

INCLUSION DE NOUVELLES DONNÉES AUX PROBLÈMES DE TRAJECTOGRAPHIE.

Claude JAUFFRET (1), Jean-Pierre LE CADRE, Olivier TRÉMOIS (2)

(1) CERDSM/DCN, Le Brusc, 83140, Six-Fours-les-plages - France

(2) IRISA/CNRS, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex - France

RÉSUMÉ

On se préoccupe ici de l'analyse spatio-temporelle d'une source mobile et plus particulièrement de l'estimation des paramètres caractérisant sa trajectoire. On montre qu'il est possible de remplacer la notion de gisement instantané par celle de trajectoire (approximée). On étudie ici l'inclusion de ces nouvelles données aux problèmes de trajectographie.

1. INTRODUCTION

Les méthodes de trajectographie ont pour objet d'estimer la trajectoire d'un mobile à partir des sorties de capteurs. Dans le cadre de l'écoute passive, l'étape de trajectographie constitue une étape relevant du traitement de l'information. Elle est habituellement basée sur une suite de gisements estimés, obtenus eux-mêmes par les étapes de traitement d'antenne, de poursuite, d'association de données.

Les performances de toute méthode de trajectographie sont conditionnées par les statistiques (biais, variance) des gisements estimés qui sont elles-mêmes fortement dépendantes du temps d'intégration (étape de traitement d'antenne). Pour une source unique, de trajectoire connue, le temps optimal d'intégration peut-être calculé [1]. Il dépend fortement de la cinématique (inconnue dans la pratique) de la source.

Aussi, les méthodes actuelles de trajectographie utilisent des données estimées sur un temps court. Pour des sources suffisamment distantes de l'antenne, il est possible de modéliser simplement les non-stationarités induites (au niveau du traitement d'antenne) par le mouvement des sources. Ceci conduit à considérer une analyse spatio-temporelle utilisant directement les statistiques des sorties de capteurs. On dispose alors de nouvelles données (i.e. les \hat{k}_t , k_t : fréquence spatiale) modélisant les trajectoires estimées des sources sur des temps longs.

Des méthodes d'estimation de ces paramètres de défilement angulaire ont été considérés précédemment [3]. Dans le cadre de cette analyse spatio-temporelle, la notion de trajectoire remplace celle de gisement instantané pour l'analyse spatiale classique. On se restreint ici à l'extension des méthodes de trajectographie à ces nouvelles données. L'accent étant particulièrement mis sur l'étude de l'amélioration des performances induites par l'inclusion de ces nouvelles données.

2. UN MODÈLE SIMPLIFIÉ DE SOURCE EN MOUVEMENT.

On considère une source animée d'un mouvement rectiligne uniforme. Les coordonnées de la source à un instant de

ABSTRACT

This paper deals with spatio-temporal analysis of a moving source and more particularly with the estimation of source motion parameters. A natural way to overcome the stationarity problems consists in replacing the instantaneous bearings by the notion of trajectory. Thus, new data are included to the target motion analysis.

référence (i.e r_{xs}, r_{ys}) ainsi que sa vitesse (i.e v_{xs}, v_{ys}) définissent l'état de la source qui est résumé par le vecteur (d'état) X_s :

$$X_s \triangleq [r_{xs}, r_{ys}, v_{xs}, v_{ys}]^t;$$

l'état de l'observateur (antenne) est défini, de manière similaire, par:

$$X_o \triangleq [r_{xo}, r_{yo}, v_{xo}, v_{yo}]^t.$$

Aussi, le problème est modélisé en termes de vecteur d'état relatif X par les équations ci-dessous [2]:

$$\begin{aligned} X(t_k) &= \Phi(t_k, t_{k-1})X(t_{k-1}) + U(t_k) \\ \Phi(t_k, t_{k-1}) &= \begin{pmatrix} \text{Id} & (t_k - t_{k-1})\text{Id} \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}, \text{Id} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{et: } X &= X_s - X_o. \end{aligned} \tag{1}$$

