}^n, \hat{G} = \mathbb{R}^n$ pour tout x dans \mathbb{R}^n ;

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\lambda) e^{i\langle x, \lambda \rangle} d\lambda$$

est la transformée de Fourier inverse dans le groupe \mathbb{R}^n .

- $G = \mathbb{R}^*_+ \text{ ou } \mathbb{R}^*, \hat{G} = \mathbb{R}$ et pour tout x dans \mathbb{R}^*_+ ;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \hat{f}(\lambda) x^{-i\lambda} d\lambda$$

est la transformée de Mellin inverse.

Relation de séparabilité : La transformée de Fourier sur un groupe G admet la propriété suivante : f et g se déduisent l'une de l'autre par une translation de G c'est à dire il existe a dans G tel que $f(x) = g(ax)$. Cela est équivalent à :

$$\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda) T_\lambda(a)$$

$\hat{f}(\lambda)$ est la transformée de Fourier dans G de f et $T_\lambda(a)$ est une représentation de G .

Applications : Le groupe $G = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (coordonnées polaires) est isomorphe à $\text{SimO}+(\mathbb{R}^2)$. O est l'origine des coordonnées polaires. Il sera placé au centre d'inertie de a forme à reconnaître. $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, est muni de la multiplication suivante :

$$(\rho, \theta)(\rho', \theta') = (\rho\rho', \theta + \theta')$$

Le dual d'un produit de deux groupes topologiques, est le produit des duaux. Cela implique que le dual de G est $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. D'autre part la mesure de Haar de G est :

$$d\mu(\rho, \theta) = \frac{d\rho}{\rho} d\theta$$

La transformée de Fourier dans ce groupe n'est autre que la TFM étudiée dans [11] et définie par :

$$M_f(k, v) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-ik\theta} r^{-iv} \frac{dr}{r} d\theta, \quad k \text{ entier et } v \neq 0$$

où f est dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$. Malheureusement les images ne vérifient généralement pas, cette hypothèse. Ce qui pose le problème de la convergence de cette intégrale. Afin de résoudre ce problème nous proposons de considérer le prolongement analytique de la TFM que nous définissons de la manière suivante :

$$M_f(k, s) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-ik\theta} r^{s-1} dr d\theta, \quad k \text{ entier, } s \text{ dans } \mathbb{C}$$

Pour que cette intégrale converge il faut et il suffit que $\text{Re}(s) > 0$. Cependant la relation de séparabilité (reliant deux images ayant la même forme) est donnée par :

$$M_f(k, \sigma_0 + iv) = \alpha^{-\sigma_0 - iv} e^{ik\beta} M_g(k, \sigma_0 + iv) \quad \sigma_0 > 0 \text{ (fixé)}$$

Dans le théorème suivant, nous proposons la construction d'une famille d'invariants complète et convergente.

Théorème : Pour tout $\sigma_0 > 0$ fixé, la famille suivante :

$I_f(k, \sigma_0 + iv) = M_f(k, s) [M_f(1, 1)]^{-k} |M_f(1, 1)|^k [M_f(0, 1)]^{-s}$ pour tout entier k non nul et pour tout réel v avec $\text{Re}(s) > 0$, est une famille d'invariants complète et convergente par rapport au groupe des similitudes.

Démonstration de la convergence

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} \int_{-\infty}^{+\infty} |I_f(k, \sigma_0 + iv)|^p dv \right)^{1/p} = [M_f(0, 1)]^{-\sigma_0} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} \int_{-\infty}^{+\infty} |M_f(k, \sigma_0 + iv)|^p dv \right)^{1/p}$$

$$N_p(I_f) = [M_f(0, 1)]^{-\sigma_0} N_p(M_f)$$

La PAFM inverse est la suivante :

$$f(r, \theta) = \sum_k \int_R M_f(k, \sigma_0 + iv) e^{ik\theta} r^{\sigma_0 + iv} dv \text{ pour } r > 0 \text{ et } 0 < \theta < 2\pi.$$

Approximation et considération numérique La transformée de Mellin est définie pour des signaux à variable continue et il n'existe donc pas de versions discrètes de celle-ci. Ce qui nous amène, dans le but de calculer les invariants numériquement, à proposer une approximation du prolongement analytique de la transformée de Fourier Mellin s'écrivant comme suit :

$$\hat{M}_f(k, \sigma_0 + iv) = \sum_{r=1}^R \sum_{m=0}^{N(r)-1} f(r, \frac{2\pi m}{N(r)}) \exp\left\{-\frac{2\pi mk}{N(r)}\right\}$$

pour tout k entier et v un nombre réel.

Sa transformée inverse peut être approximé par :

$$f(r, \frac{2\pi m}{N(r)}) = \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty} \sum_{k=0}^{N(r)-1} \hat{M}_f(k, \sigma_0 + iv) r^{-\sigma_0 - iv} \exp\left\{-\frac{2i\pi mk}{N(r)}\right\}$$

RESULTATS ET PERSPECTIVES

Nous avons calculé le prolongement Analytique de Fourier-Mellin en prenant $\text{Re}(s)=1$, sur une des image des contours du fond de l'oeil de taille 512x512 (Fig 1). Le calcul de l'approximation du PAFM est illustré par la figure 2. La reconstruction de l'image contour de la rétine est obtenue par le calcul de l'approximation de la PAFMI (Figure 3).

