

## MODÉLISATION NON LINÉAIRE DES SIGNAUX D'ENGRENAGES

Pascale PRIEUR, Min CAI

EDF/ Études et Recherches, 6 quai Watier, 78401 Chatou

RÉSUMÉ

Cet article propose trois modélisations non linéaires des signaux d'engrenages, qui mettent en œuvre des filtres de Volterra excités par des sinusoides. La modélisation de ces signaux nécessite une résolution fréquentielle fine sur le noyau des filtres de Volterra. Les différentes modélisations visent à résoudre cette difficulté majeure. Après avoir présenté les différents modèles, leurs avantages sont illustrés sur des signaux de synthèse.

ABSTRACT

This paper presents three non linear modelisations for gearbox vibration signal. Their implementation is based on discrete time transversal Volterra filters excited by sinusoids. To achieve a good modelisation of these signals, a fine resolution for the kernel of Volterra filters is required. The proposed modelisations attend to solve this major difficulty. Simulations on amplitude modulation signals point out the interest of each of them.

### INTRODUCTION

Les signaux de surveillance des engrenages sont des mesures vibratoires d'accélération. On se propose de modéliser ces signaux. L'objectif à terme est de discriminer les états de fatigue des engrenages ; la modélisation devrait fournir un nombre réduit de paramètres discriminant de l'état des engrenages.

La dégradation d'un engrenage se traduit par des modulations d'amplitude et de phase du signal vibratoire [1], [2]. Ces phénomènes ne sont pas des transformations linéaires du signal. De ce fait, les méthodes linéaires d'identification des systèmes ne s'appliquent pas.

Cet article propose trois modélisations non linéaires des signaux d'engrenages, qui mettent en œuvre un ou deux filtres de Volterra excités par des sinusoides. La modélisation des phénomènes de modulation nécessite une résolution fréquentielle fine sur le noyau des filtres de Volterra. Les différentes modélisations visent à résoudre cette difficulté majeure.

Après avoir exposé les principes de la modélisation des signaux, les différents modèles sont explicités. Des résultats de simulation sur signaux synthétiques illustrent les avantages de chacun d'eux.

### DÉFINITION DU PROBLÈME

Les signaux d'engrenages sont d'origine vibratoire. La structure mécanique est soumise à deux sources d'excitation principales, indépendantes qui sont l'engrènement et le mouvement de la roue défectueuse.

Ces deux phénomènes physiques fournissent un signal vibratoire constitué d'un ensemble de sinusoides :

- le profil géométrique et les caractéristiques élastiques moyens sur l'ensemble des dents produisent les harmoniques de la fréquence d'engrènement  $f_{eng}$ ,
- les disparités de ces propriétés entre chacune des dents génèrent les harmoniques de la fréquence de rotation de la roue défectueuse  $f_r$ .

L'association de ces deux phénomènes donne un spectre composé de quelques sous-bandes, chacune centrée autour d'un harmonique de  $f_{eng}$  et cernée de bandes latérales. Ces bandes latérales sont des raies situées à des fréquences  $\pm jf_r$  de la fréquence centrale. On trouve alors toutes les fréquences :

$$if_{eng} \pm jf_r, \text{ avec } 0 < i \leq I, |j| \leq J.$$

On peut raisonnablement limiter le nombre de sous-bandes  $I$  et le nombre de raies  $J$  à 3. La bande utile est  $[-(If_{eng} + Jf_r), If_{eng} + Jf_r]$ , (figure 1).

La fréquence d'engrènement vérifie  $f_{eng} = N_r \times f_r$ . Le rapport des deux  $f_{eng}/f_r$  peut être de l'ordre de la centaine. La condition de Shannon impose alors une



fréquence d'échantillonnage de quelques  $f_{eng}$ , soit quelques centaines de  $f_r$ . Dans la mesure où  $f_{eng}$  est multiple de  $f_r$ , la modélisation d'un tel signal nécessite une résolution fréquentielle de  $f_r$ , (par exemple, 5/1000 en fréquence normalisée).

L'analyse précédente montre que les signaux d'engrenages sont engendrés par deux excitations sinusoïdales de fréquences  $f_{eng}$  et  $f_r$ . Le processus est non linéaire, car il génère des harmoniques de ces fréquences. On essaye donc de le modéliser par des filtres de Volterra transverses excités par des sinusoides de fréquences  $f_{eng}$  et  $f_r$ .

