

**Algorithmes de relaxation déterministe sur modèles markoviens pour l'estimation de mouvement en codage d'images**

P. Planet, G. Privat.

FRANCE TELECOM  
 Centre National d'Etudes des Télécommunications, CNET-Grenoble  
 BP 98 - 38243 Meylan Cedex.

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Un champ de mouvement dense issu d'une estimation globale du flot optique a été utilisé comme prédicteur dans un schéma causal de codage inter-images. Une technique de relaxation déterministe par recuit en champ moyen a été mise en oeuvre pour la résolution du problème d'estimation régularisé dans le cadre d'une modélisation markovienne. L'algorithme a été simulé isolément dans une boucle de prédictive temporelle sans perte, puis intégré dans un codeur multirésolution à quantification vectorielle. Les résultats obtenus démontrent la possibilité d'obtenir simultanément une erreur de prédiction minimale et un champ de mouvement cohérent par rapport aux mouvements réels de la scène, deux objectifs pourtant bien distincts dans les approches classiques. L'intérêt en est attesté ici dans un système de codage prédictif causal, mais il peut également apparaître pour du rééchantillonnage temporel compensé en mouvement ou à plus long terme pour un système de codage par régions basé sur une segmentation spatio-temporelle.

A dense motion field obtained as a result of global optical flow estimation was used as a predictor in a causal inter-frame coding scheme. A deterministic relaxation technique (mean field annealing) was applied to the solution of the regularized estimation problem cast into the framework of Markov Random Field models. The algorithm was first simulated stand-alone in a lossless predictive inter-frame loop, then embedded in a multiresolution VQ-based coder. It is proved possible to jointly attain two usually divergent objectives in this way : direct minimization of the prediction error on the one hand, coherency between the motion field and the true motion of the scene on the other hand. This twofold ambition is warranted for causal predictive coding as well as motion-compensated temporal resampling of images. A more longterm application is envisioned in spatio-temporal segmentation for region-based coding.

**1. Introduction**

L'estimation de mouvement effectuée dans le cadre d'un codage d'images prédictif temporel est *a priori* très différente de celle étudiée aux fins d'analyse d'une scène animée. Dans le premier cas c'est la minimisation brute de l'erreur de prédiction inter-images qui est le seul critère à prendre en compte; la cohérence globale du champ de déplacement calculé et sa relation avec le mouvement réel dans la scène sont au contraire déterminants dans le second cas, et l'on a alors recours aux techniques relevant de la vision bas-niveau [Dub92] [Bou 88].

On a expérimenté ici l'application d'une même technique dans ces deux contextes d'utilisation. Un objectif *a priori* en était de valider dans le cadre d'un schéma de codage hybride classique des algorithmes qui pourront permettre une évolution vers des principes de codage plus avancés (par régions 2D ou modèles 3D) pour lesquels une chaîne complète reste un objectif à long terme.

**2. Schéma causal de compensation de mouvement**

Les techniques classiques d'appariement de blocs (block-matching) sont bien adaptées à des schémas de prédiction inter-image de type non-causal (antérogrades), où l'on doit transmettre l'information de mouvement avec l'erreur de prédiction (figure 1-b). L'estimation de mouvement est un problème d'optimisation parfaitement déterminé dans ce cadre purement prédictif, contrairement à l'analyse d'un champ de mouvement dense cohérent par rapport aux mouvements réels de la scène ou de la caméra, qui est classiquement un problème sous-déterminé d'optique inverse. Un champ dense peut également être utilisé

comme prédicteur inter-images, mais le codage du champ risquant dans ce cas d'annuler le bénéfice d'une estimation plus précise [Nic 90], on est conduit à s'intéresser à des schémas de type causal ou "rétrograde" [Dri 90] ne nécessitant pas la transmission de vecteurs mouvement (figure 1-a). Le principe en est d'utiliser les images n-1 et n-2 reconstruites à l'identique au codeur et au décodeur pour prédire l'image n.

