

MODES PROPRES DE FONCTIONNEMENT D'UN CONVERTISSEUR SIGMA-DELTA PASSE-BANDE

P.BENABES, A.GAUTHIER, R.KIELBASA

Service des Mesures de l'École Supérieure d'Électricité
 Plateau de Moulon 91192 GIF SUR YVETTE CEDEX
 Tel : 69 41 80 40 p 1419 Fax 60 11 10 59

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Nous présentons une étude de la résolution en régime temporel des équations du modulateur $\Sigma\Delta$ passe bande d'ordre 2. Le comportement de ce modulateur sera étudié en l'absence de signal d'entrée pour obtenir ses *modes propres de fonctionnement* et les *domaines propres* associés, puis avec des signaux d'entrée particuliers de faible amplitude (sinusoïdaux ou bruit blanc). Nous vérifierons que dans le cas d'un modulateur simple le bruit apporté par le comparateur n'a pas toujours les propriétés d'un bruit blanc comme on l'admet habituellement

We present in this paper a temporal resolution of the second order $\Sigma\Delta$ modulator equations. The modulator behaviour will be first studied without input signal to obtain his *natural modes* and the *associated natural domains*, then with low level particular input signals (sine wave or white noise). We will check than in the case of a second-order band-pass modulator, the quantization noise doesn't always behave like a white noise as it is generally assumed.

Ce travail est mené en collaboration avec Thomson Sintra ASM.

This work is done with Thomson Sintra ASM.

I. INTRODUCTION

Les convertisseurs analogique-numérique $\Sigma\Delta$ permettent des résolutions importantes (16 bits ou plus) bien qu'ils mettent en oeuvre des composants analogiques de faible précision.

Le principe de conversion $\Sigma\Delta$ peut non seulement être utilisé lorsque les signaux à convertir sont des signaux en bande de base, mais également lorsque les signaux sont centrés autour d'une fréquence centrale F_0 [1] à [5].

Plusieurs articles consacrés à la résolution mathématique des équations ont été publiés pour les modulateurs passe-bas d'ordre faible dans lesquels le bruit apporté par le comparateur ne se comporte pas comme un véritable bruit blanc [6] à [9].

Dans le cas du passe-bande, la complexité accrue des équations ne permet pas de mener aussi loin les calculs. Mais un certain nombre de résultats intéressants peuvent être obtenus sur les caractéristiques du bruit du comparateur.

II. LE MODULATEUR $\Sigma\Delta$ PASSE-BANDE

La structure d'un modulateur passe-bande est présentée

sur la figure 2.1.

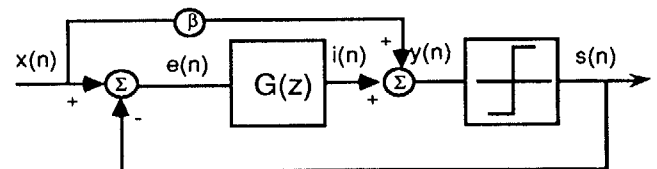


Fig 2.1: Principe du modulateur passe-bande

La transmittance G est de la forme :

$$G(z) = \frac{\alpha pz^{-1} - z^{-2}}{1 - pz^{-1} + z^{-2}} \quad (2.1)$$

$$\text{avec } 0 < \alpha < 1 \text{ et } p = 2 \cos \frac{2\pi F_0}{F_e} \quad (2.2)$$

$$\text{On posera par la suite } f_0 = \frac{F_0}{F_e} \quad (2.3)$$

La fonction de comparaison q se définit par

$$\begin{aligned} q(x) &= 1 \text{ si } x \geq 0 \\ q(x) &= -1 \text{ si } x < 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les équations du système s'écrivent :



$$\begin{cases} y(n) - py(n-1) + y(n-2) = \alpha px(n-1) - x(n-2) \\ \quad -(\alpha ps(n-1) - s(n-2)) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$s(n) = q(y(n) + \beta x(n)) \quad (2.6)$$

ou encore en utilisant la fonction de transfert de bruit

$$H(z) = \frac{1}{1 + G(z)} \quad (2.7)$$

$$H(y) = (1 - H)(x) + (H-1)(s) \quad (2.8)$$

$$s = q(y + \beta x) \quad (2.9)$$

La méthode adoptée consiste à résoudre l'équation linéaire (2.5) en supposant s périodique connue, puis à retenir les solutions y qui satisfont l'équation (2.6).