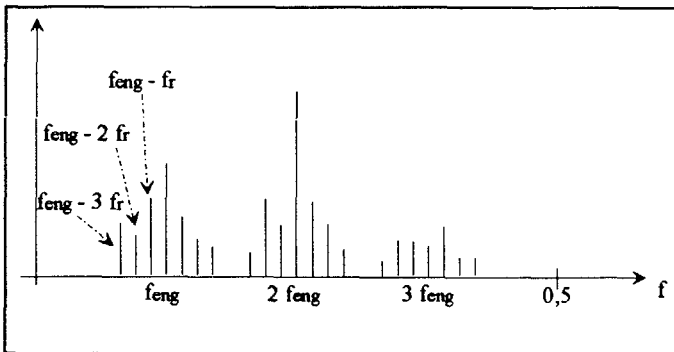


Figure 1 : Spectre d'un signal d'engrenages

On utilisera une version simplifiée de ces filtres en omettant les termes croisés. L'entrée  $x$  et la sortie  $y$  de ce filtre de Volterra sont liées par l'équation :  $y = x * h_1 + x^2 * h_2 + \dots + x^N * h_N$ .

L'expression vectorielle associée à cette relation d'entrée-sortie est rappelée en annexe 1.

**MODÉLISATION PAR FILTRAGE NON LINÉAIRE**

Le premier modèle proposé est un filtre de Volterra attaqué par une somme de deux sinusoides de fréquences  $f_{eng}$  et  $f_r$ , (figure 2).

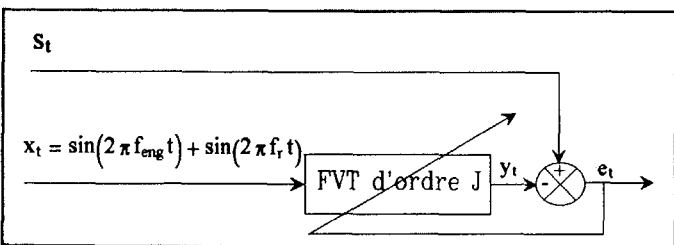


Figure 2 : Modélisation avec un filtre de Volterra

On note  $s_t$  le signal d'engrenages à modéliser,  $x_t$  et  $y_t$  respectivement l'entrée et la sortie du filtre d'ordre  $J'$ , ( $J'=I+J$ ).

$$\begin{cases} s_t = \sum_{i=1}^I \sum_{j=0}^J a_{ij} \sin(2\pi(i f_{eng} + j f_r)t), \\ y_t = \sum_{n=1}^{J'} x^n * h_n. \end{cases}$$

Un tel modèle engendre un signal  $y_t$  dont les composantes fréquentielles sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de  $f_{eng}$  et  $f_r$ . En effet, les puissances  $x^n, 0 < n \leq J$  intervenant dans la relation d'entrée-sortie vérifient :

$$x^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \sin^i(2\pi f_{eng} t) \sin^{n-i}(2\pi f_r t).$$

Par des calculs trigonométriques simples, les puissances de  $\sin(2\pi f_{eng} t)$  peuvent être décomposées suivant les harmoniques de  $f_{eng}$ , de même pour  $\sin(2\pi f_r t)$ . Chaque  $x^n$  est donc une combinaison linéaire des sinusoides de fréquences  $p f_{eng} \pm q f_r, p+q=n$ . On peut d'ailleurs démontrer que le support spectral de  $y_t$  contient toutes les fréquences combinées  $p f_{eng} \pm q f_r$ , [3]. Il inclut alors le support spectral de  $s_t$ . Pour que  $y_t$  ait le même spectre que  $s_t$ , il suffit de filtrer convenablement les  $x^n$ , c'est le rôle des  $h^n$ . Les filtrages doivent à cet effet avoir une résolution fréquentielle de  $f_r$ . Ceci n'est possible que si les  $h^n$  ont une longueur de mémoire suffisante.

Les structures suivantes tentent de résoudre le problème de résolution sans pour autant augmenter le nombre de coefficients des filtres.

**MODÉLISATION PAR FILTRAGE NON LINÉAIRE MULTI-ENTRÉE**

Ce 2<sup>e</sup> modèle découple les effets provoqués par l'engrènement et le mouvement des roues. Ces deux phénomènes sont indépendants.

Le signal de surveillance  $s_t$  est modélisé par la réponse d'un filtre non linéaire à deux sinusoides de fréquences  $f_{eng}$  et  $f_r$ . Chaque entrée du système est associée à une sollicitation mécanique ; elle est filtrée par un filtre de Volterra Transverse, (figure 3).