Les données usuelles sont les gisements $\hat{\theta}_t$ (définis par rapport à l'antenne) où les fréquences spatiales estimées \hat{k}_t définies par:

$$\begin{aligned} \hat{k}_t &= k_t + \nu_t, \quad k_t = \cos \theta_t / \lambda \quad (\lambda : \text{longueur d'onde}) \\ \theta_t &= \tan^{-1}(r_x(t)/r_y(t)) \\ \nu_t &: \text{bruit d'observation.} \end{aligned} \tag{2}$$

Le bruit additif ν_t est habituellement [2] considéré blanc, gaussien et de variance donné par la formule de Woodward (cas d'une source isolée), i.e.:

$$\sigma_\nu^2 = \frac{3(1+p\rho)(2N-1)}{\rho^2 p^2 (p^2 - 1) \pi^2 d^2 N(N+1)} \tag{3}$$

avec:

ρ : rapport signal sur bruit

p : nombre de capteurs de l'antenne (linéaire)

N : Nombre de snapshots (ou d'intégrations)



d: Distance intercepteurs.

Manifestement le choix de N influe grandement sur les performances des méthodes de trajectographie. Cependant, la valeur N_{opt} dépend de la trajectoire relative (inconnue) de la source. Aussi est-il recommandé de choisir N petit, surtout si p est assez grand.

Dans le but de formaliser une véritable analyse spatio-temporelle, un nouveau paramètre (\dot{k} : le défilement angulaire) va être introduit.

Le temps d'échantillonnage δT correspond à un snapshot, tandis que le vecteur vitesse relatif est supposé constant entre deux insatnts consécutifs. Notons les deux relations trigonométriques élémentaires (cf. figure 1):

$$\begin{aligned} r_t \sin \theta_t &= r_0 \sin \theta_0 + tv\delta T \sin \gamma \\ r_t^2 &= r_0^2 + (tv\delta T)^2 + 2tr_0v\delta T \cos(\theta_0 - \gamma) \\ \text{avec : } \cos \gamma &= v_y/v \text{ et } \sin \gamma = v_x/v \\ &(\gamma : \text{cap relatif de la source}). \end{aligned} \quad (4)$$

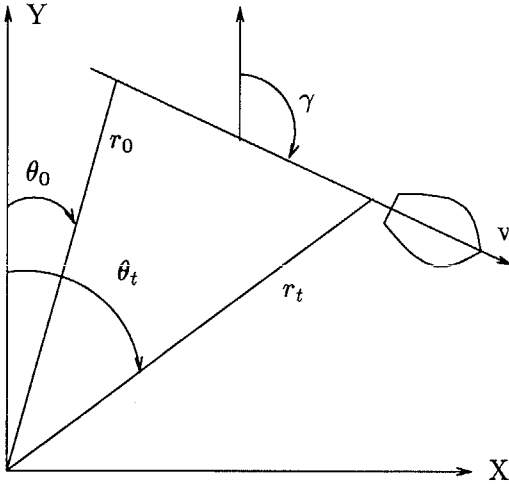


Figure 1: Situation géométrique.

Notant k_t la fréquence spatiale instantannée, on déduit de (4) l'égalité suivante:

$$k_t = \frac{\cos \theta_0 + x \cos \gamma}{\lambda(1 + 2x \cos(\theta_0 - \gamma) + x^2)^{1/2}} \text{ avec } x = \frac{tv\delta T}{r_0} \quad (5)$$

Pour une source suffisamment lointaine, l'incrément x est petit (devant 1) et on considère alors le développement à l'ordre 1 de k_t [3], soit:

$$\begin{aligned} k_t &\stackrel{1}{=} k_0 + t\dot{k} \\ \text{avec : } \dot{k} &= [\cos \gamma - \cos \theta_0 \cos(\theta_0 - \gamma)] \frac{v\delta T}{r_0} \\ &= \sin \theta_0 \sin(\theta_0 - \gamma) v \frac{\delta T}{r_0} \end{aligned} \quad (6)$$

La validité de cette approximation dépend de la distance de la source. Pour les applications pratiques elle est généralement valide ($r \geq 10km$) sur une "jambe". On déduit de (6) l'expression suivante de \dot{k} :

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \left[\frac{v_x}{v} - \left(\frac{v_y}{v} \frac{r_y}{r_0} + \frac{v_x}{v} \frac{r_x}{r_0} \right) \right] \cdot \frac{v\delta T}{\lambda r_0} \\ &= \frac{r_y}{\lambda r_0^3} [r_y v_x - r_x v_y] \delta T. \end{aligned} \quad (7)$$