III. RÉOLUTION DES ÉQUATIONS

Les couples de solutions (y, s) obtenus pour un signal d'entrée nul ($x = 0$) seront appelées *solutions propres* du système : Chaque solution s périodique en régime établi définit un *mode propre*. L'ensemble des points dans le plan de phase de y associé à un mode propre constitue son *domaine propre*.

III.1 RÉOLUTION DE (2.5)

La solution de (2.5) pour $x = 0$ est somme de 2 termes, y_p solution générale de l'équation sans second membre, et y_s solution particulière de l'équation avec second membre :

- y_p qui dépend uniquement de la fréquence centrale du filtre, n'est périodique que pour des valeurs fractionnaires de cette fréquence centrale. Ce terme, indépendant de la sortie s , peut être assimilé à une *énergie interne* emmagasinée dans le modulateur. On a :

$$y_p(n) = \lambda \cos(2\pi f_0 n + \phi) \quad (3.1)$$

- y_s qui est directement lié à la forme du signal de sortie s du modulateur.

On rappelle que l'on cherche s sous forme d'une fonction périodique de période m pouvant prendre uniquement les valeurs $+1$ ou -1 . Elle se décompose sous forme de somme de fonctions périodiques sinusoïdales :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cos\left(\frac{2k\pi n}{m} + \phi_k\right) \quad (3.2)$$

$$\text{avec } a_k e^{j\phi_k} = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} s(n) e^{-\frac{2jk\pi n}{m}} \quad (3.3)$$

Dans ces conditions, la solution y est de la forme :

$$y_s(n) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k \cos\left(\frac{2k\pi n}{m} + \phi_k + \theta_k\right) \quad (3.4)$$

avec, en posant $\gamma = \frac{2k}{m}$,

$$b_k = a_k \frac{\sqrt{(\cos(\gamma\pi) - \alpha p)^2 + \sin^2(\gamma\pi)}}{2 \cos(\gamma\pi) - p} \quad (3.5)$$

$$\text{et } \theta_k = \frac{\sin(\gamma\pi)}{\alpha p - \cos(\gamma\pi)} \quad (3.6)$$

III.2 CONDITION SUR LES SOLUTIONS DE (2.5) & (2.6)

Nous allons montrer que si y_s est la transformée de s par les équations (3.2) à (3.6), et que $s \neq q(y_s)$, alors s ne pourra jamais être solution du système (2.5) & (2.6), et nous allons déterminer l'ensemble des solutions y correspondant à s dans le cas où : $s = q(y_s)$

* Premier cas : si $s \neq q(y_s)$

On pourra s'assurer, mais la démonstration rigoureuse ne sera pas donnée ici, que toute solution $y = y_s + y_p$ vérifiera au moins pour un point n_0 , $s(n_0) \neq q(y_s(n_0))$.

En effet, si f_0 est irrationnelle, $\cos(2\pi f_0(mn + n_0) + \phi)$ est dense dans $[-1, 1]$, et il existera toujours une valeur de n quel que soit λ pour que

$$s(mn + n_0) \neq q(y_s(mn + n_0) + \lambda \cos(2\pi f_0(mn + n_0) + \phi))$$

Si f_0 est rationnelle, la démonstration utilise le fait que s et y_s qui sont périodiques ne contiennent pas de composante à la fréquence f_0 (2.8) & (3.5).

Donc si s et y_s solution associée ne sont pas du même signe, s ne pourra jamais être solution de l'ensemble des équations (2.5) & (2.6)

* Deuxième cas : si $s = q(y_s)$.