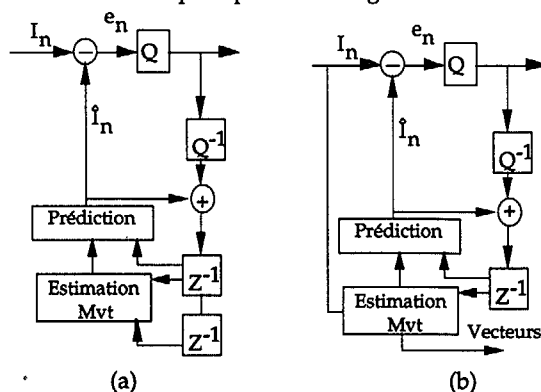


Figure 1 : Boucle prédictive inter-images causale/rétrograde (a) et non-causale/antérograde (b)

L'approche adoptée est d'optimiser le champ de mouvement de manière globale au niveau d'une image, en effectuant le calcul de manière temporellement récursive, à l'inverse de ce qui se fait dans un schéma classique pixel-récursif. Cette optimisation résulte de l'incorporation, suivant le principe général de



régularisation [Pog 85], de contraintes a priori sur les propriétés du champ qui en lèvent l'indétermination initiale.

**3. Identification du problème au modèle énergétique**

La modélisation markovienne, en tant qu'apparentée aux techniques de régularisation, a été utilisée à l'origine pour des problèmes de restauration d'images [Gem 84], et appliquée ultérieurement à la modélisation de champs de déplacement en analyse d'images [Kon 88], [Hei 92]. Les contraintes de régularité des champs solutions sont imposées par le biais d'un voisinage spatio-temporel pour prendre en compte à la fois l'objectif de lissage temporel inhérent à la prédiction causale et le lissage spatial lié à la cohérence structurelle du champ.

La première étape d'une modélisation par champ de Markov aléatoire consiste à définir le voisinage et les cliques. Nous choisissons un voisinage simple de quatre pixels spatiaux et un temporel; les cliques sont d'ordre deux. Le voisinage du pixel (i,j,n) est noté  $N_{ij} = \{(i-1,j,n); (i+1,j,n); (i,j-1,n); (i,j+1,n); (i,j,n-1)\}$ .

La seconde étape consiste à introduire une hypothèse a priori faite sur le champ à obtenir. Il s'agit ici d'une hypothèse de continuité spatiale et temporelle : les pixels voisins doivent avoir des vecteurs vitesse proches. Mathématiquement cette hypothèse se modélise par une fonction potentiel définie par sommation sur l'ensemble des cliques du voisinage d'un pixel (i,j):  $V_c(i,j) = \sum_{kl \in N_{ij}} \|\bar{d}_{ij} - \bar{d}_{kl}\|^2$ . De ce potentiel est déduit l'énergie globale

de contrainte (terme de la régularisation) ou énergie a priori (dans le vocabulaire de la modélisation markovienne):

$$E_c = \sum_{ij} V_c(i,j) = \sum_{ij} \sum_{kl \in N_{ij}} \|\bar{d}_{ij} - \bar{d}_{kl}\|^2$$

L'équivalence de Gibbs permet alors d'écrire la distribution de probabilité a priori  $P(\bar{D} = \bar{d}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_c(\bar{d})}{T}\right)$  où Z est une constante normalisatrice et T

un paramètre de pondération des contraintes appelé température par analogie avec un système de bain de chaleur en mécanique statistique.

La principale difficulté de la modélisation markovienne est d'introduire les observations afin d'obtenir la densité de probabilité a posteriori. Il est légitime d'écrire que les observations des déplacements sont les composantes de la vitesse parallèle au gradient:  $d_{xobs} = \frac{-I_x I_t}{I_x^2 + I_y^2}$ ,  $d_{yobs} = \frac{-I_y I_t}{I_x^2 + I_y^2}$  équations

tirées de la dfd (displaced frame difference) développée au premier ordre:  $dfd(i,j) = I_{xij} d_{xij} + I_{yij} d_{yij} + I_{tij} = 0$  où  $I_{xij}$ ,  $I_{yij}$ ,  $I_{tij}$  sont respectivement les dérivées au pixel (i,j) par rapport à l'axe des i, à l'axe des j, puis l'axe du temps (différence inter-image). Par la suite quand la confusion ne sera pas possible nous omettrons volontairement pour la clarté des formules les indice (i,j)