L'expression ci-dessus de \dot{k} (7) constitue la base des calculs qui vont suivre. Utilisant les notations de [2], il vient (t_m temps de référence):

$$\begin{aligned} r_x(t_j) &= r_x(t_m) + (t_j - t_m)v_x(t_m) \\ r_y(t_j) &= r_y(t_m) + (t_j - t_m)v_y(t_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x(t_m) &= v_{xs}(t_m) - v_{xo}(t_m) \\ v_y(t_m) &= v_{ys}(t_m) - v_{yo}(t_m) \end{aligned}$$

et, de plus:

$$\begin{aligned} v_x(t_j) &= v_x(t_m) + (v_{xo}(t_m) - v_{xo}(t_j)) \\ &= v_x(t_m) + \alpha_x(t_j) \\ v_y(t_j) &= v_y(t_m) + \alpha_y(t_j). \end{aligned} \quad (8)$$

α_x et α_y ne dépendent que des manœuvres de l'observateur et sont donc connus. Le vecteur d'état est maintenant X_m ($X_m = [r_x(t_m), r_y(t_m), v_x(t_m), v_y(t_m)]^t$). Alors d'après (7) et (8), on obtient:

$$\dot{k}_j = \frac{r_y(t_j)}{\lambda r_j^3} [r_y(t_j)v_x(t_j) - r_x(t_j)v_y(t_j)] \delta T$$

et l'expression suivante du vecteur gradient de \dot{k}_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{k}_j}{\partial r_x(t_m)} &= -\frac{\cos \theta_j \delta T'}{\lambda r_j^2} [v_y(t_j)(1 - 3 \sin^2 \theta_j) \\ &\quad + v_x(t_j)(3 \sin \theta_j \cos \theta_j)] \\ \frac{\partial \dot{k}_j}{\partial r_y(t_m)} &= -\frac{\delta T}{\lambda r_j^2} [v_x(t_j) \cos \theta_j (1 - 3 \sin^2 \theta_j) \\ &\quad + v_y(t_j) \sin \theta_j (1 - 3 \cos^2 \theta_j)] \\ \frac{\partial \dot{k}_j}{\partial v_x(t_m)} &= \frac{\cos^2 \theta_j \delta T}{\lambda r_j} \\ &\quad - (t_j - t_m) \frac{\cos \theta_j \delta T}{\lambda r_j^2} [v_y(t_j)(1 - 3 \sin^2 \theta_j) \\ &\quad + v_x(t_j)(3 \sin \theta_j \cos \theta_j)] \\ \frac{\partial \dot{k}_j}{\partial v_y(t_m)} &= \frac{\sin \theta_j \cos \theta_j \delta T}{\lambda r_j} \\ &\quad - (t_j - t_m) \frac{\cos \theta_j v \delta T}{\lambda r_j^2} [v_x(t_j) \cos \theta_j (1 - 3 \sin^2 \theta_j) \\ &\quad + v_y(t_j) \sin \theta_j (1 - 3 \cos^2 \theta_j)] \\ \text{avec : } \cos \theta_j &\triangleq \frac{r_y(t_j)}{r_j} \text{ et } \sin \theta_j \triangleq \frac{r_x(t_j)}{r_j} \end{aligned} \quad (9)$$

L'expression ci-dessus constitue la base de l'inclusion des $\{\dot{k}\}$ aux méthodes de trajectographie. Nous allons maintenant brièvement rappeler les propriétés statistiques des \hat{k} [3].