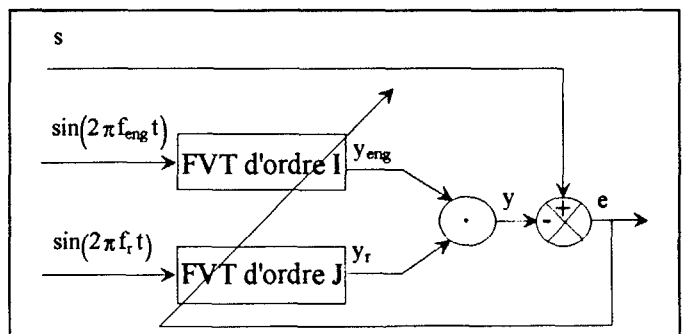


Figure 3 : Modélisation avec deux filtres de Volterra

Le filtrage non linéaire des excitations  $x_{eng} = \sin(2\pi f_{eng} t)$  et  $x_r = \sin(2\pi f_r t)$  engendre  $y_{eng}$  et  $y_r$ , qui se décomposent suivant les harmoniques de la fréquence excitatrice, respectivement  $f_{eng}$  et  $f_r$ . Le nombre d'harmoniques dépend de l'ordre du filtre de Volterra utilisé. La multiplication des séquences temporelles  $y_{eng}$  et  $y_r$  génère  $y$ , dont les composantes fréquentielles sont des combinaisons linéaires de celles de  $y_{eng}$  et  $y_r$ , soit  $pf_{eng} \pm qf_r$ , avec  $0 < p \leq I, |q| \leq J$ .

Ce modèle permet de régler la mémoire et l'ordre du filtre en fonction du phénomène modélisé. Le spectre vibratoire des signaux d'engrenage contient trois harmoniques de la fréquence d'engrènement; mais il est chargé en bandes latérales en  $f_r$  autour de ces harmoniques. Un filtre de Volterra d'ordre 3 suffit pour modéliser l'engrènement ; l'ordre du 2<sup>nd</sup> filtre pourra être pris plus élevé.

De même, la modélisation de l'engrènement nécessite une résolution fréquentielle moins fine sur le noyau du filtre que celle relative au mouvement des roues. Or, un filtre de Volterra d'ordre  $p$  peut être décomposé en :

- une transformation non linéaire qui génère les séquences  $x^i$  à partir de l'excitation  $x_r$ ,
- $p$  filtres linéaires, [4].

Dans le cas d'un filtre de Volterra sans termes croisés, ces  $p$  filtres linéaires sont des filtres MA. La résolution fréquentielle de ces filtres est donc liée à la mémoire du filtre.

La résolution fréquentielle du filtre de Volterra relatif au mouvement de la roue défectueuse doit être de  $2f_r$ . Car  $\sin^i(2\pi f t)$  contient tous les harmoniques pairs de  $f$ , si  $i$  est pair, impairs dans le cas contraire. L'identification s'effectue de manière adaptative par un algorithme du gradient stochastique.

Cette modélisation ne permet pas d'atteindre la résolution fréquentielle souhaitée, d'environ 5/1000 en fréquence normalisée sur les filtres de Volterra.

### MODÉLISATION PAR FILTRAGE NON LINÉAIRE ET SUR-ÉCHANTILLONNAGE

Le problème de résolution fréquentielle identifié précédemment concerne uniquement la modélisation des bandes latérales. Or, elles correspondent à des phénomènes basse-fréquence ( $f_r, 2f_r, 3f_r$ ). Une structure haute résolution ( $2f_r$ ) peut donc être créée à partir d'une structure basse résolution ( $2Kf_r$ ), en sur-échantillonnant le signal de sortie du filtre de Volterra, d'un facteur  $K$ , (figure 4).

Les entrées des filtres de Volterra sont échantillonnées à des cadences différentes, 1 et  $1/K$  en fréquence

normalisée. Entre deux valeurs successives du filtre de Volterra relatif au mouvement de la roue, on intercale  $(K-1)$  zéros. Ceci a pour effet de périodiser le spectre de  $z_1$ . Par filtrage passe-bas, on ne conserve que les composantes basse-fréquences du spectre; la fréquence de coupure du filtre est  $1/2K$ .