En émettant l'hypothèse que ces observations sont bruitées par un bruit gaussien à deux dimensions, il est possible, en utilisant la relation de Bayes de retrouver l'expression, obtenue par Dubois et Konrad [Kon 88], de la distribution a posteriori:

$$P(\bar{d}/obs.) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{T} \sum_{ij} \left[ T(I_x d_x + I_y d_y + I_t)^2 + \sum_{kl \in N_{ij}} \|\bar{d}_{ij} - \bar{d}_{kl}\|^2 \right] \right)$$

Cette modélisation permet donc de ramener par le biais de l'équivalence de Gibbs le problème initial à la minimisation d'une fonctionnelle énergétique dont l'expression est:

$$E = \sum_{xy} \left[ T(I_x d_x + I_y d_y + I_t)^2 + \sum_{kl \in N_{xy}} \|d_{xy} - d_{kl}\|^2 \right]$$

Le premier terme correspond au lien entre les observations (les gradients de l'intensité I), et les composantes du déplacement d, tandis que le deuxième terme représente la contrainte de régularité du champ de déplacement sur le voisinage  $N_{xy}$  considéré en chaque pixel de coordonnées (x,y).

**4. Stratégie de minimisation par relaxation déterministe**

Les algorithmes classiques de relaxation stochastique (recuit simulé et échantillonneur de Gibbs) sont optimaux pour la résolution de tels problèmes identifiés à la minimisation d'énergie d'un système physique, mais leur lourdeur en rend l'utilisation peu praticable. De nombreux auteurs [Pet 89], [Hér 91], [Bil 90], [Zha92] [Zer 90] se sont intéressés à des algorithmes déterministes inspirés de la théorie du champ moyen en physique statistique et simulant le comportement du recuit stochastique. A une température T donnée, le recuit simulé fait évoluer le système jusqu'à un quasi-équilibre thermodynamique. L'algorithme du recuit en champ moyen (MFA) consiste à simuler le comportement d'un système soumis à un recuit de façon déterministe, en écrivant que:  $\langle E(d) \rangle = E_{eq}(T)$ .

L'approximation en champ moyen permet d'écrire la proposition suivante:

Un système composé de N variables interagissant entre elles peut-être vu comme N systèmes à une variable dont les voisins sont gelés dans leur état moyen. Cette approximation permet d'écrire la simplification suivante:

$$\langle d_{x_{ij}} d_{x_{kl}} \rangle = \langle d_{x_{ij}} \rangle \langle d_{x_{kl}} \rangle \text{ et } \langle d_{x_{ij}} d_{y_{ij}} \rangle = \langle d_{x_{ij}} \rangle \langle d_{y_{ij}} \rangle$$

cette dernière approximation bien que surprenante si elle mise en relation avec les valeurs initiales de l'algorithme est cependant légitime, puisque rappelons-le, nous cherchons une solution dont les deux composantes soient les plus proches possible d'une indépendance linéaire. De ces deux approximations on tire alors l'énergie en champ moyen appliquée à chaque variable:

$$E_{ij}^{mf}(d_x) = E(d)_{d_{x_{kl}} = \langle d_{x_{kl}} \rangle, d_{y_{ij}} = \langle d_{y_{ij}} \rangle, kl \neq ij} = E_{ij}^{mf'} + R_{ij}^{mf} \quad \text{où le}$$

premier terme est une énergie contenant tous les potentiels dont les cliques font intervenir la variable  $d_x$ . Elle est appelée énergie en champ moyen locale. Le second terme regroupe les potentiels restants.