Il existe au moins une solution : y_s vérifiant (2.5) et (2.6) pour s donnée.

$$\text{On posera } \delta = \min(|y_s(n)|) \quad (3.7)$$

Toute fonction $y = y_s + y_1$, vérifiant (2.5), telle que $\max(|y_1(n)|) < \delta$, vérifiera aussi (2.6). (cf. fig 3.1)

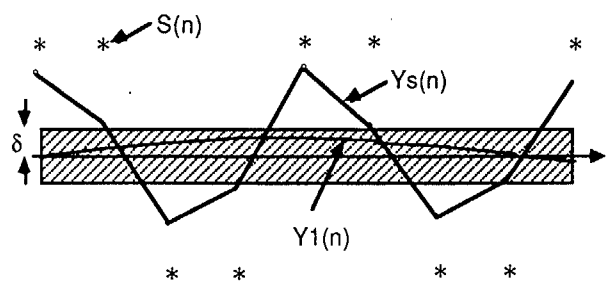


Fig 3.1: cas où s et y_s sont de même signe

Toute fonction y_1 dont les valeurs se situent dans la zone hachurée, ajoutée à y_s ne changera pas le signe de y .

On sait que la solution générale de (2.3) est de la forme $y = y_s + \lambda \cos(2\pi n f_0 + \phi)$. Si $|\lambda| < |\delta|$ alors y sera solution

de (2.6) quel que soit ϕ .

Si f_0 n'est pas rationnel (ce qui sera forcément le cas pour un modulateur réel), alors $y_1 = \lambda \cos(2\pi n f_0 + \phi)$ prendra toutes les valeurs possibles entre $-\lambda$ et λ . Donc le domaine solution sera $-\delta < \lambda < \delta \forall \phi$.

Si f_0 est rationnel (cas idéal), alors $y_1 = \lambda \cos(2\pi n f_0 + \phi)$ prendra un nombre fini de valeurs fonction de ϕ . Il existera donc une valeur λ_ϕ pour chaque ϕ , amplitude maximale de la solution, qui vérifiera $\lambda_\phi \geq \delta$

IV. LES DOMAINES PROPRES

La solution s , correspondant à un couple de conditions initiales $y(0)$ et $y(1)$, peut être obtenue par calcul de la suite y à partir des équations (2.3) et (2.4).

Le domaine propre associé à chaque mode propre se détermine ensuite analytiquement.

Les figures 4.1 & 4.2 donnent quelques domaines propres associés aux modes propres les plus simples (période inférieure à 5). Ces derniers ont été calculés par simulation du comportement du convertisseur pour un grand nombre de points du plan uniformément répartis.

Pour des fréquences faibles ($2f_0 < 0.25$) toutes les conditions initiales aboutissent à des solutions s de période faible (2, 4, 5 ou 6) ou plus élevées mais dans des domaines de très faible taille. Dans la zone $\frac{1}{4} \leq 2f_0 < \frac{1}{3}$, et

$\frac{1}{3} \leq 2f_0 < \frac{1}{2}$ il apparaît des solutions s de plus grandes périodes autour des domaines précédemment cités. Plus la fréquence se rapproche de $1/3$, plus les périodes sont grandes. On peut aboutir à des périodes minimales extrêmement grandes (supérieures à 60).