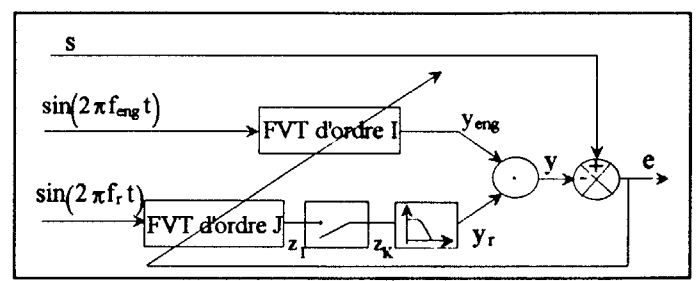


Figure 4 : Modélisation avec deux filtres de Volterra et sur-échantillonnage

On utilise un algorithme du gradient stochastique afin de minimiser l'erreur quadratique,  $e^2$ . L'algorithme d'adaptation des coefficients des filtres de Volterra est détaillé en Annexe 2.

### RÉSULTATS

L'intérêt de ces trois modèles a été évalué sur des signaux synthétiques de modulation d'amplitude. La difficulté principale étant la modélisation des bandes latérales, on ne considère que les bandes latérales autour de la fréquence d'engrènement avec  $f_{eng} = \frac{125}{512}$  et  $f_r = \frac{25}{512}$ .

La figure 5 montre le signal à modéliser, et l'erreur de modélisation obtenue avec les deux premiers modèles, dans le domaine fréquentiel. Le filtre de Volterra du premier modèle est d'ordre 4 et de mémoire 8, soit 32 coefficients. En ce qui concerne le 2<sup>e</sup> modèle, le filtre de Volterra relatif à l'engrènement est d'ordre 1 et de mémoire 3; le second filtre est d'ordre 3 et de mémoire 3, soit au total 12 coefficients.

Le 2<sup>e</sup> modèle donne des résultats satisfaisants pour des fréquences de rotation  $f_r$  supérieures à  $15/512$ .

Le dernier modèle permet de modéliser des bandes latérales en  $f_r=5/512$ , comme le montre la figure 6. Les paramètres du filtre de Volterra relatif à l'engrènement sont inchangés ; la mémoire du filtre relatif à la rotation vaut 5. La modélisation de ce signal nécessite au total 18 coefficients. Le facteur de sur-échantillonnage est  $K=9$ .

### CONCLUSION

Trois modélisations non linéaires des signaux vibratoires d'engrenages ont été proposées. Le dernier modèle, qui met en œuvre deux filtrages de Volterra



transverses et un sur-échantillonnage permet de modéliser des bandes latérales en  $f_r=5/512$ . Ces résultats sont encourageants puisqu'ils approchent la valeur de 5/1000, que l'on s'est fixée initialement pour la fréquence de rotation. Le sur-échantillonnage et le filtrage passe-bas ne sont pas sans influence sur les caractéristiques de l'algorithme d'adaptation. Une définition adéquate du filtrage passe-bas et des pas d'adaptation devrait encore améliorer les performances de ce modèle.

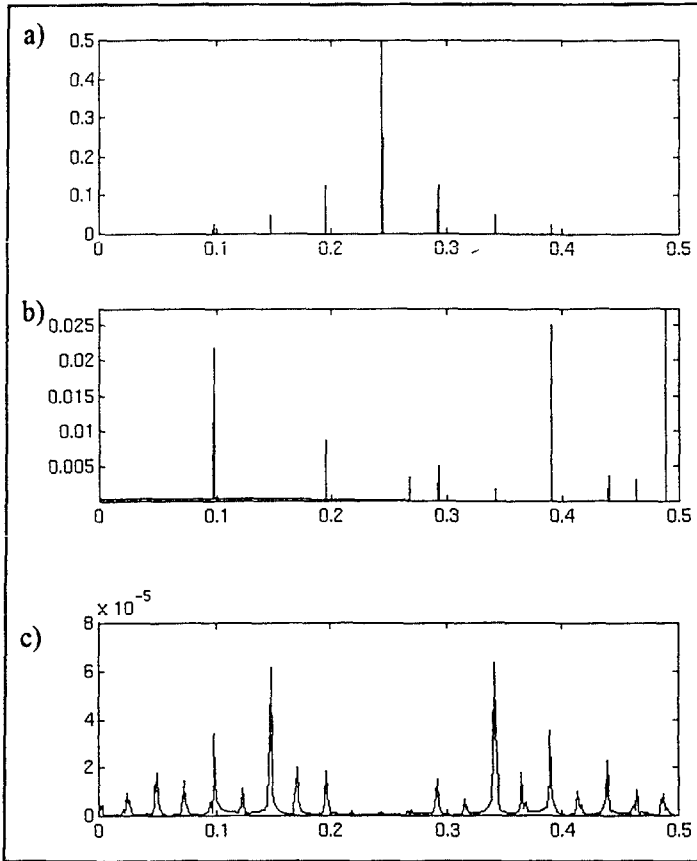


Figure 5 : Spectre du signal à modéliser (a), spectres de l'erreur de modélisation pour les modèles 1 et 2, (b),(c).