Une démarche basée sur la notion de la transformée de Fourier sur un groupe a été présentée. Une modélisation du problème de l'invariance dans les scènes a fait l'objet d'un développement.

Une famille de paramètres invariants complète et convergente a été proposée, dans le cadre des images à niveaux de gris. Cette famille est basée sur le prolongement analytique de la transformée de Fourier-Mellin L'inversibilité de la transformée de Fourier Mellin est vérifié expérimentalement.

La définition d'une distance invariante par rapport à un groupe de transformations est fort utile puisque nous obtenons un critère permettant de mesurer le degré d'isotropie des traitement ou des opérations qu'on applique à une image à niveaux de gris telles que la segmentation, la restauration ..etc.

Références

- [1] G. H. Grunlund, *Fourier preprocessing for hand print character recognition*, IEEE. Trans C-21, 195-201, 72.
- [2] F. Ghorbel et al, *Automatic control of lamellibranch larva growth using contour invariant feature extraction*, Pattern Recognition, Vol 23, N°2, March 90.
- [3] C. T. Zhan et al, *Fourier Descriptors for plane closed curves*, in IEEE Trans. C-21, n°3, pp. 261-81, 72.
- [4] E. Persoon et al, *Shape discrimination using Fourier Descriptors*, in IEEE Trans., SMC-7, N°3, pp 170-79, 77.
- [5] T. R. Crimmins, *A complete set of Fourier Descriptors for two-dimensional Shapes*, IEEE Trans., SMC-12, N°6, pp. 848-55, Nov/Dec 82.
- [6] K. Arbter, et al, *Application of affine-invariant Fourier Descriptors to Recognition of 3-D objects*, IEEE Trans., PAMI-12, N°7, pp. 640-47, July 90.
- [7] I. Sekita et al, *Complex Autoregressive Model for Shape Recognition*, IEEE Trans., PAMI-14, N°4, pp. 489-96, April 92.
- [8] J. P. Gauthier et al *Motion and Pattern Analysis: Harmonic Analysis on Motion Groups and Their Homogeneous Spaces*, IEEE Trans. SMC-21, N° 1 Janvier/February 91.

- [9] F. Ghorbel, *Stability of Invariant Fourier Descriptors and inference in the Shape Classification*, 11thICPR September 92, The Hague (NL).
- [10] F. Ghorbel, *Distance et invariance pour la classification d'objets dans les images*, DISTANCIA'92, June 22-26, 92, Rennes (F).
- [11] J. Dieudonné, *Elément d'analyse*, Gautier-Villars Tome II, Paris 74.

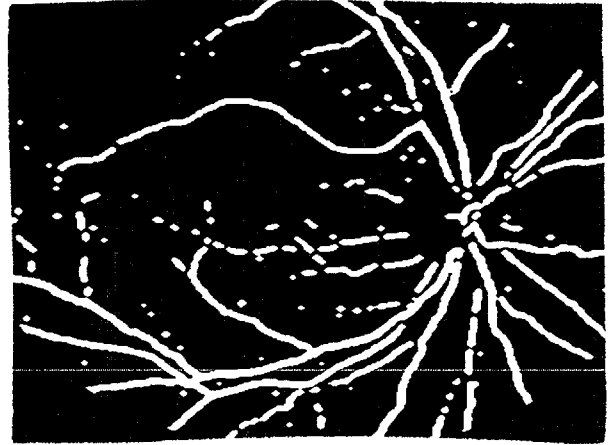


Figure 1. Représente les contours d'une image du fond de l'oeil.

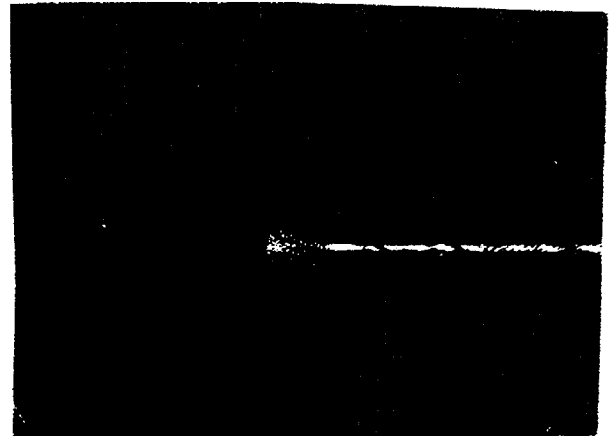


Figure 2. Le module du PAFM de l'image de Fig. 1 en polaires.

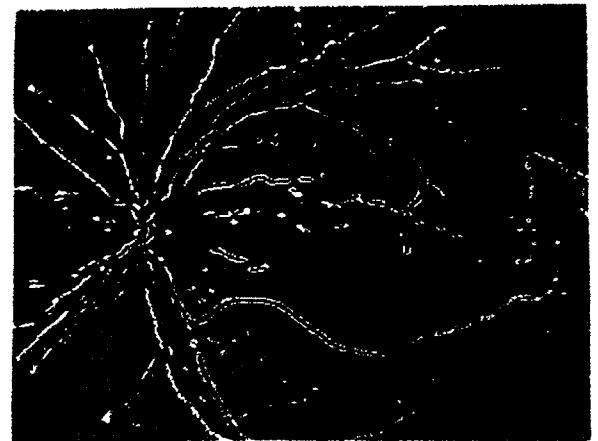


Figure 3. représente le reconstruction de l'image de fig.1 par PAFMI.