Par définition la distribution marginale de la variable  $d_x$  au site (i,j) est:

$$p(d_x) = Z^{-1} \int \dots \int \exp\left(-\frac{E}{T}\right) d(d_{x_{kl} \neq ij}) \quad \text{en utilisant les}$$

approximations du champ moyen cette distribution devient:

$$p^{mf}(d_x) = Z_x^{mf-1} \exp\left(-\frac{E_{ij}^{mf}(d_x)}{T}\right) = Z_x^{mf'-1} \exp\left(-\frac{E_{ij}^{mf'}(d_x)}{T}\right)$$

La valeur moyenne de la variable  $d_x$  est alors simplement tirée de sa loi de distribution marginale approximée. Après quelques calculs les équations itératives s'écrivent:

$$d_x^{n+1} = \frac{-I_x T(I_t + I_y d_y^n) + \sum_{kl \in N_{xy}} d_{x_{kl}}^n}{\pi_x^2 + 5}, \text{ une équation similaire étant}$$

obtenue pour la composante en y.

Le compromis entre minimisation de l'erreur de prédiction et cohérence du champ peut être en parti réglé par le choix de la valeur initiale du paramètre T. Cet algorithme itératif prend comme valeur initiale les observations. Classiquement le paramètre T diminue au cours des itérations. Pour un algorithme déterministe il a été montré qu'une loi de descente du type

$T^{n+1} = T^n * 0,975$  donnait le comportement souhaité à l'algorithme [Her91]. Pour mémoire Geman et Geman [Gem84] ont montré que la loi de descente optimale dans le cas d'un recuit stochastique est une loi de type logarithmique. La valeur initiale de  $T$  est quant à elle déterminée de façon empirique.

Dans les modélisations markoviennes des problèmes en images, des processus de lignes sont souvent introduits dans le but d'inhiber la contrainte de lissage du champ sur les discontinuités de l'image (contours des objets). Il est en théorie très facile d'introduire ces processus de lignes dans le modèle et la théorie du recuit en champ moyen s'applique de la même façon sur ces nouvelles variables. Comme en restauration d'images l'association d'un champ réel et d'un champ binaire ne pose aucun problème théorique et on obtient de la même façon des équations de mise à jour. Mais les paramètres du système deviennent très délicats à ajuster et il est en pratique très instable. On peut en fait s'affranchir des processus de lignes en choisissant en chaque pixel la dérivée spatiale dans chacune des deux directions comme celle des deux dérivées partielles à droite et à gauche qui possède la plus faible pente. Intuitivement on associe cela aux processus de lignes car ainsi la dérivée d'un pixel appartenant au bord d'un objet n'exprime pas le contour de l'objet mais bien la fin de l'objet. C'est une démarche inverse à ce qu'on ferait pour une détection de contours, qui nous a permis d'obtenir à la fois une meilleure cohérence sur le champ de mouvement et une réduction de l'erreur de prédiction.

## 5. Evaluation

### a. Boucle de codage sans perte.

Ces algorithmes appliqués à l'estimation de mouvement ont été évalués dans le cadre d'un schéma de codage prédictif sans pertes afin d'isoler les performances de l'estimation de mouvement elle-même de celles des autres composantes de l'algorithme.

Sur deux séquences (Train-calendrier, avec un ensemble de mouvements complexes, et Père Noël, avec un mouvement simple et localisé), les algorithmes suivants ont été testés avec les résultats (en entropie par pixel) donnés dans le tableau ci-dessous:

1. Différence inter-image directe sans compensation de mouvement.

2. Algorithme classique d'appariement de blocs, avec fenêtre de recherche  $\pm 7$  et blocs  $16 \times 16$ , en prenant en compte l'entropie de l'ensemble des vecteurs mouvement associés à chaque bloc.

3. Idem, avec uniquement l'entropie de l'erreur.

4. Algorithme classique de Horn et Schunk [Hor 81] dans une boucle inter-images causale.

Les 3 systèmes suivants utilisent les algorithmes globalement récursifs proposés. un variant avec recuit de l'algorithme ICM [Bes 86] et le recuit en champ moyen (MFA) ont été tous deux testés, avec des résultats équivalents en termes de performance. A noter, que le nombre d'opérations élémentaires pour l'ICM est plus important que celui du MFA.

5. Globalement récursif avec prédiction causale.

6. Le même que 5, basé sur représentation multirésolution (pyramide des moyennes).

7. Algorithme globalement récursif sur pyramide inséré dans un schéma non-causal. L'entropie donnée ne prend pas en compte le champ de mouvement ; doit être comparée à celle obtenue en 3.