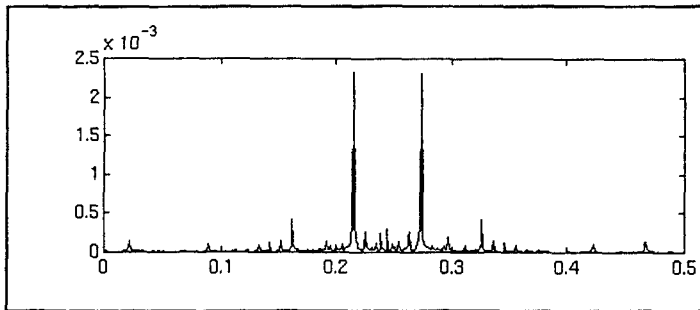


Figure 6 : Spectre de l'erreur de modélisation avec le dernier modèle

ANNEXE 1

La relation d'entrée-sortie d'un filtre de Volterra transverse d'ordre p, de mémoire N, sans termes croisés se

met sous la forme vectorielle [5],  $y = X_p^T \cdot H_p$  où  $X_p$  et  $H_p$  sont des vecteurs de dimension pN avec :  $X_p^T = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_p^T]$  et  $x_i$  vecteur de dimension N homogène à  $x^i$ .

ANNEXE 2

Soient,  $z_1(pK)$  la sortie du filtre de Volterra d'ordre J de mémoire N associé à la rotation, et  $z_K(pK+m)$  la sortie de ce même filtre après sur-échantillonnage d'un facteur K. On forme à partir des P dernières observations de  $z_1(pK)$  le vecteur de dimension PK :

$$Z_K^T(pK) = [z_1(p) 0 \dots 0 z_1(p-1) 0 \dots 0 \dots z_1(p-P+1) 0 \dots 0]$$

Le signal y vérifie  $y(pK+m) = y_{eng}(pK+m) \cdot y_r(pK+m)$  avec

$$\begin{cases} y_{eng}(pK+m) = X_{eng}^T(pK+m) \cdot H_{eng} \\ y_r(pK+m) = G^T \cdot Z_K(pK+m) = G^T \cdot Z_K(pK)^{\downarrow m} \end{cases}$$

où,  $\downarrow$  symbolise le glissement des composantes du vecteur et G représente le filtrage passe-bas.

On forme la matrice de dimension NJxPK :

$$\tilde{X}_K(pK+m) = [X_K(pK) O X_K((p-1)K) O \dots X_r^T(((p-N+1)K) O)]$$

où O est la matrice nulle de dimension NJx(K-1). Alors,

$$\begin{cases} y(pK+m) = (X_{eng}^T(pK+m) \cdot H_{eng}) \cdot ((\tilde{X}_K(pK)^{\downarrow m} \cdot G)^T \cdot H_r) \\ Z_K(pK+m) = Z_K(pK)^{\downarrow m} = \tilde{X}_K^T(pK)^{\downarrow m} \cdot H_r \end{cases}$$

L'adaptation des paramètres des filtres de Volterra est réalisée par l'algorithme du gradient stochastique, qui minimise l'erreur quadratique. A l'instant  $k=pK+m$ ,

$$\begin{cases} H_{eng}(k+1) = H_{eng}(k) + \mu_{eng} e(k) y_r(k) X_{eng} \\ H_r(k+1) = H_r(k) + \mu_r e(k) y_{eng}(k) \tilde{X}_K(k) \cdot G \end{cases}$$

RÉFÉRENCES

- [1] W. D. Mark, "Analysis of the vibratory of gear systems : Basic theory", J. Acoust. Soc. Am., vol. 63, n°5, pp. 1409-1430, May 1978.
- [2] R. B. Randall, "A new method of modeling gear faults", Journal of Mechanical Design, vol.104, pp. 259-267, April 1982.
- [3] M. Cai, J. Ball, "Noise cancellation with uncorrelated reference - a non linear filter approach", EUSIPCO Brussels, August 1992.
- [4] S. B. Kim, E. J. Powers, "Orthogonal representations of frequency domain Volterra models for arbitrary inputs", Workshop on higher order statistics, Chamrousse, France, pp. 229-232, July 1991.
- [5] P. Chevalier, P. Duvaut, B. Picinbono, "Le filtrage de Volterra transverse réel et complexe en traitement du signal", revue Traitement du Signal, vol. 7, n°5 spécial non gaussien, non linéaire, pp.451-469, 1990.