3. SUR L'ESTIMATION DES PARAMÈTRES $\{\hat{k}\}$ ET DE LA TRAJECTOIRE DE LA SOURCE.

Si on considère le modèle linéaire (6) de k_t , les bornes inférieures de la variance d'estimation de k_0 et \dot{k} prennent la forme ci-dessous:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{k}_0) &\geq \frac{3(1+p\rho)(2N-1)}{\rho^2 p^2 (p^2-1) \pi^2 d^2 N(N+1)} \\ \text{var}(\hat{k}) &\geq \frac{18(1+p\rho)}{\rho^2 p^2 (p^2-1) \pi^2 d^2 (N^3-N)} \end{aligned} \quad (10)$$

Cette formule montre que la variance de \hat{k}_0 dépend de N par un facteur $1/N$, tandis que celle de \hat{k} en dépend par un facteur $1/N^3$. Mais l'intérêt de l'introduction des paramètres \hat{k} vient avant tout de l'estimation séparée des \hat{k}_0 et des \hat{k} . En effet, si on note $y(t,m)$ les covariances spatio-temporelles, celles-ci sont modélisées par:

$$X(t+1, m) = F_1^m X(t, m) \quad (11)$$

$$X(t, m+1) = F_0 F_1^t X(t, m) \quad (12)$$

$$y(t, m) = h^* X(t, m) + w(t, m)$$

$$\text{avec: } F1 = \text{diag} \left(\exp(2i\pi k_1), \dots, \exp(2i\pi k_s) \right).$$

L'équation (11) est à la base de l'estimation des $\{\hat{k}_i\}_{i=1}^s$ qui peut être réalisée indépendamment de celle des $\{k_{0,i}\}_{i=1}^s$. Les algorithmes de trajectographie sont étendus sans difficulté aux nouvelles données (les \hat{k}) grâce aux équations (9). On considère la maximisation de la vraisemblance conditionnelle au vecteur d'état X_{t_m} , soit:

$$p(\hat{\mathcal{K}}|X) = \text{const.} \exp \left[-\frac{1}{2} (\hat{\mathcal{K}} - \mathcal{K})^t W (\hat{\mathcal{K}} - \mathcal{K}) \right]$$

$$\text{avec : } \hat{\mathcal{K}} \triangleq \begin{pmatrix} \hat{K} \\ \text{---} \\ \hat{K} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(X) \triangleq \begin{pmatrix} K(X) \\ \text{---} \\ \dot{K}(X) \end{pmatrix}$$

(W : déduite de (10))

$$\hat{K} = (\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_N)^t, \quad \dot{K} = (\dot{k}_1, \dots, \dot{k}_L)^t \quad (13)$$

La fonctionnelle de vraisemblance est ensuite maximisée grâce à un algorithme de Gauss-Newton qui prend la forme usuelle [2]:

$$X_{l+1} = X_l - s_l \left[\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \right)^t W^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \right) \right]^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \right)^t W^{-1} (\hat{\mathcal{K}} - \mathcal{K}) \quad (14)$$

Alors la matrice de Fisher relative à l'estimation du vecteur X_{t_m} s'écrit:

$$FIM = \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \right)^t W^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \right)$$

où la matrice W est approximée par:

$$\begin{aligned} W &= \text{bloc diag}(\sigma_k^2 \text{Id}_N, \sigma_k^2 \text{Id}_L) \\ &= FIM(K) + FIM(\dot{K}). \end{aligned} \quad (15)$$

Le calcul des matrices $FIM(K)$ et $FIM(\dot{K})$ s'effectue sans difficulté et on obtient [2]:

$$FIM(K) = \frac{1}{(\sigma_k r \lambda)^2} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} \Omega_i & (i-m)\Omega_i \\ (i-m)\Omega_i & (i-m)^2 \Omega_i \end{pmatrix}$$

$$\text{avec: } \Omega_i = \cos^2 \theta_i \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_i & -\frac{1}{2} \sin 2\theta_i \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta_i & \sin^2 \theta_i \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Simultanément, sous l'hypothèse de grande distance, on a:

$$FIM(\dot{K}) = \frac{1}{(\sigma_k r \lambda)^2} \sum_{j=1}^L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega'_j \end{pmatrix}$$

$$\text{avec: } \Omega'_j = \cos^2 \theta_j \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_j & -\frac{1}{2} \sin 2\theta_j \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta_j & \sin^2 \theta_j \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Cette expression prouve, qu'en première approximation, l'amélioration apportée par l'inclusion des \hat{k} aux données, porte sur l'estimation du vecteur vitesse de la source. Ce point va maintenant être développé pour un cas particulier: la semi-azimétrie.

4. ÉTUDE DES PERFORMANCES EN SEMI-AZIMÉTRIE.