	1	2	3	4	5	6	7
Train-calendrier	5.09	4.46	4.44	4.52	4.44	4.34	4.27
Père-Noël	4.42	4.256	4.254	4.46	4.27	4.28	4.19

On voit que les techniques proposées améliorent la qualité de la prédiction dans le cadre d'un schéma causal par rapport à des techniques plus simples comme Horn et Schunk (4). Le fait d'avoir un champ plus cohérent spatialement et temporellement grâce aux contraintes introduites dans la modélisation markovienne se traduit donc à la fois par une meilleure cohérence du champ par rapport à la structure géométrique de l'image, ce qui est apparent quand on le visualise, mais aussi par une meilleure prédiction dans le cadre d'un schéma de codage différentiel inter-images de type causal.

La multirésolution utilisée ici, bien que très simple, apporte de meilleurs résultats que la simple résolution, en particulier dans les séquences où les mouvements sont importants. Le gain serait sans doute moins important si le voisinage choisi avait été d'au moins huit pixels. La pyramide peut combler un déficit de performances dû à un choix de voisinage trop simple. Dans le cas de la séquence du "père Noël", où le mouvement est faible et localisé dans une petite zone, la pyramide n'apporte rien de mieux par rapport à l'algorithme de simple résolution. Le rôle de la pyramide est donc bien dirigé sur l'estimation du mouvement de plus forte amplitude, ce qui ne fait que confirmer les résultats obtenus par, entre autres, Perez et Heitz [Hei92].

Le voisinage temporel devrait apporter un gain significatif pour la cohérence du champ et donc pour la prédiction causale. Ceci est vrai pour certaines parties des séquences où le mouvement est continu. Dans le cas d'une contrainte temporelle nous avons remarqué un comportement de l'algorithme moins stable, le réglage de la valeur initiale de  $T$  est beaucoup plus difficile et il faudrait trouver un moyen d'auto-adapter cette valeur à chaque image. Pour ces raisons nous n'avons en pratique utilisé que le voisinage spatial. Une assez bonne robustesse de l'algorithme est alors obtenue. Ceci est constaté aussi bien pour les différentes images de la même séquence que entre les différentes séquences. Ceci peut s'expliquer par le fait que le paramètre  $T$  parcourant toute une plage de valeurs, le choix de la pondération des contraintes est moins critique que pour les techniques de régularisation classique (il est plus facile de déterminer empiriquement une zone de valeurs qu'une valeur particulière).

### b. Codeur complet.

L'évaluation entropique de l'algorithme vue précédemment justifie qu'il soit testé dans un schéma complet de codage. Le codeur utilisé est basé sur une décomposition en sous-bandes à l'aide de filtres QMF. La compensation de mouvement s'effectue dans un premier temps sur la basse fréquence puis sur l'image de pleine résolution. L'erreur de chacune des sous-bandes est ensuite quantifiée vectoriellement. Nous présentons ci-dessous les différents rapports de signal sur bruit obtenus pour différents taux de compression. Ces chiffres sont les moyennes effectuées sur dix images.

compression	15	20	25	30	35	40	80
SNR moyen	35	33,6	32,5	31,6	31	30,3	28

Ces valeurs moyennes masquent le phénomène de divergence de l'algorithme dû à la causalité du codeur. L'algorithme donne un très bon résultat sur la première image puis la qualité baisse un peu sur les 3 images qui suivent avant de se stabiliser asymptotiquement.

### c. Cohérence des champs de mouvement.

La cohérence des champs de mouvement obtenus s'évalue d'abord de manière qualitative. Les figures 2 à 4 (tirées de tests sur la séquence train-calendrier) permettent de constater





l'amélioration très nette de la cohérence du champ entre un appariement de blocs et l'algorithme proposé. On voit que ce dernier champ pourrait, à l'inverse des autres, être utilisé pour une segmentation de l'image discriminant les objets suivant leurs mouvements (segmentation spatio-temporelle). L'appariement pixel à pixel est un cas limite qui serait équivalent à une quantification scalaire, optimale du point de vue de la minimisation brute de l'erreur de prédiction si l'on ne tient pas compte du codage du champ. Le champ obtenu ainsi est dépourvu de toute cohérence et de tout lien avec un mouvement réel.