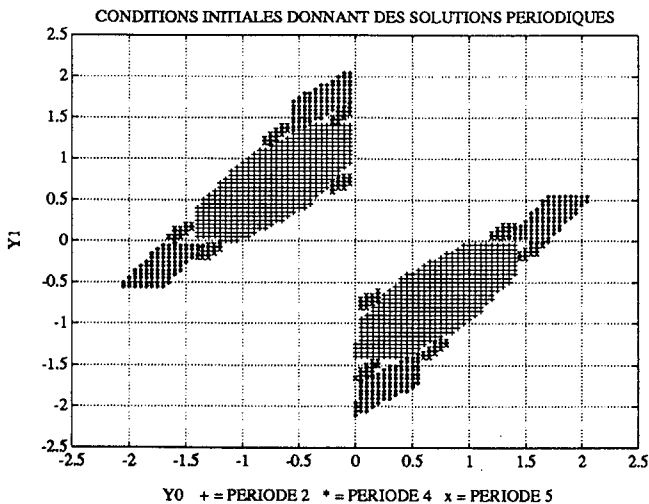


Fig. 4.1: domaine propre pour $f_0=1/8$ & $\alpha=1$

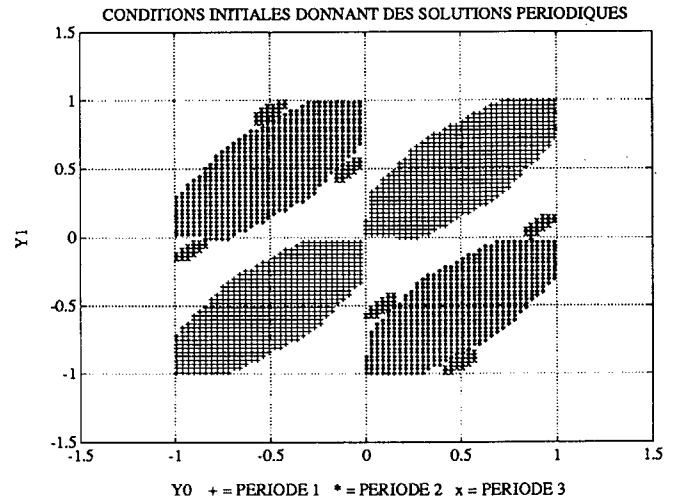


Fig. 4.2: domaine propre pour $f_0=1/8$ et $\alpha=0.5$

V Comportement du modulateur pour des entrées non nulles particulières

Les figures 5.1 à 5.3 montrent le comportement du signal y dans le plan de phase, pour des modulateurs idéaux étudiés dans deux cas : signal d'entrée sinusoïdal de fréquence f_0 de faible amplitude puis bruit blanc de niveau modéré. Les domaines propres des figures 5.1 & 5.2 ont aussi été représentés sur les trois figures, ainsi que le début d'une trajectoire sur la figure 5.3.

Lorsque le signal d'entrée est de faible amplitude, la trajectoire dans le plan de phase de y peut rester pendant une durée assez longue dans un domaine propre, provoquant alors une sortie périodique, puis brusquement changer de domaine.

Pour un signal d'entrée quelconque d'amplitude forte, la trajectoire de y dans le plan de phase passe rapidement d'un domaine à un autre.

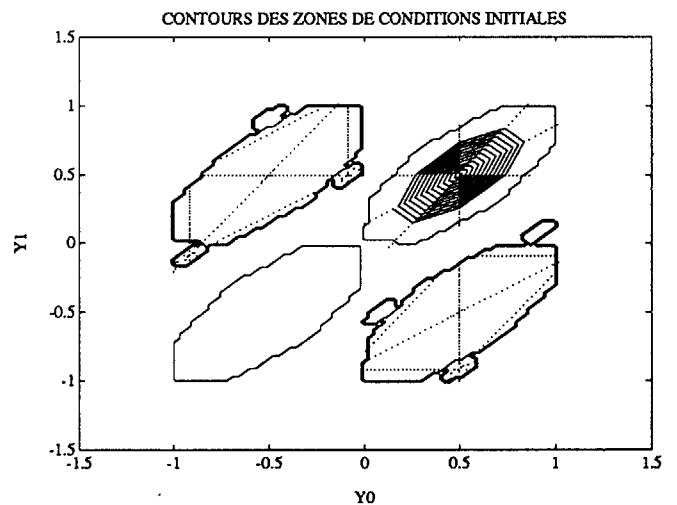


Fig. 5.1 : Réponse dans le plan de phase, du modulateur avec $\alpha=0.5$ pour une entrée sinusoïdale d'amplitude 0.001.

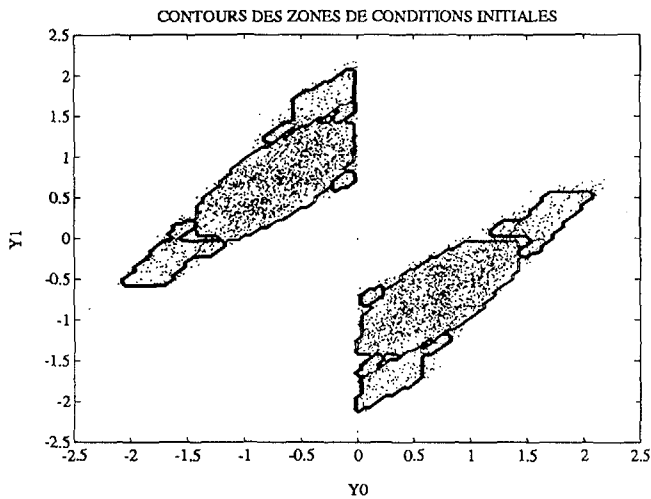


Fig. 5.2: Réponse dans le plan de phase du modulateur avec $\alpha=1$ pour une entrée en bruit blanc d'amplitude 0.1.