L'utilisation d'une antenne de grande longueur peut sérieusement réduire les possibilités de manœuvre de l'écouteur. On considère alors que l'écouteur suit un mouvement rectiligne uniforme. Le problème de trajectographie n'est alors plus observable [2], aussi considère-t-on le vecteur d'état partiel:

$$X_{m,p} = [r_y(t_m), v_x(t_m), v_y(t_m)]^t$$

On a considéré l'analyse de divers scénarios tels que celui présenté ci-dessous. L'écouteur est fixe (origine), la trajectoire de la source (MRU) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (le nord), la distance r est supposée constante (cf. figure 2), $\theta_c = 0$.

Le calcul de la matrice de Fisher conduit alors aux résultats ci-dessous (utilisation de \hat{K}):

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{r}_y) &\simeq \frac{9}{4} \sigma_\theta^2 N^{-1} (\text{bas})^2 \\ \text{var}(\hat{v}_x) &\simeq 57 \sigma_\theta^2 N^{-3} r^2 \\ \text{var}(\hat{v}_y) &\simeq 180 \sigma_\theta^2 N^{-3} \left(\frac{r}{\text{bas}} \right)^2 r^2 \end{aligned} \quad (18)$$

avec: $\text{bas} \triangleq N v \sin \gamma$ (= baseline).

De même, le calcul de la matrice $FIM(\dot{K})$ permet d'obtenir les approximations suivantes de $\text{var}(\hat{v}_x)$ et $\text{var}(\hat{v}_y)$:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{v}_x) &\simeq 3 \sigma_\theta^2 N^{-3} r^2 \left(\frac{7L^2 - 4}{4L(L^2 - 1)} \right) \\ \text{var}(\hat{v}_y) &\simeq 3 \sigma_\theta^2 N^{-3} \left(\frac{r}{\text{bas}} \right)^2 r^2 \left(\frac{3L^4}{L^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

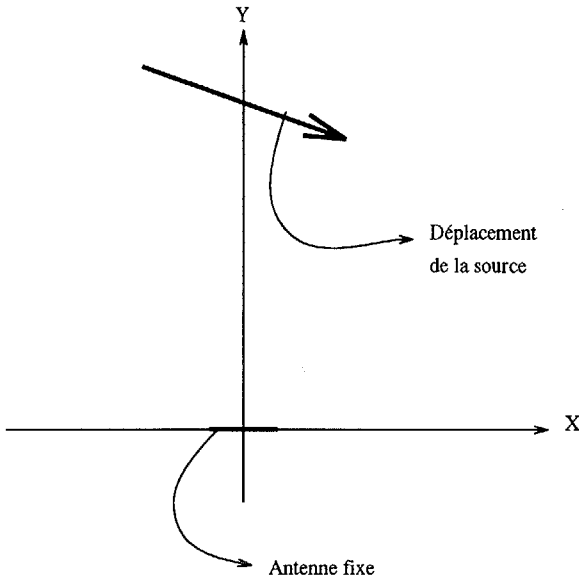


Figure 2: Scénario de base.

On voit d'après (19) que L doit être choisi aussi petit que possible, ce qui est cependant limité par la validité de l'approximation (6) de k_t . Des calculs analogues ont été développés pour une autre valeur de θ_c ($\theta_c = \pi/4$), conduisant aux approximations suivantes:

$$\hat{K} \quad \text{var}(\hat{r}_y) \simeq \frac{27}{7} \sigma_\theta^2 N^{-1} r^2$$

$$\text{var}(\hat{v}_x) \simeq \text{var}(\hat{v}_y) \simeq \frac{6}{7} 90 \sigma_\theta^2 N^{-3} \left(\frac{r}{bas}\right)^2 r^2 \quad (20)$$

$$\hat{K} \quad \text{var}(\hat{v}_x) \simeq \text{var}(\hat{v}_y) \simeq \lambda \sigma_k^2 \left(\frac{r}{bas}\right)^2 r^2 \left(\frac{3L}{L^2 - 1}\right) \quad (21)$$

avec: $bas \triangleq Nv \sin(\gamma - \theta_c)$ (= baseline).