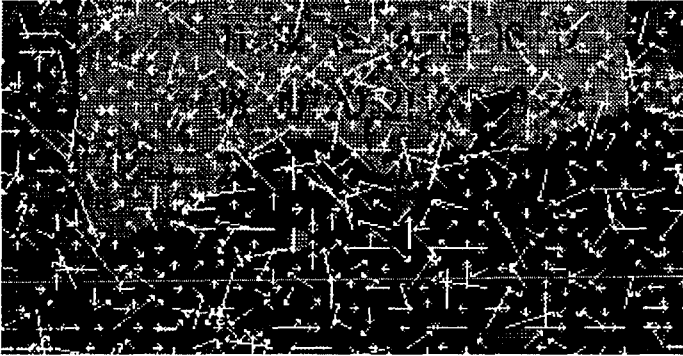


Figure 2 : Champ de déplacements par appariement pixel à pixel

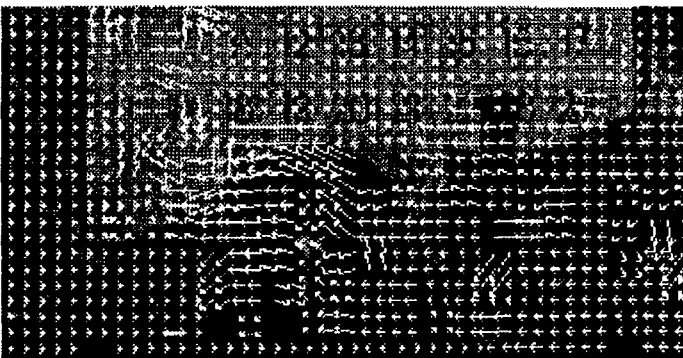


Figure 3 : Champ de déplacements par appariement de blocs 8x8

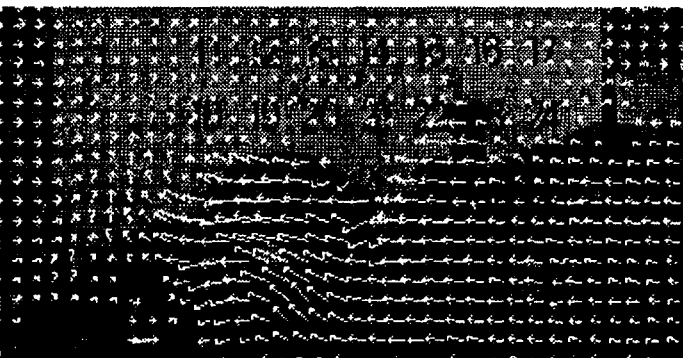


Figure 4 : Champ de déplacements par l'algorithme proposé

Une évaluation plus quantitative est possible si l'on observe que le champ est d'autant plus cohérent que la différence entre les erreurs de prédiction obtenues respectivement dans un schéma causal et non causal est faible. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus en appliquant le champ de mouvement obtenu par un appariement de blocs et par l'algorithme proposé (MFA avec structure pyramidale) à une prédiction causale puis à une prédiction non causale (résultats obtenus sur la séquence Train). Dans le cas non causal pour que la comparaison soit légitime nous n'avons pris en compte que les entropies d'erreur de prédiction. On voit clairement que l'algorithme proposé représente un compromis optimal entre cohérence du champ et minimisation de

l'erreur de prédiction, alors que les résultats sur ces deux objectifs sont inversement corrélés pour les algorithmes d'appariement de blocs. Là encore le cas extrême de l'appariement pixel à pixel est particulièrement significatif.