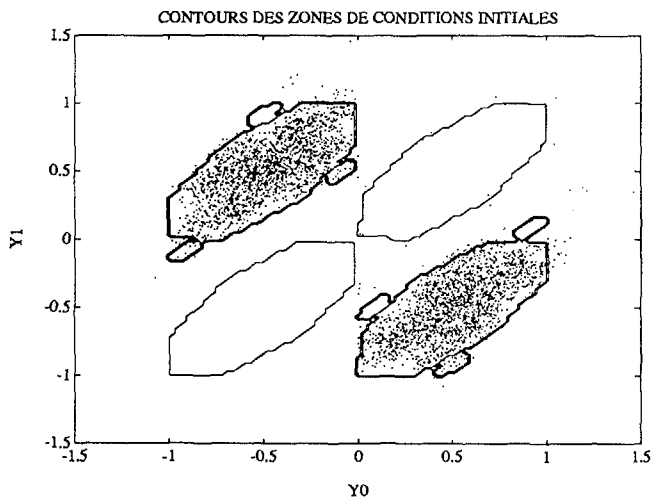


Fig. 5.3: Réponse dans le plan de phase du modulateur avec $\alpha=0.5$ pour une entrée en bruit blanc d'amplitude 0.1

VI CONCLUSION

Nous avons montré que le modulateur $\Sigma\Delta$ passe-bande d'ordre 2 présente en l'absence de signaux d'entrée des modes propres et des domaines propres de fonctionnement. Ces modes propres sont aussi caractéristiques du comportement du modulateur en présence de signal. L'application de ce dernier fait apparaître sur la sortie des sauts de fréquence liés au passage d'un mode propre à un autre. Nous avons ainsi montré que pour un modulateur passe-bande d'ordre 2, le bruit du comparateur ne peut être rigoureusement assimilé à un bruit blanc.

Cependant la modélisation du bruit de quantification par un bruit blanc permet pour certains types de signaux d'entrée, de traduire le comportement réel du modulateur.

Le modulateur d'ordre 2 que nous venons d'étudier ne peut

être utilisé tel quel dans un convertisseur $\Sigma\Delta$ car ses irrégularités de fonctionnement conduisent à des performances insuffisantes pour la plupart des applications. Cependant, il pourra être inclus dans une structure associant par exemple, plusieurs modulateurs en cascade afin d'obtenir un modulateur composite d'ordre plus élevé. Ces structures seront présentées dans un article ultérieur.

Références

- [1] R.Schreier, M.Snelgrove, "Bandpass sigma-delta modulation", *Electronics letters*, 25/23, 1560-1561, 09/11/89
- [2] Li Ping, "Oversampling analog/digital converters with finite zeros in noise shaping functions", *IEEE ISCAS 91*, 1645-1648, 04/91
- [3] D.H.Horrocks, "A second order oversampled sigma-delta modulator for bandpass signals", *IEEE ISCAS 91*, 1653-1656, 04/91
- [4] A.M.Thurston T.H.Pearce & M.J.Hawksford, "Bandpass implementation of the sigma delta a-d conversion technique", *IEE UK MEETING, D/A&A/D*, 81-86, 17/09/91
- [5] Z.X.Zhang G.C.Temes Z.Czarnul, "Bandpass $\Sigma\Delta$ A/D using two-path multibit structure", *Electronic letters*, 27/22, 2008-2009, 24/10/91
- [6] R.Gray, "Oversampled sigma-delta modulation", *IEEE Communications*, 35/5, 481-488, 05/87
- [7] V.Friedman, "The structure of the limit cycles in sigma delta modulation", *IEEE communications*, 36/8, 972-979, 08/88
- [8] J.C.Kieffer, "Analysis of dc input response for a class of one bit feedback encoders", *IEEE communications*, 38/3, 337-340, 03/90
- [9] H.Wang, "A geometric view of $\Sigma\Delta$ modulations", *IEEE circuit & systems, CAS39*, 402-405, 06/92