Les formules (18),(19),(20),(21) montrent que l'inclusion des $\{\hat{k}\}$ aux données permet de réduire sensiblement la variance d'estimation de la vitesse de la source. Ceci est confirmé par des résultats de simulation. Ainsi pour des configurations réalistes, l'inclusion de ces données permet de diviser par des facteurs allant jusqu'à 10 l'écart-type de l'estimée de la vitesse de la source.

5. SIMULATION.

De nombreuses simulations ont été menées, donnant toutes des résultats très positifs. L'une d'entre-elles est présentée ci-dessous. Une antenne de 32 capteurs se déplace en mouvement rectiligne uniforme pendant 1600s, à la vitesse de 5m/s sur l'axe des abscisses en partant de l'origine. Pendant cette durée, le porteur estime 120 gisements et 4 \hat{k} . Dans ce scénario, la source est proche du travers de l'antenne. À $t = 0$ elle se trouve aux coordonnées (10km,40km) et se déplace à la vitesse de 1m/s sur l'axe des abscisses et à 7m/s sur l'axe des ordonnées. À -20dB l'écart-type d'observation du gisement observé $1,6^\circ$ (la source évolue autour du gisement $8,6^\circ$), celui du \hat{k} vaut $1,45 \cdot 10^{-5}$ pour une valeur moyenne de $-2,7 \cdot 10^{-5}$.

Les tableaux ci-dessous montrent bien une amélioration due à l'introduction des \hat{k} dans notre algorithme. Le gain obtenu

pour la composante de vitesse ($r_y(t_m)$) est moins important que pour les composantes de vitesse (v_x, v_y). Le \hat{k} apportant une information sur la dynamique de la source, il semble normal qu'il agisse principalement sur les composante du vecteur d'état du même type. Le rapport 5 ou 6 obtenus sur les écarts-types d'estimation des vitesses est représentatif des améliorations généralement obtenues.

$\rho = -20dB$				$\rho = -20dB$			
	$r_{ty}(t_m)$	v_x	v_y		$r_{ty}(t_m)$	v_x	v_y
Valeurs exactes				Valeurs exactes			
	51200	1	7		51200	1	7
Estimateur gisements seuls				Estimateur gisements+ \hat{k}			
Moyenne	51199.70	0.91	6.6	Moyenne	51200.82	0.96	6.84
Ecart type	23	1.12	4.41	Ecart type	10.51	0.26	0.91
Borne	25	1.26	4.96	Borne	11.37	0.25	0.90

6. TRAJECTOGRAPHIE DE SOURCES MULTIPLES.

Les performances des méthodes de trajectographie peuvent être fortement réduites par les problèmes liés à la proximité des trajectoires des sources. L'analyse spatio-temporelle présentée en (11) représente un cadre naturellement adapté pour les raisons suivantes:

- Le modèle spatio-temporel permet une estimation séparée et directe des paramètres $k_{i,0}$ et $\hat{k}_{i,0}$.
- les problèmes d'association temporelle sont grandement simplifiés par la proximité relative des $\hat{k}_{i,t}$.

7. CONCLUSION.

L'introduction de nouvelles données aux problèmes de trajectographie a été étudiée. Ces données, estimées sur de longs temps d'intégration, représentent une modification en profondeur de la trajectographie, puisque l'on remplace la notion de gisement instantané (estimation à temps court) par celle de trajectoire. L'utilisation de ces données en trajectographie a été présentée en particulier dans le cas de la semi-azimétrie, pour laquelle des calculs théoriques de performances statistiques ont été conduits. Cette inclusion permet de réduire de façon notable les écart-types des estimées des paramètres des sources (position, vitesse). De plus une méthode originale de trajectographie multi-sources a été présentée comme une application naturelle de ces données.

8. REFERENCES

- [1] J.P. Le Cadre and O. Zugmeyer. Temporal integration for array processing. *Journal of Acoustical Society of America*, 3:1471-1481, March 1993.
- [2] Steven C. Nardone, Allen G. Lindgren, and Kai F. Gong. Fundamental properties and performance of conventional bearings-only target motion analysis. *IEEE Transactions on automatic control*, 29(9):775-787, sep 1984.
- [3] O. Zugmeyer and J.P. Le Cadre. A new approach to the estimation of source motion parameter, part 1. *Signal Processing*, 33(3):1-29, August 1993.