Algorithmes	MFA	bloc 16x16	bloc 8x8	bloc 1x1
non-causal	4,27	4,44	4,26	0,5
causal	4,33	4,51	4,46	5,04

## 6. Conclusion

Cette étude a démontré l'intérêt de techniques issues de la vision artificielle pour une utilisation évolutive dans un contexte de codage d'images, avec un avantage tout particulier pour le cas de systèmes basés sur une prédiction causale. Des applications potentielles existent plus généralement pour des filtrages spatio-temporels compensés en mouvement [Dub 92] généralisant la simple prédiction inter-images, comme on peut en utiliser par exemple pour du rééchantillonnage temporel ou du désentrelacement de signaux vidéo.

La justification première de l'utilisation de ces techniques est toutefois dans la perspective de systèmes de codage basés sur des régions 2D ou à plus long terme sur des modèles 3D. On peut imaginer que de tels systèmes utilisent une segmentation spatio-temporelle comme prétraitement systématique pour discriminer des zones qui pourraient être codées, soit paramétriquement avec un descripteur de mouvement global lié par exemple à un objet rigide, soit prédictivement pour les zones où un objet et un mouvement simples n'auraient pu être identifiés.

Ces algorithmes itératifs à contraintes locales s'implémentent par ailleurs très naturellement sur une architecture massivement parallèle à grain fin de type réseau cellulaire à maille carrée, qui peut être le commun dénominateur architectural d'un ensemble de prétraitements à appliquer dans les futurs systèmes avancés de codage d'images.

## Références

- [Bes 86] J. Besag, "On the statistical analysis of dirty pictures" *J.R. Statist. Soc. B*, pp 259-302, 1986.
- [Bil 92] G. L. Bilbro, W. E. Snyder, S. J. Garnier, J. W. Gault. "Mean field annealing: a formalism for constructing GNC-Like algorithm", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol 3, N° 1, pp 131-138, January 1992
- [Bou 88] P. Boutheymy : "Modèles et Méthodes pour l'Analyse du mouvement dans une séquence d'images", *TSI*, vol. 7 n° 6, pp. 527-546, 1988.
- [Dri 90] J.N. Driessen, R.A.F. Belfor, J. Biemond, "Backward Predictive Motion Compensated Image Sequence Coding", *Signal Processing V : Theories and Applications*, L. Torres, E. Masgrau, M.A. Lagunas (editors), 1990.
- [Dub 92] E. Dubois, "Motion Compensated Filtering of Time-Varying Images", *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 3, pp 211-239, 1992.
- [Gem 84] S. Geman and D. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images", *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-6, pp 721-741, 1984.
- [Hei 92] F. Heitz, P. Perez, P. Boutheymy, "Constrained Multiscale Markov Random Fields and the Analysis of Visual Motion", *Technical report n° 627*, IRISA, January 1992.
- [Her 91] L. Hérault, "Réseaux de neurones récurrents pour l'optimisation combinatoire. Application à la théorie des graphes et à la vision par ordinateur." *Thèse INPG*, 26 Février 1991.
- [Hor 81] B.K.P. Horn, B.G. Schunck, "Determining Optical Flow", *Artificial Intelligence*, vol 17, pp 182-203, 1981.
- [Kon 88] J. Konrad and E. Dubois, "Estimation of image motion fields: Bayesian formulation and stochastic solution", in *Proceedings ICASSP '88*, New York, 1988, pp.1072-1075.
- [Nic 91] M. Nickel, J. H. Husey, "A Hybrid Coder for Image Sequences Using Detailed Motion Estimates", in *Proceedings SPIE Vol.1605 Visual Communications and Image Processing '91 : Visual Communication*, pp 963-971, 1991.
- [Pet 89] C. Peterson, E. Hartman "Explorations of the mean field theory learning algorithm", *Neural Networks*, vol.2, pp.475-494, 1989.
- [Pog 85] T. Poggio, "Computational Vision and Regularization Theory", *Nature*, vol. 317, 26 September 1985.
- [Zer 90] J. Zerubia, R. Chellappa, "Mean Field Annealing for edge detection and image restoration", in *Signal Processing V : Theories and Applications*, L. Torres, E. Masgrau, M.A. Lagunas (editors), 1990.
- [Zha92] J. Zhang, "The Mean Field Theory in EM Procedures for Markov Random Fields", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol 40, No. 10, October 1992, pp. 2570-2583.